Р. Л. Добрушин, Гиббсовские случайные поля. Общий случай, *Функц. анализ и его прил.*, 1969, том 3, выпуск 1, 27–35

Функциональный анализ и его приложения,
т. 3. вып. 1, 1969, 27—35.

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Р. Л. Добрушин

1. В наших работах [1], [2] была развита теория гиббсовских случайных полей, описывающих состояние физической системы в бесконечном сосуде, и обсуждена ее связь с проблемой фазовых переходов. При этом мы ограничились простейшим случаем решетчатых систем частиц одного типа с попарным взаимодействием. В этой работе показывается, как результаты работ [1], [2] могут быть распространены на случай систем из частиц нескольких типов, систем с многочастичным взаимодействием, непрерывных систем частиц с твердой сердцевиной. Мы рассматриваем лишь каждое из этих трех обобщений по отдельности, так как их совместное введение не требует дополнительных построений и связано лишь с усложнением обозначений. Мы считаем известным ниже содержание работ [1], [2].

2. Рассмотрим сначала систему с k типами частиц. Здесь $X=\{0, 1, \ldots, k\}$, заданы функции $U_{xy}(t), t \in T^{\nu}$, $x=1, \ldots, k, y=1, \ldots, k$, и μ_x, $x=1, \ldots, k$, задающие соответственно потенциалы взаимодействия и химические потенциалы, причем $U_{xy}(t)=U_{yx}(t)=U_{xy}(-t)$, $t \in T^{\nu}$, $x=1, \ldots, k$, $y=1, \ldots, k$, и

$$\sum_{x \in X, y \in Y} \sum_{|t|>d} |U_{xy}(t)| < \infty . \tag{2.1}$$

При этом (ср. (2.7) в [1])

$$U_V(x_1, \ldots, x_{|V|}/x(t)) = -\sum_{i=1, \ldots, |V|; x_i>0} \mu_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1, x_i>0, x_j>0, i \neq j}^{|V|} U_{x_i x_j}(t_i - t_j) + \sum_{i=1, t \in T^{\nu} \setminus V, x_i>0, x(t)>0}^{|V|} \sum U_{x_i, x(t)}(t_i - t). \tag{2.2}$$

Обобщение на этот случай всех формулировок и результатов работы [1] и разделов 1—3 работы [2] представляется очевидным.

Приведем здесь упоминавшейся в разделе 4 работы [1] пример системы, в которой разные гиббсовские распределения с теми же параметрами имеют разные средние энергию и энтропию. Этот пример интересен также как пример системы, в которой производная свободной энергии (см. (4.3) в [1]) $\partial f / \partial \beta$ не существует (имеет скачок) при некоторых значениях параметра, что означает, что одному и тому же значению температуры соответствует целый отрезок значений энергии. Отметим, что обратная ситуация, когда одному и тому же значению энергии соответствует целый отрезок значений температур (т. е. когда энергия (см. (4.10) в [1]) $-\frac{\partial}{\partial \beta}(\beta f)$ постоянна на целом отрезке значений β), невозможна. Это легко доказать методом, развитым в разделе 2 работы [3], оценивая снизу дисперсию энергии системы. Принятое в разделе 2 работы [3] предположение о финитности потенциала может быть снято, если использовать результаты, полученные в [4]. Пусть $k=2$,

$$U_{12}(t)=U_{11}(t)=U_{22}(t)=\begin{cases} a<0 & \text{при } |t|=1, \\ 0 & \text{при } |t|\neq 1, \end{cases} \qquad \mu_1=\mu_2=\mu, \tag{2.3}$$

и пусть (считаем для простоты, что $\nu=2$)

$$\beta(\mu-2a)=-\ln 2. \tag{2.4}$$

Введем функцию $\varphi(x)$ так, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\varphi(2)=1$ (наглядно, $\varphi(x)$ переводит частицы первого и второго типов в частицы одного типа). Тогда (ср. (4.4) в [2])

