М. С. Бичегкуев, Об ограниченных решениях разностных включений, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, номер 8, 16–24

Известия вузов. Математика
2008, № 8, с. 16–24
http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

М.С. БИЧЕГКУЕВ

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия единственности решения в пространстве двусторонних векторных последовательностей разностного включения. При доказательстве основного результата используется спектральная теория линейных отношений (многозначных линейных операторов).

Ключевые слова: линейное отношение, спектр линейного отношения, разностное включение, оператор умножения.

УДК: 517.925

Abstract. We establish the necessary and sufficient conditions for the uniqueness of a solution to a difference inclusion in the space of bilateral vector sequences. The proof of the main result is based on the spectral theory of linear relations (multivalued linear operators).

Keywords: linear relation, spectrum of a linear relation, difference inclusion, multiplication operator.

Пусть X — комплексное банахово пространство и A — замкнутое линейное отношение на X, т. е. A — линейное замкнутое подпространство из $X \times X$. Через Ax, где $x \in D(A)$ (см. раздел 1), обозначим множество векторов $\{y \in X : (x, y) \in A\}$. Рассматриваются банаховы пространства $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, двусторонних последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ векторов из X с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|, \quad p = \infty.$$

Основные результаты связаны с вопросами существования и единственности решений из l_p разностного включения вида

$$x(n) \in Ax(n-1) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $f \in l_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При этом под решением этого включения понимается последовательность $x \in l_p$, для которой верны включения (1).

Поступила 20.06.2006

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00131).

Разностные включения естественным образом возникают при изучении решений из l_p разностного уравнения вида

$$Bx(n) = Cx(n-1) + g(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $g \in l_p$ и B, $C : X \to Y$ — линейные ограниченные операторы, действующие из X в банахово пространство Y, причем оператор B имеет ненулевое ядро, а также при изучении линейных дифференциальных включений [1] и специального класса интегральных операторов [2]. Задача о существовании решений из l_p уравнения (2) сведена к задаче о существовании подходящего разностного включения вида (1) (сводка основных понятий из теории линейных отношений содержится в разделе 1).

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. *Для того чтобы разностное включение* (1) *имело единственное решение $x \in l_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, для любой последовательности f из l_p, необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(A)$ отношения A обладал свойством*

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \tag{3}$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ — единичная окружность из $\mathbb{C}$.

Получены приложения к разностному уравнению вида (2) и формулы для решений включения (1). Аналог теоремы 1 для замкнутого линейного оператора A получен в работе [3].

1. Некоторые сведения из теории линейных отношений

В этом разделе приводятся используемые в данной статье понятия и результаты из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов); их можно найти в монографиях [4], [5] и в статье [6].

Линейным отношением на комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ назовем любое линейное подпространство $A \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Совокупность всех замкнутых линейных отношений на $\mathcal{X}$ обозначим через $LR(\mathcal{X})$.

Подпространство $D(A) = \{x \in \mathcal{X} : \exists y \in \mathcal{X}$ такой, что $(x, y) \in A\}$ называется *областью определения отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$.

Подпространства $\ker A = \{x \in D(A) : (x, 0) \in A\}$, $\operatorname{Im} A = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$ называются соответственно *ядром* и *образом линейного* (слово "линейное" иногда будет опускаться) *отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$. Отметим, что $Ax = y_0 + A0$ для любого $y_0 \in Ax$, причем $A0 = \{y \in \mathcal{X} : (0, y) \in A\}$ — линейное подпространство в $\mathcal{X}$.

Если $A \in LR(\mathcal{X})$, то *обратное отношение* $A^{-1} \in LR(\mathcal{X})$ определяется равенством

$$A^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : (x, y) \in A\}.$$

Суммой двух отношений $A, B \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида $A + B = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : x \in D(A) \cap D(B), y \in Ax + Bx\}$, где $Ax + Bx$ — алгебраическая сумма двух множеств Ax и Bx. Ясно, что $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$.

