V. Solonnikov, On estimates of Green's tensors for certain boundary problems,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1960, Volume 130, Number 5, 988–991

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 130, № 5

МАТЕМАТИКА

В. СОЛОННИКОВ

ОБ ОЦЕНКАХ ТЕНЗОРОВ ГРИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 X 1959)

1. Рассмотрим первую краевую задачу для стационарной системы Навье — Стокса в ограниченной трехмерной области Ω с границей S:

$$\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0. \tag{1}$$

Одквист ([1]) развил теорию потенциала и построил тензор Грина для задачи (1). Основное сингулярное решение имеет вид

$$v_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\delta_{ij}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r_{xy}^3}\right], \quad q_j(x, y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j - y_j}{r_{xy}^3}.$$

Построенный Одквистом тензор Грина выражается с помощью основного сингулярного решения следующим образом:

$$G_{ij}(x, y) = v_{ij}(x, y) - \Gamma_{ij}(x, y). \qquad g_j(x, y) = q_j(x, y) - \gamma_j(x, y),$$

где Γ_{ij}, γ_j удовлетворяют системе

$$\Delta_x \Gamma_{ij}(x, y) = \frac{\partial \gamma_j(x, y)}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial \Gamma_{ij}(x, y)}{\partial x_i} = 0,$$

и краевому условию

$$\Gamma_{ij}(\xi, y)\big|_{\xi \in S} = v_{ij}(\xi, y)\big|_{\xi \in S}.$$

Для G_{ij}, $\partial G_{ij}/\partial x_m$, g_j Одкивистом получен ряд оценок. Обобщением его результатов является следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $S \in \operatorname{Lip}(1, h)$, $0 < h \leqslant 1$, *то*

$$|G_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{C}{r_{xy}}, \quad \left|\frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m}\right|, \quad |g_j(x, y)| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^2},$$

$$\left.\begin{matrix} \left|\dfrac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m} - \dfrac{\partial G_{ij}(x', y)}{\partial x'_m}\right| \\ |g_j(x, y) - g_j(x', y)| \end{matrix}\right\} \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R^2}\right), & h < 1 \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^2}\right), & h = 1, \end{cases}$$

где C — постоянные, зависящие от S; $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

Если же $S \in \operatorname{Lip}(2, \lambda)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 G_{ij}(x, y)}{\partial x_l \partial x_m}\right|, \quad \left|\frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x_l}\right| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^3},$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial^2 G_{ij}(x,y)}{\partial x_l \partial x_m}-\dfrac{\partial^2 G_{ij}(x',y)}{\partial x'_l \partial x'_m}\right| \\ \left|\dfrac{\partial g_j(x,y)}{\partial x_l}-\dfrac{\partial g_j(x',y)}{\partial x'_l}\right|\end{array}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|}{R^4}+\dfrac{r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|^2}{R^3}+\dfrac{r^{\lambda}_{xx'}}{R^2}\right), & \lambda<1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|}{R^4}+\dfrac{r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|^2}{R^3}+\dfrac{r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|^3}{R^2}\right), & \lambda=1. \end{cases}$$

Отметим, что точно такие же оценки справедливы для функции Грина для задачи Дирихле и функции Неймана.

Так как решение задачи (1) выражается с помощью тензора Грина по формулам

$$v_i(x)=-\int\limits_{\Omega} G_{ij}(x,y)\,f_j(y)\,dy, \qquad p(x)=-\int\limits_{\Omega} g_j(x,y)\,f_j(y)\,dy,$$

то при помощи теоремы 1 может быть доказана

Теорема 2. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1,h)$ *и* $|\mathbf{f}|\leqslant C$, *то*

$$\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\right|\leqslant C, \qquad \left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_i}-\dfrac{\partial \mathbf{v}(x')}{\partial x'_i}\right| \\ |p(x)-p(x')|\end{array}\right\}\leqslant\begin{cases} Cr^h_{xx'}, & h<1. \\ Cr_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|^2, & h=1.\end{cases}$$

Если же $S\in \mathrm{Lip}(2,\lambda)$, $\mathbf{f}\in \mathrm{Lip}(0,\alpha)$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right| \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)},$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x)}{\partial x_i \partial x_j}-\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x')}{\partial x'_i \partial x'_j}\right| \\ \left|\dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i}-\dfrac{\partial p(x')}{\partial x'_i}\right|\end{array}\right\}\leqslant\begin{cases} C\,\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)}\,r^{\lambda}_{xx'} & \lambda<\alpha, \\ C\,\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)}\,r^{\alpha}_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|, & \alpha\leqslant\lambda<1, \quad \alpha<\lambda\leqslant 1, \\ C\,\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,1)}\,r_{xx'}\,|\ln r_{xx'}|^3, & \alpha=\lambda=1.\end{cases}$$

Более общий результат приведен в заметке ([2]).

Кроме того, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если* $S\in C^2$, *то имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отметим, что аналогичная оценка для $\|\mathbf{v}\|_{W^2_2(\Omega')}$, где Ω' — любая строго внутренняя подобласть области Ω, получена О. А. Ладыженской.

2. При исследовании дифференциальных свойств решения стационарных задач магнитной гидродинамики встречается необходимость построить тензор Грина для следующей задачи

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}=0, \quad H_n|_S=0, \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ — заданный соленоидальный вектор, $H_n|_S=H_i(\xi)\,n_i(\xi)|_{\xi\in S}$ и Ω — односвязная область.