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_{|V|}):\ \varphi(x_1)=\hat{x}_1,\ldots,\varphi(x_{|V|})=\hat{x}_{|V|}} q_V(x_1,\ldots,x_{|V|}/x(t))=$$

$$=\frac{2^{\sum_{i=1}^{|V|}\hat{x}_i}\exp\left\{\beta(\mu-2a)\sum_{i=1}^{|V|}\hat{x}_i+\frac{\beta a}{2}\Gamma(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{|V|}/\varphi(x(t)))\right\}}{\sum_{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{|V|}=0,1} 2^{\sum_{i=1}^{|V|}\hat{x}_i}\exp\left\{\beta(\mu-2a)\sum_{i=1}^{|V|}\hat{x}_i+\frac{\beta a}{2}\Gamma(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{|V|}/\varphi(x(t)))\right\}}, \tag{2.5}$$

где граница определена так же, как и в разделе 4 работы [2], и при условии (2.4) выражение (2.5) совпадает с (4.4) в [2]. Все расположения $(x_1,\ldots,x_{|V|})$, дающие одно и то же расположение $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{|V|})$, равновероятны. Поэтому если $\hat{\xi}(t), t\in T^\nu$, — гиббсовское поле для модели Изинга с притяжением, рассмотренной в [2], то поле $\xi(t)$ такое, что $\varphi(\xi(t))=\hat{\xi}(t)$ и что условные вероятности

$$P\{\xi(t_1)=x_1,\ldots,\xi(t_{|V|})=x_{|V|}/\hat{\xi}(t_1)=1,\ldots,\hat{\xi}(t_{|V|})=1;\ \xi(t)=x(t), t\notin V\}=\frac{1}{2^{|V|}},$$

$$x_1=1,2,\ldots,x_{|V|}=1,2, \tag{2.6}$$

является гиббсовским для модели, рассматриваемой здесь. Если $\beta>-a^{-1}s_\nu$ (см. (4.2) в [2]), то существуют два разных гиббсовских поля, которые можно считать трансляционно-инвариантными, так что для каждого из них существует средняя энтропия $S(P)$ (см. (4.2) в [1]). Если $\beta\to\infty$, то средняя энтропия одного из этих полей стремится к средней энтропии поля $\xi(t)\equiv 0$, равной 0, а другого — к средней энтропии поля, в котором $\xi(t)=1$ и $\xi(t)=2$ с вероятностями 1/2, равной $\ln 2$. Поэтому при достаточно большом β эти энтропии оказываются разными. Из теоремы 3 в [1] следует теперь, что для этих двух полей оказываются разными и средние энергии $E(P)$, а также что производная $\partial f/\partial\beta$ не существует.

3. Другое возможное обобщение связано с отказом от предположения о попарном характере взаимодействия. Кроме того, предположим, во избежание тривиальных осложнений, что потенциал всегда конечен.

Пусть каждой точке $t\in T^\nu$ и конечному или счетному подмножеству $S\subset T^\nu$, $t\notin S$, сопоставлено конечное число $U(t,S)$, интерпретируемое как потенциальная энергия взаимодействия частицы в положении t с совокупностью частиц, занимающих положения S. В частном случае попарного взаимодействия надо положить

$$U(t,S)=\frac{1}{2}\sum_{s\in S}U(s-t). \tag{3.1}$$

Другим важным частным случаем является случай, рассмотренный недавно в работе Галлавоти и Миракль-Соля [5], где предполагается, что каждому конечному $V \subset T^{\nu}$ с числом элементов $|V| \geqslant 2$ сопоставлено число $\Phi(V)$ и

$$U(t, S) = \sum_{V, t \in V, |V| \geqslant 2, V \subset S} \frac{1}{|V|} \Phi(V), \tag{3.2}$$

где ряд (3.2) сходится для любого $S \subset T^{\nu}$. Предположим, что $U(t, \Lambda) = 0$, где Λ — пустое множество, и что потенциал трансляционно-инвариантен, так что при любом $s \in T^{\nu}$

$$U(t + s, S + s) = U(t, S). \tag{3.3}$$

В случае (3.2) это означает, что $\Phi(V) = \Phi(V + s)$ при всех $V \subset T^{\nu}$.

