И. В. Павлов, В. В. Шамраева, И. В. Цветкова, О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 1, 173–181

DOI: 10.4213/tvp5049

где мы использовали тот факт, что $|M| > 0$ в силу (21).

Теперь докажем неравенство $dV/d\Delta I < 0$. Дифференцируя $V(x, x_2^{**}, \delta_2^{**}; I_2 + \phi\Delta I)$ по ΔI, получаем, что

$$\frac{dV(x, x_2^{**}, \delta_2^{**}; I_2 + \phi\Delta I)}{d\Delta I} = \frac{\partial V}{\partial x_2^{**}}\frac{dx_2^{**}}{d\Delta I} + \frac{\partial V}{\partial \delta_2^{**}}\frac{d\delta_2^{**}}{d\Delta I} + \frac{\partial V}{\partial \Delta I} = \frac{\partial V}{\partial \Delta I} = -\left(\frac{x}{x_2^{**}}\right)^{\beta}\phi < 0,$$

где при выводе второго равенства использована так называемая охватывающая теорема.

Мы выражаем признательность анонимному рецензенту за полезные комментарии и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixit A. K.*, *Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994, 488 p.
2. *Grenadier S. R.*, *Wang N.* Investment timing, agency, and information. — J. Financial Economics, 2005, v. 75, № 3, p. 493–533.
3. *Laffont J. J.*, *Martimort D.* The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002, 440 p.
4. *Nishihara M.*, *Shibata T.* The agency problem between the owner and the manager in real investment: The bonus-audit relationship. — Oper. Res. Lett., 2008, v. 36, № 3, p. 291–296.
5. *Shibata T.* Investment timing, asymmetric information, and audit structure: A real options framework. — J. Econom. Dynam. Control, 2009, v. 33, № 4, p. 903–921.
6. *Shibata T.*, *Nishihara M.* Interaction between investment timing and management effort under asymmetric information: Costs and benefits of privatized firms. — European J. Oper. Res., 2011, v. 215, № 3, p. 688–696.

Поступила в редакцию
7.XII.2014

Исправленный вариант
8.IX.2015

ПАВЛОВ И. В.*, ***ШАМРАЕВА В. В.****,
ЦВЕТКОВА И. В.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОСЛАБЛЕННОМУ УСЛОВИЮ НЕСОВПАДЕНИЯ БАРИЦЕНТРОВ, В СЛУЧАЕ СЧЕТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА[1)]

Для статических (B, S)-рынков со счетным числом состояний изучается специальное интерполяционное свойство мартингальных мер, дающее возможность преобразовать неполные безарбитражные рынки в полные. Получены достаточные условия на параметры рынка, обеспечивающие существование таких мартингальных мер.

Ключевые слова и фразы: специальная хааровская фильтрация, (B, S)-рынок, безарбитражность, полнота, мартингальная мера, хааровская интерполяция мартингала, ослабленное условие несовпадения барицентров.

* Кафедра высшей математики, Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: pavloviv2005@mail.ru

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184a и 16-07-00888a).

1. Введение. Рассмотрим статический (B,S)-рынок, заданный на $\{\Omega,\mathbf{F}\}$, где $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причем $\mathscr{F}_0=\{\Omega,\varnothing\}$, а $\mathscr{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_i, $i\in\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}$. Обозначим $Z=(Z_k,\mathscr{F}_k)_{k=0}^1$ $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции ($Z_0=a$, $Z_1(B_i)=b_i$, $i\in\mathbf{N}$).

Далее будем отождествлять P с вектором $(p_1,p_2,\ldots)$, где $p_i=P(B_i)$, и рассматривать только вероятностные меры $P=(p_1,p_2,\ldots)$ со строго положительными компонентами (т.е. невырожденные вероятностные меры). Обозначим $\mathscr{P}(Z,\mathbf{F})$ множество невырожденных мартингальных мер P рассматриваемого (B,S)-рынка, совпадающее с множеством решений системы

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}b_ip_i=a,\\ p_i>0, \qquad\qquad i\in\mathbf{N}.\end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\inf_i b_i<a<\sup_i b_i$. Это условие гарантирует разрешимость системы (1) и, следовательно, безарбитражность данного финансового рынка. Неполнота этого рынка очевидна.