Произведением отношений $A, B \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство

$$BA = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \exists y \in D(B) \text{ такой, что } (x, y) \in A,\ (y, z) \in B\}.$$

Каждое отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$, где $D(\widetilde{A}) = D(A)$ и $\widetilde{A}x = Ax$ для всех $x \in D(A)$. В дальнейшем они отождествляются, и для них используется один и тот же символ A. Таким образом, множество $LO(\mathcal{X})$ линейных замкнутых операторов, содержащее банахову алгебру линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, действующих в $\mathcal{X}$, можно считать включенным в $LR(\mathcal{X})$.

Определение 1. Отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ назовем *непрерывно обратимым*, если $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, т. е. $\ker A = \{0\}$ (A инъективно) и $\operatorname{Im} A = \mathcal{X}$ (A сюръективно). *Резольвентным множеством отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Спектром отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Отметим, что резольвентное множество $\rho(A)$ отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ открыто, и, следовательно, спектр $\sigma(A)$ замкнут.

Определение 2. Отображение $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$.

Резольвента отношения A является псевдорезольвентой в общепринятом смысле, причем

$$A0 = \ker R(\lambda_0, A), \quad D(A) = \operatorname{Im} R(\lambda_0, A) \quad \forall \lambda_0 \in \rho(A).$$

Линейное подпространство $\mathcal{X}_0$ из $\mathcal{X}$ называется *инвариантным относительно отношения* $A \in LR(\mathcal{X})$, если $Ax_0 \cap \mathcal{X}_0 \neq \varnothing \quad \forall x_0 \in D(A) \cap \mathcal{X}_0$.

Сужением отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ на инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0$ называется линейное отношение вида $A_0 = A \cap (\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0) \in LR(\mathcal{X}_0)$. Для него будет использоваться обозначение $A|\mathcal{X}_0$.

Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ — прямая сумма двух инвариантных относительно A подпространств и $A_0 = A|\mathcal{X}_0$, $A_1 = A|\mathcal{X}_1$, то будем говорить, что отношение A является *прямой суммой отношений* A_0 и A_1, и использовать запись $A = A_0 \oplus A_1$.

Отметим, что если $\rho(A) \neq \varnothing$ и в разложении $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ подпространства $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ инвариантны относительно всех операторов $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$, то они инвариантны относительно отношения A, и тогда $\sigma(A) = \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1)$, причем $R(\lambda, A_i) = R(\lambda, A)|\mathcal{X}_i$, $i = 0, 1$.

Теорема 2 ([6]). *Пусть спектр $\sigma(A)$ отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ представим в виде $\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0 — компактное множество из $\mathbb{C}$, σ_1 — замкнутое множество и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Тогда существует разложение*

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$$

в прямую сумму двух замкнутых инвариантных относительно A подпространств $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ таких, что сужения $A_i = A|\mathcal{X}_i$, $i = 0, 1$, обладают свойствами

1) $A_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_0)$, $\sigma(A_0) = \sigma_0$;
2) $A_1 0 = A0 = \ker R(\cdot, A_1) \subset \mathcal{X}_1$, $D(A) = \mathcal{X}_0 \times D(A_1)$, $\sigma(A_1) = \sigma_1$;
3) *проектор Рисса $P_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, осуществляющий разложение $\mathcal{X}$ (т. е. $\operatorname{Im} P_0 = \mathcal{X}_0$, $\ker P_0 = \mathcal{X}_1$), определяется формулой*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

где γ — жорданов замкнутый контур (или конечное число таких кривых), лежащий в $\rho(A)$ так, что σ_0 лежит внутри γ, σ_1 — вне его.

Отметим, что для отношения A из теоремы 2 в дальнейшем используется запись $A = A_0 \oplus A_1$, а отношения A_0 и A_1 иногда называются частями отношения A.

Определение 3. Два отношения $A_1, A_2 \in LR(\mathcal{X})$ называются *подобными*, если существует (непрерывно) обратимый оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ такой, что $U(D(A_2)) = D(A_1)$, $A_1 U = U A_2$, что эквивалентно равенству $A_2 = \{(Ux, Uy) : (x, y) \in A_1\}$.

Ясно, что спектры подобных отношений A_1 и A_2 совпадают, $\sigma(A_2) = \sigma(A_1)$.

Определение 4. Линейное отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ называется *перестановочным* с оператором $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, если $(Tx, Ty) \in A$ для любых $(x, y) \in A$.