Условие (2.6) из [1] заменим следующим предположением: существует четная функция $\varphi(u) \geqslant 0$, $u \in T^{\nu} \setminus \{0\}$, такая, что

$$\overline{D} = \sum_{u \in T^{\nu}, u \neq 0} \varphi(u) < \infty \tag{3.4}$$

и что при любых $t \in T^{\nu}$, $R \subset T^{\nu}$, $S \subset T^{\nu}$, где $R \cap S$ пусто,

$$|U(t, S) - U(t, S \cup R)| \leqslant \sum_{s \in R} \varphi(t - s). \tag{3.5}$$

Это условие следует, например, из введенного в [5] для потенциала (3.2) условия

$$\sum_{V: t \in V, |V| \geqslant 2} |\Phi(V)| < \infty. \tag{3.6}$$

Пусть $V = \{t_1, \ldots, t_{|V|}\} \subset T^{\nu}$, $x(t), t \in T^{\nu} \setminus V$, и x_i имеют значения 0 и 1. Пусть $R_{x(t)}$ — совокупность $t \in T^{\nu} \setminus V$ таких, что $x(t) = 1$, и $R_{x_1, \ldots, x_{|V|}}$ — совокупность t_i таких, что $x_i = 1$. Положим (ср. (2.7) в [1])

$$U_V(x_1, \ldots, x_{|V|}/x(t)) = -\mu \sum_{i=1}^{|V|} x_i + \sum_{i:\, x_i = 1} V(t_i, R_{x(t)} \cup R_{x_1, \ldots, x_{|V|}} \setminus \{t_i\}) +$$
$$+ \sum_{u \in R_{x(t)}} [V(u, R_{x(t)} \cup R_{x_1, \ldots, x_{|V|}} \setminus \{u\}) - V(u, R_{x(t)} \setminus \{u\})]. \tag{3.7}$$

Из (3.5) следует, что это выражение конечно, так как оно не превосходит

$$|\mu| \sum_{i=1}^{|V|} x_i + \sum_{i=1}^{|V|} x_i \sum_{u \in R_{x(t)} \cup R_{x_1, \ldots, x_{|V|}} \setminus \{t_i\}} \varphi(u - t_i) + \sum_{i=1}^{|V|} x_i \sum_{u \in R_{x(t)}} \varphi(u - t_i) < \infty. \tag{3.8}$$

Естественность определения (3.7) видна из того, что если при этом принять определение (2.8) из [1], то будет верно условие согласованности (2.9) из [1].

Чтобы перенести на этот случай основные результаты, нужно ввести еще одно дополнительное условие. Предположим, что существует функция $\psi(z, d)$, $z \in T^{\nu} \setminus \{0\}$, $0 < d < \infty$, d — целое число, такая, что она монотонно не возрастает по аргументу d и

$$\lim_{d \to \infty} \sum_{z \in T^{\nu} \setminus \{0\}} \psi(z, d) = 0 \tag{3.9}$$

и что при любых $t \in T^\nu$, $s \in T^\nu$, $t \neq s$, $S \subset T^\nu \setminus \{t\} \setminus \{s\}$, $R \subset T^\nu \setminus \{t\} \setminus \{s\} \setminus S$

$$|U(t,S) - U(t, S \cup \{s\}) - U(t, S \cup R) + U(t, S \cup R \cup \{s\})| \leqslant \psi(t-s, d(s,R)), \tag{3.10}$$