Для перехода от неполных рынков к полным используют специальное интерполяционное свойство меры $P\in\mathscr{P}(Z,\mathbf{F})$ (см. [1], где оно названо ОСУХЕ — ослабленным свойством универсальной хааровской единственности). Пусть $\{k_1,\ldots,k_n,\ldots\}$ — некоторая перестановка последовательности $N=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$. Рассмотрим следующую фильтрацию с бесконечным горизонтом:

$$\mathscr{H}_0=\mathscr{F}_0,\quad \mathscr{H}_1=\sigma\{B_{k_1}\},\ldots,\quad \mathscr{H}_n=\sigma\{B_{k_1},B_{k_2},\ldots,B_{k_n}\},\ldots,\quad \mathscr{H}_\infty=\mathscr{F}_1.$$

Она называется специальной хааровской фильтрацией, интерполирующей фильтрацию $\mathbf{F}$. Для $P\in\mathscr{P}(Z,\mathbf{F})$ рассмотрим мартингал Дирихле $Y_n:=\mathbf{E}^P[Z_1\,|\,\mathscr{H}_n]$. Очевидно, что $Y_0=Z_0$, $Y_\infty=Z_1$. Процесс $\mathbf{Y}=(Y_n,\mathscr{H}_n)_{n=0}^\infty$ называется специальной хааровской интерполяцией процесса $\mathbf{Z}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $P\in\mathscr{P}(Z,\mathbf{F})$. Если для любой перестановки $\{k_1,\ldots,k_n,\ldots\}$ последовательности $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ процесс $\mathbf{Y}=(Y_n,\mathscr{H}_n)_{n=0}^\infty$ допускает единственную мартингальную меру (этой мерой будет исходная мера P), то будем говорить, что P удовлетворяет специальному интерполяционному свойству.

В [2] показано, что специальное интерполяционное свойство равносильно следующему аналитическому условию — ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что мартингальная мера $P=(p_1,p_2,\ldots)$ удовлетворяет ОУНБ, если для любого $i\in\mathbf{N}$ и для любого набора индексов $J\subset\mathbf{N}$, не содержащего i и такого, что дополнение $\overline{J}=N\setminus J$ конечно, выполняется неравенство

$$b_i\neq\frac{\sum_{j\in J}b_jp_j}{\sum_{j\in J}p_j}. \tag{2}$$

Множество мартингальных мер процесса Z, удовлетворяющих ОУНБ, обозначим ОУНБ(Z).

З а м е ч а н и е 1. Пусть $a\neq 0$ и b — произвольные действительные числа. Тогда $\mathscr{P}(aZ+b,\mathbf{F})=\mathscr{P}(Z,\mathbf{F})$ и ОУНБ$(aZ+b)=$ ОУНБ(Z).

Положим в неравенстве (2) $J=N\setminus\{i\}$. Тогда это неравенство будет равносильно следующему:

$$b_i\neq\frac{a-b_ip_i}{1-p_i}\Leftrightarrow b_i\neq a.$$

Таким образом, для того чтобы существовала мартингальная мера, удовлетворяющая ОУНБ, необходимо выполнение неравенств $b_i \neq a$ для любого $i \in \mathbf{N}$.

Определение 3. Будем говорить, что число b, входящее в $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеет кратность m (число m может быть как конечно, так и бесконечно), если в этой последовательности оно присутствует m раз.

Очевидны следующие два факта:

1) если последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$ содержит конечное число различных чисел, причем лишь одно из них имеет бесконечную кратность, то ОУНБ$(Z) = \varnothing$;

2) если последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$ содержит два различных числа, причем оба бесконечной кратности, то ОУНБ$(Z) = \mathscr{P}(Z, \mathbf{F})$.