2. Основные результаты

Построим линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ на пространстве последовательностей $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, используя заданное отношение $A \in LR(X)$ на X. Оно состоит из пар $(x, y) \in l_p \times l_p$ таких, что

$$(x(k-1), y(k)) \in A, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Полученное таким образом отношение $\mathcal{A}$ назовем *отношением взвешенного сдвига.*

В последующих леммах рассматриваются некоторые свойства линейного отношения $\mathcal{A}$.

Лемма 1. *Если A — замкнутое линейное отношение, то отношение $\mathcal{A}$ также замкнуто.*

Доказательство. Пусть (x_n, y_n), $n \geqslant 1$, — сходящаяся к $(x_0, y_0) \in l_p \times l_p$ последовательность из $\mathcal{A} \subset l_p \times l_p$. Тогда согласно (4) имеем

$$(x_n(k-1), y_n(k)) \in A, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

Вследствие замкнутости отношения A, в (5) возможен предельный переход при каждом фиксированном k из $\mathbb{Z}$ и поэтому получаем

$$(x_0(k-1), y_0(k)) \in A, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. $\square$

В пространстве l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, возьмем две группы изометрических представлений $V : \mathbb{T} \to \mathcal{B}(l_p)$, $S : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(l_p)$ вида

$$(V(\gamma)x)(k) = \gamma^k x(k), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p,$$
$$(S(n)x)(k) = x(n+k), \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p.$$

Наряду с отношением $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ далее рассматривается отношение $\mathcal{D} = I - \mathcal{A} \in LR(l_p)$, где символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из банаховых пространств. Отношение $\mathcal{D}$ будет играть важную роль в проводимых исследованиях разностного отношения (1).

Лемма 2. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения взвешенного сдвига $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ инвариантен относительно поворота вокруг нуля в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $1 \notin \sigma(\mathcal{A})$, то $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ и имеют место равенства*

$$V(\gamma^{-1}) R(\lambda, \mathcal{A}) V(\gamma) = \gamma R(\gamma\lambda, \mathcal{A}), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}). \tag{6}$$

Доказательство. Из определения отношения $\mathcal{A}$ и представления V имеем следующую цепочку равносильных переходов:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow &((V(\gamma)x)(k-1), \gamma^{-1}(V(\gamma)y)(k)) \in A, \quad k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (V(\gamma)x, \gamma^{-1}V(\gamma)y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow y \in \gamma(V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma))(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \gamma(V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma)), \quad \gamma \in \mathbb{T},\end{aligned}$$

и, значит, для любого $\gamma \in \mathbb{T}$ справедливо соотношение

$$\gamma^{-1}\mathcal{A} = V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma), \tag{7}$$

причем $V(\gamma)(D(\mathcal{A})) = D(\mathcal{A})$. Таким образом, отношение $\mathcal{A}$ подобно отношениям $\theta\mathcal{A}$, $\theta \in \mathbb{T}$. Следовательно, спектр отношения $\mathcal{A}$ инвариантен относительно поворотов комплексной плоскости вокруг нуля.

Из (7) следуют равенства

$$V(\gamma^{-1})(\lambda I - \mathcal{A})V(\gamma) = \lambda I - V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma) = \lambda I - \gamma^{-1}\mathcal{A} = \gamma^{-1}(\gamma\lambda I - \mathcal{A}),$$

откуда вытекает обратимость отношения $\gamma\lambda I - \mathcal{A}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и, значит, справедливы равенства (6). □

Следствие 1. Если $1 \notin \sigma(\mathcal{A})$ (условие обратимости отношения $\mathcal{D} = I - \mathcal{A}$), то спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \tag{8}$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| > 1\}$ — непересекающиеся замкнутые множества.

В условиях следующей леммы используются операторы из $\mathcal{B}(l_p)$ вида

$$(\overline{V}(\varphi)x)(k) = \varphi(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p,$$

где $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}) = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, а также последовательность функций $\psi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, из l_p вида

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leqslant n; \\ 2 - \frac{|k|}{n}, & n < |k| \leqslant 2n; \\ 0, & |k| > 2n, \end{cases}$$

и соответствующая последовательность операторов $\overline{V}(\psi_n)$, $n \geqslant 1$, из алгебры $\mathcal{B}(l_p)$.