где $d(s,R)$ — расстояние от множества R до точки s. Условие (3.10) всегда выполнено в случае попарного взаимодействия, так как тогда левая часть в (3.10) равна нулю. В случае потенциала (3.2) левая часть в (3.10) равна $\left|\sum |V|^{-1}\Phi(V)\right|$, где суммирование ведется по всем $V \subset S \cup R$ таким, что $t \in V$, $s \in V$ и пересечение $R \cap V$ не пусто. Отсюда ясно, что диаметр $d(V)$ множества V, дающего вклад в эту сумму, не меньше $d(s,R)$. Суммируя левые части (3.10) по s, получим величину, оцениваемую сверху суммой значений $|V|^{-1}|\Phi(V)|$, в которой каждое V, содержащее t, входит не более $|V|-1$ раз, так что в этом случае при любом целом d

$$\sum_{s \in T^\nu, s \neq t, s \notin R, d(s,R) \geqslant d} |U(t,S) - U(t, S \cup \{s\}) - U(t, S \cup R) + U(t, S \cup R \cup \{s\})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{V:\, t \in V, |V| \geqslant 2, d(V) \geqslant d} \frac{|V|-1}{|V|} |\Phi(V)|, \tag{3.11}$$

и поэтому условие (3.10) оказывается следствием условия (3.6). Укажем еще одно удобное условие на потенциал: существует четная по каждому переменному функция $\chi(z,y)$, $z \in T^\nu \setminus \{0\}$, $y \in T^\nu \setminus \{0\}$, такая, что

$$\sum_{y \in T^\nu \setminus \{0\}, z \in T^\nu \setminus \{0\}} \chi(z,y) < \infty \tag{3.12}$$

и что при всех $t \neq s \neq w$, $S \subset T^\nu \setminus (\{t\} \cup \{s\} \cup \{w\})$

$$|U(t,S) - U(t, S \cup \{s\}) - U(t, S \cup \{w\}) + U(t, S \cup \{s\} \cup \{w\})| \leqslant \chi(t-s, s-w). \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что если множество R конечно, то

$$|U(t,S) - U(t, S \cup \{s\}) - U(t, S \cup R) + U(t, S \cup \{s\} \cup R)| \leqslant \sum_{w \in R} \chi(t-s, s-w), \tag{3.14}$$

а из (3.5), что это неравенство верно и для бесконечных R. Таким образом, из (3.13) и (3.5) следует условие (3.10). Из (3.5) следует, что левая часть в (3.13) не превосходит $2\min(\varphi(t-w), \varphi(t-s))$. Поэтому для выполнения (3.13), а следовательно, и (3.10) достаточно, чтобы функция $\varphi(u)$ монотонно убывала в зависимости от $|u|$ и чтобы

$$\sum_{u \neq 0, u \in T^\nu} \varphi(u)|u|^\nu < \infty, \tag{3.15}$$

так как из (3.15) следует, что

$$\sum_{s,w\; s \neq t,\, w \neq s} \min(\varphi(t-w), \varphi(t-s)) < \infty. \tag{3.16}$$

Заметим теперь, что если верно (3.10), то для любого множества

$W=\{w_1,\ldots,w_{|W|}\}\subset T^{\nu}\setminus\{t\}\setminus S\setminus R,$ где $S\cap R$ пусто,

$$|U(t,S)-U(t,S\cup W)-U(t,S\cup R)+U(t,S\cup R\cup W)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{|W|}|U(t,S\cup\{w_1,\ldots,w_{i-1}\})-U(t,S\cup R\cup\{w_1,\ldots,w_{i-1}\})-U(t,S\cup$$
$$\cup\{w_1,\ldots,w_i\})+U(t,S\cup R\cup\{w_1,\ldots,w_i\})|\leqslant\sum_{i=1}^{|W|}\psi(t-w_i,d(w_i,R)).\quad(3.17)$$