ОУНБ в случае, когда $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержит r различных значений ($3 \leqslant r < \infty$). Не нарушая общности, можно считать, что $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$. Пусть их кратности равны соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Принимая во внимание сказанное выше, будем полагать, что *не менее чем два из этих чисел бесконечны*. Изменив нумерацию, легко получаем следующую систему обозначений:

$$
\begin{gathered}
b_1 = b_{r+1} = b_{2r+1} = \cdots = b_{r(j-1)+1} = \cdots, \qquad 1 \leqslant j < m_1 + 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_k = b_{r+k} = b_{2r+k} = \cdots = b_{r(j-1)+k} = \cdots, \qquad 1 \leqslant j < m_k + 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_r = b_{2r} = b_{3r} = \cdots = b_{rj} = \cdots, \qquad 1 \leqslant j < m_r + 1.
\end{gathered}
$$

При этом система (1) принимает вид

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} p_{r(j-1)+k} = 1, \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{r} b_k \sum_{j=1}^{m_k} p_{r(j-1)+k} = a, \\
p_{r(j-1)+k} > 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r, \quad 1 \leqslant j < m_k + 1.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Решение системы (3) будем искать следующим образом. Обозначим

$$
x_k = \sum_{j=1}^{m_k} p_{r(j-1)+k} \tag{4}
$$

и рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k = 1, \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{r} b_k x_k = a, \\
x_k > 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Получив решение $(x_1, \ldots, x_r)$ системы (5) и записав для любого k ($1 \leqslant k \leqslant r$) произвольное представление (4), мы тем самым получаем решение системы (3). Таким образом можно получить любое решение системы (3).

В дальнейшем нам понадобится следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 1. *Пусть $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$, $b_1 < a < b_r$, $a \neq b_2, \ldots, a \neq b_{r-1}$. Пусть l и n ($1 \leqslant l < n \leqslant r$) — два произвольных индекса. Тогда система* (5) *имеет решение $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ с рациональными компонентами $x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_r$.*

Если числа $b_1, \ldots, b_r$ и a рациональны и $b_l < a < b_n$, то существуют решения $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ следующих двух типов:

1) *все компоненты решения рациональны, а числа x_k ($k \neq l, n$) сколь угодно малы;*

2) *компоненты* x_l, x_n *и* x_s *иррациональны* (s — *произвольный фиксированный индекс*, $s \neq l, n$), *остальные компоненты решения рациональны, числа* x_k ($k \neq l, n$) *сколь угодно малы.*

Преобразуем неравенства (2) к более удобному виду. Обозначим для любого k ($1 \leqslant k \leqslant r$) конечные множества

$$J_k = \overline{J} \cap \{r(j-1)+k,\ 1 \leqslant j < m_k + 1\}. \tag{6}$$

Тогда (2) равносильно неравенствам

$$b_i \neq \frac{a - \sum_{k=1}^{r} b_k \sum_{j\in J_k} p_j}{1 - \sum_{k=1}^{r} \sum_{j\in J_k} p_j} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} (b_i - b_k) \sum_{j\in J_k} p_j \neq b_i - a. \tag{7}$$

Легко видеть, что при $i = 1$ и $i = r$ последнее неравенство выполняется автоматически. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Мартингальная мера P удовлетворяет ОУНБ тогда и только тогда, когда для любого i ($2 \leqslant i \leqslant r-1$) выполняются неравенства* (7), *где J_k — произвольные конечные множества, удовлетворяющие* (6) (*множества J_k могут быть пустыми*).

Непустота ОУНБ(Z) **в случае** $r = 3$. При $r = 3$ общее решение системы (5) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_3 - a}{b_3 - b_1} - \dfrac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1} x_2, \\[2ex] x_3 = \dfrac{a - b_1}{b_3 - b_1} - \dfrac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} x_2, \end{cases} \tag{8}$$

где $0 < x_2 < (a - b_1)/(b_2 - b_1)$, если $b_1 < a < b_2$, и $0 < x_2 < (b_3 - a)/(b_3 - b_2)$, если $b_2 < a < b_3$. Записав представления $x_1 = \sum_{j=1}^{m_1} p_{3j-2}$, $x_2 = \sum_{j=1}^{m_2} p_{3j-1}$, $x_3 = \sum_{j=1}^{m_3} p_{3j}$ (положительные числа p_{3j-2}, p_{3j-1}, p_{3j} произвольны) для любого фиксированного решения (x_1, x_2, x_3) из (8), получаем описание общего решения системы (3).