Отметим, что каждый из операторов $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, может быть записан в виде $\overline{V}(\psi_\gamma)$, где $\varphi_\gamma(n) = \gamma^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3 ([3]). *Пусть оператор $B \in \mathcal{B}(l_p)$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и выполнено одно из условий*:

$$1)\ \ 1 \leqslant p < \infty, \quad 2)\ \ p = \infty, \lim_{n\to\infty} \|\overline{V}(\psi_n)B - B\overline{V}(\psi_n)\| = 0.$$

Тогда оператор B является оператором умножения на ограниченную функцию $\widetilde{B} : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(X)$ (т. е. $Bx(n) = \widetilde{B}(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$) и $\|B\| = \|\widetilde{B}\|_\infty$.

Лемма 4. *Резольвента $R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(X)$ отношения взвешенного сдвига $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ обладает свойством*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda \in K} \|\overline{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\overline{V}(\psi_n)\| = 0 \tag{9}$$

для любого компактного множества K из $\rho(\mathcal{A})$.

Доказательство. Для произвольной последовательности $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}) = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ отношение $\mathcal{A}\overline{V}(\varphi) - \overline{V}(\varphi)\mathcal{A}$ совпадает с отношением $\overline{V}(S(-1)\varphi - \varphi)\mathcal{A}$, ибо отношение $\mathcal{A}\overline{V}(\varphi)$ состоит из пар последовательностей $(x, y) \in l_p \times l_p$, связанных соотношением

$$(\varphi(n-1)x(n-1), y(n)) \in A, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а отношение $\overline{V}(\varphi)\mathcal{A}$ состоит из пар $(x, y) \in l_p \times l_p$, для которых $(\varphi(n)x(n-1), y(n)) \in A$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ получаем

$$(\mathcal{A} - \lambda I)\overline{V}(\varphi) - \overline{V}(\varphi)(\mathcal{A} - \lambda I) = \overline{V}(f)\mathcal{A}, \ f = S(-1)\varphi - \varphi.$$

Применяя к обеим частям слева и справа оператор $R(\lambda, \mathcal{A})$, приходим к равенствам

$$\overline{V}(\varphi)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\overline{V}(\varphi) = R(\lambda, \mathcal{A})\overline{V}(f)(I + \lambda R(\lambda, \mathcal{A})), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}). \tag{10}$$

При этом использовалось отмеченное в разделе 1 равенство $\ker R(\lambda, \mathcal{A}) = \mathcal{A}0$. Если $\varphi = \psi_n$, то из (10), учитывая $\|S(-1)\psi_n - \psi_n\|_\infty = 1/n$, получаем предельное соотношение (9). □

Замечание 1. Отношение $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(l_p)$ иногда удобно записывать в виде $\mathcal{A} = \overline{A}S(-1)$, где отношение $\overline{A} \in LR(l_p)$ определяется равенством $\overline{A} = \{(x, y) \in l_p \times l_p : (x(n), y(n)) \in A, n \in \mathbb{Z}\}$.

Теперь приступим к доказательству сформулированной теоремы 1.

Необходимость. Пусть разностное включение (1) имеет единственное решение $x \in l_p$ для любой последовательности $f \in l_p$. Это означает непрерывную обратимость разностного отношения $\mathcal{D} = I - \mathcal{A}$. Из леммы 2 следует, что для отношения $\mathcal{A}$ выполнено условие (3). Тогда множество $\sigma(\mathcal{A})$ представимо в виде (8). По множеству σ_{int} построим проектор Рисса $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(l_p)$ с помощью формулы

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} R(\lambda, \mathcal{A})d\lambda, \tag{11}$$

где интегрирование осуществляется по (ориентированной в положительном направлении) окружности $\mathbb{T}$. Применив к обеим частям равенства (11) слева и справа операторы $V(\gamma^{-1})$ и $V(\gamma), \gamma \in \mathbb{T}$, соответственно, и используя равенства (6), получим

$$V(\gamma^{-1})\mathcal{P}V(\gamma) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} V(\gamma^{-1})R(\lambda, \mathcal{A})V(\gamma)d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \gamma R(\gamma\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} R(\mu, \mathcal{A})d\mu = \mathcal{P}, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Таким образом, верны равенства $\mathcal{P}V(\gamma) = V(\gamma)\mathcal{P}$, $\gamma \in \mathbb{T}$, т. е. оператор $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(l_p)$ перестановочен с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$.