Теперь из (3.17), (3.5) и определения (3.7) видно, что если $x(t)=\overline{x}(t)$ при $d(t,V)\leqslant\overline{d}$, то при $V=\{t_1,\ldots,t_{|V|}\},\overline{R}=\{t:d(t,V)>\overline{d}\}$

$$|U_V(x_1,\ldots,x_{|V|}/x(t))-U_V(x_1,\ldots,x_{|V|}/\overline{x}(t))|\leqslant$$
$$\leqslant4\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{t\in\overline{R}}\varphi(t_i-t)+2\sum_{u\in T^{\nu}\setminus\overline{R}\setminus V}\sum_{i=1}^{|V|}\psi(u-t_i,d(t_i,\overline{R}))\to0\quad(\overline{d}\to\infty).\quad(3.18)$$

Просмотр доказательств и формулировок теорем 1—6 из [1] показывает теперь, что все они основаны лишь на том, что левая часть в (3.18) стремится кт 0 при $\overline{d}\to\infty$, и поэтому все они переносятся на случай потенциалов, для которых выполнены условия (3.5) и (3.10). Укажем лишь на следующие уточнения формулировок: последнее из предположений (3.9) в [1] надо заменить на предположение

$$\sup_{S\subset T^{\nu}}|U_n(t,S)-U(t,S)|\to0,\qquad n\to\infty,\quad(3.19)$$

совмещенное с предположением о том, что неравенства (3.5), (3.10) выполнены для всех $U_n(t,S)$, а функции $\varphi(u),\psi(z,d)$ не зависят от n. Определение средней энергии (4.1) в [1] надо заменить на формулу

$$E_l(P)=\sum_{x_1\in X,\ldots,x_{|H_l|}\in X}p_{H_l}(x_1,\ldots,x_{|H_l|})\left[-\mu\sum_{i=1}^{|H_l|}x_i+\sum_{i=1}^{|H_l|}x_iU(t_i,R_{x_1,\ldots,x_{H_l}})\right],\quad(3.20)$$

где $H_l=\{t_1,\ldots,t_{|H_l|}\}$, а $R_{x_1,\ldots,x_{|H_l|}}$ — совокупность $t_i\in H_l$ таких, что $x_i=1$. Оценка, аналогичная (4.6) в [1], следует из условия (3.5) (ср. оценку (3.8)).

Что касается условия единственности гиббсовского распределения, даваемого теоремой 1 из [2], то для того чтобы условие (2.1) из [2] выполнялось при $|\mu|\geqslant\mu_0$ или $\beta\leqslant\beta_0$, надо предположить, что выполнены условия (3.5) и (3.13) (заменить здесь (3.13) на более слабое условие (3.10) нельзя). В соответствии с этим для потенциала вида (3.2) приходится считать выполненным условие

$$\sum_{V.\ t\in V,|V|\geqslant2}|V||\Phi(V)|<\infty,\quad(3.21)$$

более сильное, чем условие (3.6). Отметим в связи с этим, что результат, близкий по содержанию к теореме 1 из [2], доказан при условии (3.6) для случая достаточно больших отрицательных μ Галлавоти и Миракль-Солем [5] на основе некоторой модификации метода Руэлла [6]. Этот результат был затем перенесен на случай больших положительных μ и малых β в работе Галлавоти, Миракль-Соля и Робинсона [7], где совместно использованы метод работы [5] и соображения, опубликованные в разделе 6 работы [1].