Применяя лемму 2, получаем, что $P \in$ ОУНБ(Z) тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$(b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j \neq b_2 - a, \tag{9}$$

где $J_1 \subset \{3j-2, j < m_1 + 1\}$ и $J_3 \subset \{3j, j < m_3 + 1\}$ — произвольные конечные множества.

Теорема A. *Пусть $b_1 < a < b_2 < b_3$ или $b_1 < b_2 < a < b_3$. Тогда* ОУНБ(Z) $\neq \varnothing$.

Доказательство. Сначала построим некоторую невырожденную мартингальную меру P, а затем докажем, что она удовлетворяет ОУНБ.

Шаг 1. Докажем, что существует решение (8) такое, что

$$x_1 > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1} \tag{10}$$

и

$$x_3 > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}. \tag{11}$$

Если $b_1 < a < b_2 < b_3$, то непосредственно проверяется, что $(b_3 - a)/(b_3 - b_1) > (b_2 - a)/(b_2 - b_1)$. Из первого неравенства системы (8) вытекает, что при достаточно малых x_2 выполняется неравенство (10), а неравенство (11) выполняется тривиально. Точно так же, если $b_1 < b_2 < a < b_3$, то легко видеть, что $(a - b_1)/(b_3 - b_1) > (a - b_2)/(b_3 - b_2)$. Из второго неравенства системы (8) вытекает, что при достаточно малых x_2 выполняется неравенство (11), а неравенство (10) выполняется тривиально. Таким образом, решение (8) с нужными свойствами существует. Обозначим (x_1, x_2, x_3) одно из таких решений и зафиксируем его.

Шаг 2. Фиксируем константы $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$ такие, что

$$x_1 > \frac{C_1}{b_2 - b_1} > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}, \quad x_3 > \frac{C_3}{b_3 - b_2} > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Шаг 3. Находим такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_3 > 0$, что выполняются неравенства

$$x_1 - \delta_1 > \frac{C_1}{b_2 - b_1} > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}, \tag{12}$$

$$\delta_1 < \frac{|b_2 - a|}{b_2 - b_1}, \tag{13}$$

$$x_3 - \delta_3 > \frac{C_3}{b_3 - b_2} > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}, \tag{14}$$

$$\delta_3 < \frac{|a - b_2|}{b_3 - b_2}, \tag{15}$$

$$(b_2 - b_1)\delta_1 + (b_3 - b_2)\delta_3 < |b_2 - a|, \tag{16}$$

$$\delta_1 < \frac{C_3 - (a - b_2)}{b_2 - b_1}, \tag{17}$$

$$\delta_3 < \frac{C_1 - (b_2 - a)}{b_3 - b_2}. \tag{18}$$

Шаг 4. Если $(b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)$ иррационально, то выбираем δ_1 и δ_3 рациональными. Если $(b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)$ рационально, то выбираем δ_1 рациональным, а δ_3 — иррациональным.

Шаг 5. Полагаем $p_1 = x_1 - \delta_1$, а (при $j \geqslant 2$) $p_{3j-2} = \delta_1 r_j^{(1)}$, где $r_j^{(1)}$ — произвольные положительные рациональные числа такие, что $\sum_{j=1}^{m_1} r_j^{(1)} = 1$. Точно так же полагаем $p_3 = x_3 - \delta_3$, а (при $j \geqslant 2$) $p_{3j} = \delta_3 r_j^{(3)}$, где $r_j^{(3)}$ — произвольные положительные рациональные числа такие, что $\sum_{j=1}^{m_3} r_j^{(3)} = 1$. Наконец, пусть при $j \geqslant 1$ положительные числа p_{3j-1} удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{m_2} p_{3j-1} = 1$.

Итак, мы получили невырожденную вероятностную меру P. Покажем, что она удовлетворяет неравенствам (9).

Случай 1: $J_1 = \varnothing$, $J_3 = \varnothing$. Неравенство (9) очевидно.