Рассмотрим также сопряженную задачу

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\mathbf{a}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{E}_\tau|_S=0, \tag{3}$$

где $\mathbf{a}$ — соленоидальный вектор, удовлетворяющий граничному условию $a_n|_S=0$, и $\mathbf{E}_\tau=\mathbf{E}-\mathbf{n}E_n$.

Тензоры Грина для задач (2), (3), $V_{ik}(x, y)$ и $U_{ik}(x, y)$, являются решениями следующих задач:

$$\mathrm{rot}_x \mathbf{V}_k(x, y) = \mathrm{grad}_x \frac{\partial N(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y), \quad \mathrm{div}_x \mathbf{V}_k(x, y) = 0,$$

$$\mathbf{V}_{k_\tau}(\xi, y)\big|_{\xi \in S} = 0, \quad \mathbf{V}_k = (V_{1k}, V_{2k}, V_{3k}),$$

$$\mathrm{rot}_x \mathbf{U}_k(x, y) = \mathrm{grad}_x \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y),$$

$$\mathrm{div}_x \mathbf{U}_k(x, y) = 0, \quad U_{k_n}(\xi, y)\big|_{\xi \in S} = 0, \ \mathbf{U}_k = (U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}),$$

где $N(x, y)$ — функция Неймана, $G(x, y)$ — функция Грина для задачи Дирихле.

Легко проверить, что

$$\mathbf{V}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{V}'_k(x, y) + \mathrm{grad}_x s_k(x, y),$$

где

$$\mathbf{V}'_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}} dS_\xi$$

и $s_k(x, y)$ является решением задачи Дирихле:

$$\Delta_x s_k(x, y) = 0, \quad s_k(\xi, y)\big|_{\xi \in S} = b_k(\xi, y)\big|_{\xi \in S},$$

причем

$$b_k(\xi, y) = -\int_{M_0}^{M(\xi)} \left(\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}'_k(\eta, y), \overrightarrow{de_\eta}\right);$$

интегрирование ведется по контуру, лежащему на S. Выражение для $b_k(\xi, y)$ имеет смысл, так как

$$\oint_{(l)} \left(\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}'_k(\eta, y), \overrightarrow{dl_\eta}\right) = 0.$$

Далее,

$$\mathbf{U}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{U}'_k(x, y) + \mathrm{grad}_x t_k(x, y),$$

где

$$\mathbf{U}'_k(x, y) = \mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial \rho(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}} dS_\xi,$$

$\rho(\xi, y)$ — плотность потенциала двойного слоя, при помощи которого выражается регулярная часть функции $G(x, y)$, а $t_k(x, y)$ — решение задачи Неймана

$$\Delta t_k(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial t_k(\xi, y)}{\partial n_\xi}\bigg|_{\xi \in S} = -\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_n \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\xi y}} + U'_{k_n}(\xi, y)\bigg|_{\xi \in S}.$$

Между V_{ik} и U_{ik} существует соотношение

$$V_{ik}(x, y) = U_{ki}(y, x).$$

Решения задач (2), (3) выражаются при помощи V_{ik} и U_{ik} следующим образом:

$$H_k(x) = \int_\Omega j_i(y) V_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega U_{ki}(x, y)\, j_i(y) dy,$$

$$E_k(x) = \int_\Omega a_i(y) U_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega V_{ki}(x, y)\, a_i(y)\, dy.$$

Теорема 4. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$, *то*

$$|U_{ik}(x, y)|, \quad |V_{ik}(x, y)| \leqslant \frac{C}{r^2_{xy}},$$

$$\left.\begin{matrix} |U_{ik}(x, y) - U_{ik}(x', y)| \\ \\ |V_{ik}(x, y) - V_{ik}(x', y)| \end{matrix}\right\} \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r^h_{xx'}}{R^2}\right), & h < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^2}\right), & h = 1, \end{cases}$$

где $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

Если же $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$, *то*

$$\left|\frac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l}\right|, \quad \left|\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_l}\right| \leqslant \frac{C}{r^3_{xy}},$$

$$\left.\begin{matrix} \left|\dfrac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial U_{ik}(x', y)}{\partial x'_l}\right| \\ \\ \left|\dfrac{\partial V_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial V_{ik}(x', y)}{\partial x'_l}\right| \end{matrix}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r^\lambda_{xx'}}{R^2}\right), & \lambda < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^2}\right), & \lambda = 1. \end{cases}$$

При помощи этих оценок может быть доказана

Теорема 5. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$ *и* $|\mathbf{j}| \leqslant C$, *то решение задачи* (1) *удовлетворяет условиям*:

$$|\mathbf{H}| \leqslant C, \quad |\mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x')| \leqslant \begin{cases} Cr^h_{xx'}, & h < 1, \\ Cr_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2, & h = 1. \end{cases}$$

Если же $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$ *и* $\mathbf{j} \in \mathrm{Lip}(0, \alpha)$, *то*

$$\left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_l}\right| \leqslant C\, \|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0, \alpha)},$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{H}(x)}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathbf{H}(x')}{\partial x'_l}\right| \leqslant \begin{cases} C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r^\lambda_{xx'}, & \lambda < \alpha, \\ C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r^\alpha_{xx'}|\ln r_{xx'}|, & \alpha \leqslant \lambda < 1, \quad \alpha < \lambda \leqslant 1, \\ C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3, & \alpha = \lambda = 1. \end{cases}$$

Точно такая же теорема справедлива для задачи 2.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. K. G. Odqvist, Math. Zs., **32**, H. 3, 329 (1930). [2] И. И. Ворович, В. И. Юдович, ДАН, **124**, № 3 (1959).