Если $p \in [1, \infty)$, то из леммы 3 следует, что проектор $\mathcal{P}$ представим в виде

$$(\mathcal{P}x)(n) = P(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p, \tag{12}$$

где $P : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(X)$ — ограниченная проекторнозначная функция и $\|\mathcal{P}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|P(n)\|$. Для доказательства представления проектора $\mathcal{P}$ в виде (12) при $p = \infty$ достаточно проверить выполнение условия 2 леммы 3. Его выполнение следует из леммы 4 и формулы (11). А именно, имеют оценки

$$\|\overline{V}(\psi_n)\mathcal{P} - \mathcal{P}\overline{V}(\psi_n)\| = \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\mathbb{T}} (\overline{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\overline{V}(\psi))d\lambda \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{T}} \|\overline{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\overline{V}(\psi_n)\| \to 0, \quad n \to 0.$$

Поскольку $\mathcal{A}S(k) = S(k)\mathcal{A}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathcal{A}$ перестановочно с операторами сдвигов последовательностей из l_p, то $S(k)R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, \mathcal{A})S(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Поэтому из формулы (11) следует, что проектор $\mathcal{P}$ перестановочен со всеми операторами $S(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, и, значит, $P(n + k) = P(n)$ для всех $n, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $P(n) = P(0) = P_{\mathrm{int}} \in \mathcal{B}(X)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, т. е. P не зависит от $n \in \mathbb{Z}$.

Проектор P_{int} осуществляет разложение банахова пространства X в прямую сумму

$$X = X_{\mathrm{int}} \oplus X_{\mathrm{out}}, \quad X_{\mathrm{int}} = \operatorname{Im} P_{\mathrm{int}}, \quad X_{\mathrm{out}} = \ker P_{\mathrm{int}}$$

и тогда $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X) = l_p(\mathbb{Z}, X_{\mathrm{int}}) \oplus l_p(\mathbb{Z}, X_{\mathrm{out}})$, где подпространства $l_p(\mathbb{Z}, X_{\mathrm{int}})$ и $l_p(\mathbb{Z}, X_{\mathrm{out}})$ являются инвариантными относительно отношения $\mathcal{A}$. Из условия перестановочности отношения $\mathcal{A}$ с проектором $\mathcal{P}$ (см. определение 4), представления $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \overline{A}S(-1)$ (см.

замечание 1) и перестановочности $S(-1)$ с проектором $\mathcal{P}$ с учетом теоремы 2 получаем, что имеют место следующие свойства:

1) $l_p(\mathbb{Z}, X_{\text{int}}) \subset D(\mathcal{A})$;
2) $X_{\text{int}} \subset D(A)$ и X_{int}, X_{out} — инвариантные подпространства отношения A;
3) $A_0 = A|X_{\text{int}} \in \mathcal{B}(X)$, $r(A_0) < 1$;
4) $A_1 = A|X_{\text{out}}$ — непрерывно обратимое отношение и $r(A_1^{-1}) < 1$.

Из свойств 2)–4) следует, что если $\lambda \in \mathbb{T}$, то отношение $A - \lambda I$ непрерывно обратимо и обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ представим в виде

$$(A - \lambda I)^{-1}x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0^n x_0}{\lambda^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_1^{-n-1} x_1,$$

где $x_0 = P_{\text{int}}x$, $x_1 = (I - P_{\text{int}})x$.