Для выполнения при всех (β, μ) условия (3.1) теоремы 2 из [2] о единственности в одномерном случае достаточно, как нетрудно показать (ср. (3.4), (3.5) в [2]), чтобы

$$\sup_{n=0,1,\ldots,x(t),\,\widetilde{x}(t):\,x(t)=\widetilde{x}(t),-k<t<0,n<t,x_1\in X,\ldots,x_{n+1}\in X} \sup |U_{[0,n]}(x_1, \ldots, x_{n+1}/x(t)) - U_{[0,n]}(x_1, \ldots, x_{n+1}/\widetilde{x}(t))| \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{3.22}$$

Из оценки (3.18) видно, что для этого достаточно, чтобы

$$\sum_{u \in T^1 \setminus \{0\}} |u|\,\varphi(u) < \infty, \tag{3.23}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{d \geqslant k} \sum_{z=1}^{d} \psi(z, d) = 0. \tag{3.24}$$

В случае (3.13) условие (3.24) можно заменить условием вида

$$\sum_{y \in T^1 \setminus \{0\}} \sum_{z \in T^1 \setminus \{0\}} |y|\,\chi(z, y) < \infty, \tag{3.25}$$

и (ср. (3.15)) для выполнения условий (3.23), (3.24) достаточно также одно условие: функция $\varphi(u)$ монотонно убывает в зависимости от $|u|$ и

$$\sum_{u \in T^1 \setminus \{0\}} |u|^2 \varphi(u) < \infty. \tag{3.26}$$

Наконец, в случае потенциала вида (3.2) достаточно, чтобы

$$\sum_{V.\ t \in V, |V| \geqslant 2} l(V)\,|\Phi(V)| < \infty, \tag{3.27}$$

где $l(V)$ — диаметр множества V.

4. Все результаты работы [1] и разделов 1—3 работы [2] легко распространяются и на непрерывный случай, когда положение частицы $t \in R^\nu$, где R^ν — ν-мерное евклидово пространство. Мы предположим для простоты, что потенциал попарного взаимодействия — измеримая четная функция $U(x)$ такая, что при некоторых $d > 0$, $D < \infty$, $0 < K < \infty$

$$U(x) = \infty,\ |x| \leqslant d; \quad U(x)| \geqslant -K > -\infty,\ x \in R^\nu; \quad U(x) < \infty,\ |x| > d;$$
$$|U(x)| \leqslant \varphi(|x|),\ |x| > D, \tag{4.1}$$

где $\varphi(x)$ — монотонно убывающая функция такая, что $\int_{\{|x|>D\}} \varphi(|x|)dx < \infty$.

Предположение о том, что $U(x) = \infty, |x| \leqslant d$ существенно. Замена этого предположения обычно вводимым предположением о том, что $U(x) \to \infty$ при $|x| \to 0$ и при том достаточно быстро (см., например, [8]), по-видимому, возможна, но требует усложнения рассуждений.

Точные определения укажем лишь кратко, так как они аналогичны введенным в [1], [2]. Пусть для ограниченного измеримого $V \subset R^\nu$ через $\mathfrak{G}_V$ обозначена совокупность всех конечных подмножеств множества V с естественной σ-алгеброй $\mathfrak{B}_V$ измеримых подмножеств множества $\mathfrak{G}_V$. Пусть $\mathfrak{G}$ — совокупность подмножеств G множества R^ν таких, что при $G \in \mathfrak{G}$ пересечения $G \cap V$ конечны для всех ограниченных V, и пусть $\mathfrak{B}$ — это σ-алгебра измеримых подмножеств совокупности $\mathfrak{G}$, порождаемая σ-алгебрами $\mathfrak{B}_V$. *Распределением* случайного поля будем называть вероятностную меру на пространстве $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$. *Распределением Гиббса* в сосуде V *с граничными условиями* $\overline{G}$, где $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}_V$ и где $\overline{\mathfrak{G}}_V$ — совокупность $\overline{G} \in \mathfrak{G}$ таких, что $\overline{G} \cap V$ пусто и что $|x-y| > d$, $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$, $x \neq y$, назовем распределение вероятностей на $\mathfrak{G}_V$, заданное плотностью вероятностей вида

$$q_V(G/\overline{G}) = \frac{\exp\{-\beta U_V(G/\overline{G})\}}{\int\limits_{\mathfrak{G}_V} \exp\{-\beta U_V(G/\overline{G})\} dG}, \qquad \overline{G} \in \mathfrak{G}_V, \tag{4.2}$$