Случай 2: $J_1 \neq \varnothing$, $J_3 = \varnothing$. Неравенство (9) перепишем в виде

$$(b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j \neq b_2 - a \Longleftrightarrow \sum_{J_1} p_j \neq \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}. \tag{19}$$

Если $b_2 < a < b_3$, то неравенство (19) очевидно. Пусть $b_1 < a < b_2$. Если $1 \in J_1$, то из (12) следует

$$\sum_{J_1} p_j \geqslant x_1 - \delta_1 > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1},$$

а если $1 \notin J_1$, то из (13) вытекает

$$\sum_{J_1} p_j \leqslant \delta_1 < \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}.$$

Случай 3: $J_1 = \varnothing$, $J_3 \neq \varnothing$. Рассуждения проводятся, как в случае 2, но с использованием неравенств (14) и (15).

Случай 4: $J_1 \neq \varnothing$, $J_3 \neq \varnothing$. Если $1 \notin J_1$, $3 \notin J_3$, то

$$\left| (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j \right| \leqslant (b_2 - b_1)\delta_1 + (b_3 - b_2)\delta_3 < |b_2 - a|,$$

что следует из неравенства (16). Если $1 \in J_1$, $3 \notin J_3$, то, используя неравенства (12) и (18), получаем

$$(b_2-b_1)\sum_{J_1} p_j - (b_3-b_2)\sum_{J_3} p_j = (b_2-b_1)\Biggl(x_1-\delta_1+\sum_{J_1\setminus\{1\}} p_j\Biggr) - (b_3-b_2)\sum_{J_3} p_j$$
$$\geqslant (b_2-b_1)(x_1-\delta_1)-(b_3-b_2)\delta_3 > (b_2-b_1)\,\frac{C_1}{b_2-b_1} - (b_3-b_2)\,\frac{C_1-(b_2-a)}{b_3-b_2}$$
$$= C_1 - C_1 + (b_2-a) = b_2-a.$$

Если $1 \notin J_1$, $3 \in J_3$, то

$$(b_2-b_1)\sum_{J_1} p_j - (b_3-b_2)\sum_{J_3} p_j = (b_2-b_1)\sum_{J_1} p_j - (b_3-b_2)\Biggl(x_3-\delta_3+\sum_{J_3\setminus\{3\}} p_j\Biggr)$$
$$\leqslant \delta_1 - (b_3-b_2)(x_3-\delta_3) < (b_2-b_1)\,\frac{C_3-(a-b_2)}{b_2-b_1} - (b_3-b_2)\,\frac{C_3}{b_3-b_2}$$
$$= C_3-(a-b_2)-C_3 = b_2-a$$

(здесь использовались неравенства (14) и (17)).

Пусть, наконец, $1 \in J_1$, $3 \in J_3$. Легко видеть, что

$$(b_2-b_1)\sum_{J_1} p_j - (b_3-b_2)\sum_{J_3} p_j = b_2-a$$
$$\Longleftrightarrow (b_2-b_1)(x_1-\delta_1') - (b_3-b_2)(x_3-\delta_3') \neq b_2-a$$
$$\Longleftrightarrow -(b_2-b_1)\delta_1' + (b_3-b_2)\delta_3' \neq 0,$$

где $\delta_1' \geqslant 0$ и $\delta_3' \geqslant 0$. Одновременное равенство нулю δ_1' и δ_3' невозможно: это бы означало, что $m_1 < \infty$ и $m_3 < \infty$, что, в свою очередь, противоречит предположению о наличии среди чисел m_1, m_2 и m_3 по крайней мере двух бесконечностей. Если одно из чисел δ_1' и δ_3' равно нулю, а другое строго больше нуля, то (9) выполняется тривиально. Остается рассмотреть ситуацию, когда $\delta_1' > 0$ и $\delta_3' > 0$. В этом случае (9) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\delta_3'}{\delta_1'} \neq \frac{b_2-b_1}{b_3-b_2}. \tag{20}$$