Следовательно, выполнено условие (3) для отношения $A \in LR(X)$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (3). Тогда спектр $\sigma(A)$ отношения A представим в виде (8). Поэтому, используя теорему 2, получаем, что проектор Рисса $P_0 \in \mathcal{B}(X)$, определенный формулой

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, A) d\lambda,$$

осуществляет разложение пространства X в прямую сумму подпространств

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad X_0 = \operatorname{Im} P_0, \quad X_1 = \ker P_0 = \operatorname{Im}(I - P_0),$$

инвариантных относительно отношения A, причем сужения $A_i = A|X_i$, $i = 0, 1$, обладают свойствами $A_0 \in \mathcal{B}(X_0)$, $0 \in \rho(A_1)$ и $r(A_1^{-1}) < 1$.

Введем оператор $B \in \mathcal{B}(l_p)$ вида

$$(By)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n - m) y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

где функция $G : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(X)$ определена равенством

$$G(k) = \begin{cases} A_0^k P_0, & k \geqslant 0; \\ -A_1^k P_1, & k \leqslant -1, \ P_1 = I - P_0. \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, что отношение $\mathcal{D} = I - \mathcal{A}$ является инъективным. Если $x \in \ker \mathcal{D}$, то $(x(n-1), x(n)) \in A$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, $(x_i(n-1), x_i(n)) \in A_i$, где $x_i \in l_p(\mathbb{Z}, X_i)$, $x_i = P_i x$ для $i = 0, 1$. Поскольку A_0 — оператор из $\mathcal{B}(X_0)$, то $x_0(n) = A_0 x_0(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из равенств $x_0(n) = A_0^m x_0(n-m)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, а также ограниченности последовательности x_0 и оценки $r(A_0) < 1$ следует, что $x_0(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Из включения $(x_1(n-1), x_1(n)) \in A_1$, $n \in \mathbb{Z}$, и непрерывной обратимости A_1 имеем $(x_1(n-1), x_1(n)) \in A_1^{-1}$. Поскольку $A_1^{-1} \in \mathcal{B}(X_1)$, то $A_1^{-1} x_1(n) = x_1(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем $x_1(n) = A_1^{-m} x_1(n+m)$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $r(A_1^{-1}) < 1$ и x_1 — ограниченная последовательность, то $x_1 = 0$. Итак, $x = x_0 + x_1 = 0$, т. е. $\ker \mathcal{D} = \{0\}$.

Докажем, что B является непрерывным обратным для отношения $\mathcal{D}$. Для этого рассмотрим разложение в прямую сумму пространства l_p вида $l_p(\mathbb{Z}, X) = l_p(\mathbb{Z}, X_0) \oplus l_p(\mathbb{Z}, X_1)$, осуществляемое проектором $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(l_p)$ вида $(\mathcal{P}x)(n) = P_0 x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения отношения $\mathcal{A}$, а также ввиду перестановочности отношения A с P_0, получаем, что $\mathcal{A}$ перестановочно с проектором $\mathcal{P}$. Рассмотрим сужения $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ отношения $\mathcal{A}$ на $l_p(\mathbb{Z}, X_0)$ и $l_p(\mathbb{Z}, X_1)$ соответственно. Отношение $\mathcal{A}_0$ согласно теореме 2 является оператором из $\mathcal{B}(X_0)$ и имеет вид $(\mathcal{A}_0 y)(n) = A_0 y(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $y \in l_p(\mathbb{Z}, X_0)$. Отношение $\mathcal{A}_1$ непрерывно обратимо, $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{B}(l_p(\mathbb{Z}, X_1))$, и справедливы равенства

$$(\mathcal{A}_1^{-1} y)(n) = A_1^{-1} y(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y \in l_p(\mathbb{Z}, X_1).$$

Поскольку $r(A) < 1$, $r(A_1^{-1}) < 1$, то оператор $\mathcal{D}_0 = I - \mathcal{A}_0$ и отношение $\mathcal{D}_1 = I - \mathcal{A}_1$ непрерывно обратимы, причем

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_0^n S(-n),$$

$$\mathcal{D}_1^{-1} = -\mathcal{A}_1^{-1}(I - \mathcal{A}_1^{-1})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_1^{-n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_1^{-n-1} S(n).$$

Тогда отношение $\mathcal{D}$ непрерывно обратимо и $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_0^{-1} \oplus \mathcal{D}_1^{-1}$. Оператор $\mathcal{D}_0^{-1} \oplus \{0\}$ можно записать в виде

$$(B_0 x)(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A_0^k P_0 x(k-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p(\mathbb{Z}, X), \tag{15}$$