Итак, имеем

$$(b_2-b_1)\sum_{J_1} p_j - (b_3-b_2)\sum_{J_3} p_j$$
$$= (b_2-b_1)\Biggl(x_1-\delta_1+\sum_{J_1\setminus\{1\}} p_j\Biggr) - (b_3-b_2)\Biggl(x_3-\delta_3+\sum_{J_3\setminus\{3\}} p_j\Biggr)$$
$$= (b_2-b_1)\Biggl(x_1-\delta_1\Biggl(1-\sum_{J_1\setminus\{1\}} r_j^{(1)}\Biggr)\Biggr) - (b_3-b_2)\Biggl(x_3-\delta_3\Biggl(1-\sum_{J_3\setminus\{3\}} r_j^{(3)}\Biggr)\Biggr).$$

Обозначим $\delta_1' = \delta_1(1-\sum_{J_1\setminus\{1\}} r_j^{(1)})$, $\delta_3' = \delta_3(1-\sum_{J_3\setminus\{3\}} r_j^{(3)})$. Имеем

$$\frac{\delta_3'}{\delta_1'} = \frac{\delta_3\left(1-\sum_{J_3\setminus\{3\}} r_j^{(3)}\right)}{\delta_1\left(1-\sum_{J_1\setminus\{1\}} r_j^{(1)}\right)}.$$

Так как выражения в скобках в числителе и знаменателе рациональны, то, принимая во внимание выбор чисел δ_1 и δ_3, описанный в шаге 4, получаем неравенство $\delta_3'/\delta_1' \neq (b_2-b_1)/(b_3-b_2)$, что доказывает выполнение (9) и в этом случае.

Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. В [3] доказано, что в случае $b_1 < a < b_2 < b_3$ при $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = \infty$, и в случае $b_1 < b_2 < a < b_3$ при $m_1 = m_2 = \infty$, $m_3 = 1$ справедливо равенство ОУНБ$(Z) = \mathscr{P}(Z, \mathbf{F})$. В то же время из результатов работы [2] вытекает, что в остальных случаях ОУНБ(Z) строго вложено в $\mathscr{P}(Z, \mathbf{F})$.

Достаточные условия непустоты ОУНБ(Z) **в случае** $3 < r < \infty$**.** Прежде всего сделаем следующее замечание, которое мы будем использовать в процессе доказательства теоремы B.

З а м е ч а н и е 3. Пусть $0 < x_k < 1$ $(m_k = \infty)$ и $d > 1$ — натуральное число. В доказательстве двух следующих предложений мы будем использовать d-адическое представление вида: $x_k = \sum_{i=1}^{\infty}(t_i^{(k)}/d^i)$, где натуральные числа $t_i^{(k)}$ могут принимать значение $0, 1, 2, \dots, d-1$. Хорошо известно, что для любого такого x_k существует представление указанного вида, в котором ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(t_i^{(k)}/d^i)$ содержит бесконечное число строго положительных членов. Именно такие представления мы будем рассматривать. В качестве компонент $p_{(j-1)r+k}$ $(1 \leqslant j < \infty)$ мы выберем j-й ненулевой член ряда $\sum_{i=1}^{\infty}(t_i^{(k)}/d^i)$.

Теорема B. *Пусть числа* $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ *рациональны,* a *— действительное число,* $b_1 < a < b_r$, $a \neq b_k$ $(k = 2, 3, \dots, r-1)$*. Тогда* ОУНБ$(Z) \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда число a иррационально. Ясно, что существуют такие индексы l, n $(1 \leqslant l < n \leqslant r)$, что $m_l = m_n = \infty$. Зафиксируем решение $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ системы (5) из первой части леммы 1 (координаты x_k $(k \neq l,\, n)$ рациональны).

Если k таково, что $m_k = \infty$, то представим x_k в виде $x_k = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(k)}/2^i$, где $t_i^{(k)} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right.$. Определяем $p_{(j-1)r+k}$ $(1 \leqslant j < \infty)$, как это описано в замечании 3 (таким образом, все эти числа рациональны). Если k таково, что $m_k < \infty$ (в этом случае $k \neq l, n$), то полагаем $p_{(j-1)r+k} = x_k/m_k$ $(1 \leqslant j \leqslant m_k)$. Так как координаты x_k рациональны при $m_k < \infty$, то и соответствующие числа $p_{(j-1)r+k}$ рациональны.

Итак, мы построили невырожденную мартингальную меру P. Покажем, что $P \in$ ОУНБ(Z).