а оператор $B_1 = \{0\} \oplus \mathcal{D}_1^{-1}$ представим формулой

$$(B_1 x)(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A_1^{-k-1} P_1 x(k+n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p(\mathbb{Z}, X). \tag{16}$$

Поскольку $\mathcal{D}^{-1} = B_0 + B_1$, то из формул (15) и (16) следует, что оператор $\mathcal{D}^{-1} \in \mathcal{B}(l_p)$ представим формулой (13). $\square$

Непосредственно из доказательства теоремы 1 следует (см. формулу (13))

Теорема 3. *Если для отношения* $A \in LR(X)$ *выполнено условие* (3), *то любое решение разностного включения* (1) *представимо формулой*

$$x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n-m) f(m), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где G *— функция из* (14).

Теперь вернемся к изучению разностного уравнения (2) с линейными операторами B и C, принадлежащими банахову пространству $\mathcal{B}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в банаховом пространстве Y. Для формулировки условий разрешимости уравнения (2) введем несколько понятий [6], [7].

Определение 5. Комплексное число λ отнесем к резольвентному множеству $\rho(B, C)$ упорядоченной пары (B, C) из $\mathcal{B}(X, Y)$, если оператор $B - \lambda C$ (непрерывно) обратим. Множество $\sigma(B, C) = \mathbb{C} \setminus \rho(B, C)$ называется *спектром пары* (B, C).

При изучении спектральных свойств упорядоченной пары (B, C) из $\mathcal{B}(X, Y)$ важную роль играют два линейных отношения $\mathcal{A}_l = B^{-1}C \in LR(X)$, $\mathcal{A}_r = CB^{-1} \in LR(Y)$, где $\mathcal{A}_l$ называется *левым*, а $\mathcal{A}_r$ — *правым* линейными отношениями, построенными по паре (B, C). При этом B^{-1} — линейное отношение между пространствами Y и X [4], [6].

Рассмотрим два оператора $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{B}(l_p)$ вида $(\mathcal{B}x)(n) = Bx(n)$, $(\mathcal{C}x)(n) = Cx(n-1)$. Тогда задача о разрешимости уравнения (2) для любой последовательности $g \in l_p$ и единственности решения эквивалентна обратимости оператора $\mathcal{B} - \mathcal{C} \in \mathcal{B}(l_p)$, и, как нетрудно видеть, условию $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Из ([6], теорема 6.1) следует, что $\sigma(\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1}) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\mathcal{B},\mathcal{C})\cap\mathbb{T}=\varnothing$. Осталось только заметить, что $\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{A}$. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 4. *Для того чтобы разностное уравнение* (2) *имело единственное решение* $x\in l_p$ *для любой последовательности* $g\in l_p$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma(B,C)\cap\mathbb{T}=\varnothing$.

Литература

[1] Бичегкуев М.С. *Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения* // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79. – № 4. – С. 483–487.

[2] Бичегкуев М.С. *Интегральные операторы, порожденные оператором взвешенного сдвига* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 3. – С. 452–454.

[3] Баскаков А.Г., Пастухов А.И. *Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т.42. – № 6. – С. 1231–1243.

[4] Cross R. *Multivalued linear operators.* – New York: M. Dekker, 1998. – 335 p.

[5] Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* – New York: M. Dekker, 1998. – 313 p.

[6] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов* // Матем. сб. – 2002. – Т.193. – № 11. – С. 3–42.

[7] Gochberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. *Classes of linear operators.* V. I. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990. – 468 p.

М.С. Бичегкуев

доцент, кафедра функционального анализа и дифференциальных уравнений,
Северо-Осетинский государственный университет,
362025, Республика Северная Осетия-Алания, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 46,

e-mail: bichegkuev@yandex.ru

M.S. Bichegkuev

Associate Professor, Chair of Functional Analysis and Differential Equations,
North-Osetiya State University,
46 Vatutin str., Vladikavkaz, Republic of North Osetiya-Alaniya, 362025 Russia,

e-mail: bichegkuev@yandex.ru