Так как в (7) все множества J_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ конечны, то ясно, что левые части этих соотношений рациональны, в то время как правые — иррациональны. Таким образом, неравенства (7) выполняются, т.е. построенная мера P удовлетворяет ОУНБ и теорема B в случае иррационального a доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда число a рационально. Принимая во внимание замечание 1, можно считать, что числа b_k, $k = 1, 2, \dots, r$, и a — целые.

1) Предположим, что существуют такие индексы l и n $(1 \leqslant l < n \leqslant r)$, что $m_l = m_n = \infty$ и $b_l < a < b_n$. Зафиксируем решение $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ системы (5), являющееся решением 1-го типа. Так как

$$\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l,n}}^{r} |b_i - b_k| \sum_{J_k} p_j \leqslant \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l,n}}^{r} |b_i - b_k| x_k,$$

будем считать компоненты x_k $(k \neq l, n)$ настолько малыми, что для всех i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ выполняются неравенства

$$\left| \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l,n}}^{r} (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j \right| < |b_i - a|. \tag{21}$$

Для индексов k $(k \neq l, n)$ поступим так же, как в предыдущей части доказательства. Следовательно, для индексов k таких, что $m_k = \infty$, $\sum_{J_k} p_j = C_k/2^{\gamma_k}$, где C_k, γ_k — некоторые неотрицательные целые числа $(k \neq l, n,\ 0 \leqslant C_k < 2^{\gamma_k}$, C_k и γ_k зависят от $J_k)$. Для индексов k таких, что $m_k < \infty$, положим $x_k = C_k'/C_k''$, где C_k', C_k'' —

положительные целые числа. Тогда $\sum_{J_k} p_j = |J_k|C'_k/(C''_k \cdot m_k)$, где $|J_k|$ — число элементов множества J_k. Зададим простое число $d_l > b_r - b_1$ настолько большим, что

$$d_l > \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ m_k < \infty}} \{C''_k + m_k\},$$

и простое число $d_n > d_l$. Теперь представим $x_l = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(l)}/d_l^i$, $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(n)}/d_n^i$ и зададим $p_{(j-1)r+l}$, $p_{(j-1)r+n}$ $(1 \leqslant j < \infty)$, как описано в замечании 3. Ясно, что

$$\sum_{J_l} p_j = \frac{C_l}{d_l^{\gamma_l}} \quad (0 \leqslant C_l < d_l^{\gamma_l}, C_l \text{ и } \gamma_l \text{ зависят от } J_l),$$

$$\sum_{J_n} p_j = \frac{C_n}{d_n^{\gamma_n}} \quad (0 \leqslant C_n < d_n^{\gamma_n}, C_n \text{ и } \gamma_n \text{ зависят от } J_n).$$

Итак, мы построили невырожденную мартингальную меру P. Проверим выполнение для нее неравенств (7).

Если $J_l = \varnothing$, $J_n = \varnothing$, то неравенства (7) вытекают из неравеств (21).

Если $J_l \neq \varnothing$, $J_n = \varnothing$, то неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_l) \cdot C_l}{d_l^{\gamma_l}} \neq b_i - a - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^{r} (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \tag{22}$$

Пусть $i \neq l$. Из условий на d_l вытекает, что в левой части стоит несократимая рациональная дробь. Если в правой части произвести алгебраические действия и полученную рациональную дробь сократить, то в несократимой дроби в знаменателе не может содержаться сомножитель d_l. Поэтому неравенства (22), а следовательно, и (7) выполняются. Если $i = l$, то (22) следует из (21).

Случай $J_l = \varnothing$, $J_n \neq \varnothing$ рассматриваются аналогично предыдущему.

Пусть $J_l \neq \varnothing$, $J_n \neq \varnothing$. Неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n)C_n}{d_n^{\gamma_n}} \neq b_i - a - \frac{(b_i - b_l)C_l}{d_l^{\gamma_l}} - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^{r} (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \tag{23}$$

Рассуждая так же, как и в случае $J_l \neq \varnothing$, $J_n = \varnothing$, получаем, что неравенство (23) выполнено.

Таким образом, построенная мартингальная мера P удовлетворяет ОУНБ.

2) Если не выполняется предположение 1) в предыдущей части доказательства, то существуют такие индексы l и n, что $b_l < a < b_n$ и среди чисел m_l и m_n одно бесконечно, а другое конечно. Не нарушая общности, можно считать, что $m_l = \infty$, а $m_n < \infty$.

Зафиксируем решение 2-го типа системы (5) из второй части леммы 1, такое, что выполняется неравенство (21). Для индексов k $(k \neq l, n)$ поступим так же, как в предыдущей части доказательства. Так же, как и ранее, выбираем простое число d_l, представляем $x_l = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(l)}/d_l^i$ и задаем $p_{(j-1)r+l}$. Наконец, полагаем $p_{(j-1)r+n} = x_n/m_n$, $1 \leqslant j \leqslant m_n$. Покажем, что полученная невырожденная мартингальная мера P удовлетворяет неравенствам (7).

Случаи $J_l = \varnothing$, $J_n = \varnothing$ и $J_l \neq \varnothing$, $J_n = \varnothing$ рассматриваются так же, как и в предыдущей части доказательства. Пусть $J_l = \varnothing$, $J_n \neq \varnothing$. Тогда (7) равносильно неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n) \cdot |J_n| \cdot x_n}{m_n} \neq b_i - a - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^{r} (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \tag{24}$$

При $i \neq n$ это неравенство выполняется, так как число, стоящее в левой части, иррационально, а в правой рационально. При $i = n$ неравенство (24) вытекает из (21).

Пусть $J_l \neq \varnothing$, $J_n \neq \varnothing$. Неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n) \cdot |J_n| \cdot x_n}{m_n} \neq b_i - a - \frac{(b_i - b_l)C_l}{d_l^{\gamma_l}} - \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l,n}}^{r} (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \tag{25}$$

Рассуждая, как и ранее, показываем, что неравенства (25) справедливы. Таким образом, построенная мартингальная мера P удовлетворяет ОУНБ.

Теорема B полностью доказана.

З а м е ч а н и е 4. Теорема B является далеко не окончательным результатом в описании (B,S)-рынков, на которых существуют мартингальные меры, удовлетворяющие ОУНБ. По мнению авторов настоящей работы, если $4 \leqslant r < \infty$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$, $b_1 < a < b_r$ и a не совпадает ни с одним b_k, то мартингальные меры, удовлетворяющие ОУНБ, всегда существуют. Однако в настоящее время даже для случая $r = 4$ авторы не имеют доказательства этого факта.

Авторы выражают глубокую благодарность академику РАН А. Н. Ширяеву за важные замечания, которые были использованы в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данекянц А. Г.*, *Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.
2. *Данекянц А. Г.* О специальных хааровских интерполяциях мартингалов. — Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, приложение, 2005, № 3, с. 3–20.
3. *Павлов И. В.*, *Цветкова И. В.*, *Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. — Вестник РГУПС, 2012, № 3, с. 177–181.

Поступила в редакцию
17.I.2015

 BAYRAKTAR E.[*], ***ZHOU Zh.***[**]

ON AN OPTIMAL STOPPING PROBLEM OF AN INSIDER[1)]

В работе рассматривается задача оптимальной остановки $v^{(\varepsilon)} := \sup_{\tau \in \mathscr{T}_{0,T}} \mathbf{E}\, B_{(\tau-\varepsilon)^+}$, сформулированная А. Н. Ширяевым в докладе, сделанном на Международной конференции «Stochastic Optimization and Optimal Stopping», организованной Математическим институтом им. В. А. Стеклова в Москве в сентябре 2012 года. Пусть $T > 0$ — фиксированный временной горизонт, $(B_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ — броуновское движение, $\varepsilon \in [0, T]$ — некоторая константа и $\mathscr{T}_{\varepsilon,T}$ — множество моментов остановки со значениями на $[\varepsilon, T]$. Решение

[*] Department of Mathematics, University of Michigan; e-mail: erhan@umich.edu
[**] Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota; e-mail: zhoux528@umn.edu

[1)] This research was supported in part by the National Science Foundation under grants DMS 0955463.