где

$$U_V(G/\overline{G}) = -\mu |G| + \frac{1}{2} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, x \neq y} U(x-y) + \sum_{x \in G} \sum_{y \in \overline{G}} U(x-y), \tag{4.3}$$

относительно естественным образом определяемой меры Лебега на $\mathfrak{B}_V$ (см., например, [3], раздел 2.1). Остальные определения даются вполне аналогично определениям для решетчатых систем, данным в [1]. Особо оговорим лишь определение расстояния в пространстве распределений (ср. (3.2) в [1]). Если два распределения $P_V(dG)$ и $\widetilde{P}_V(dG)$ на $(\mathfrak{G}_V, \mathfrak{B}_V)$ заданы плотностями вероятностей $p_V(G), \widetilde{p}_V(G)$, $G \in \mathfrak{G}_V$, соответственно, то положим

$$\rho(P_V, \widetilde{P}_V) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathfrak{G}_V} |p_V(G) - \widetilde{p}_V(G)| \, dG. \tag{4.4}$$

Пусть $P(dG)$ и $\widetilde{P}(dG)$ — распределения на $\mathfrak{G}$ такие, что распределения $P_V(dG)$, $\widetilde{P}_V(dG)$, получающиеся как проекция на $\mathfrak{G}_V$ распределений $P(dG)$, $\widetilde{P}(dG)$, т. е. распределения величины $\widetilde{G} = G \cap V$, задаются плотностями при любом ограниченном V. Положим (ср. (3.2) в [1])

$$\rho(P, \widetilde{P}) = \max_{H_l} \frac{1}{l} \rho(P_{H_l}, \widetilde{P}_{H_l}), \tag{4.5}$$

где H_l — последовательность всех ν-мерных кубов с вершинами в рациональных точках, занумерованных произвольным образом. Заметим, что все гиббсовские распределения P таковы, что P_V задаются плотностями для всех V.

Единственная трудность, связанная с переносом основных результатов на непрерывный случай, состоит в том, что совокупность распределений вероятностей с расстоянием вида (4.5) небикомпактна, так как небикомпактна совокупность всех распределений с метрикой расстояния по вариации (4.4) на любом бесконечном множестве. Здесь на помощь приходит следующая

Лемма. *Для любого ограниченного измеримого $V \subset R^\nu$ и любого потенциала, для которого верно* (4.1), *совокупность всех распределений Гиббса в сосуде V со всевозможными граничными условиями $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}_V$ образует компактное в смысле метрики* (4.4) *множество.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что для любой интегрируемой функции $f(x)$, $x \in R^\nu$,

$$\lim_{|t| \to 0} \int\limits_{R^\nu} |f(x) - f(x+t)| \, dx = 0. \tag{4.6}$$

Это соотношение очевидно для равномерно непрерывной функции $f(x)$ и легко выводится для любой функции $f(x)$ из возможности аппроксимировать ее в смысле L^1 равномерно непрерывными функциями. Пусть $S_{\delta, D}$ — совокупность всех $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}_V$ таких, что максимальное расстояние $\sup\limits_{x \in G, y \in V} |x-y| \leqslant D$ и все точки $x \in \overline{G}$ имеют все ν координат кратными δ. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ совокупность распределений вероятностей $q_V(\cdot/\overline{G})$, $\overline{G} \in S_{\delta,D}$, образует ε-сеть в совокупности всех распределений $q_V(\cdot/\overline{G})$, $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}_V$, если только $D < \infty$ достаточно велико, а $\delta > 0$ достаточно мало.

Чтобы вывести этот факт, отметим, во-первых, что для любых целых чисел $0 < a_i < c$, $0 < \bar{a}_i < c$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\left|\prod_{i=1}^{k} \bar{a}_i - \prod_{i=1}^{k} a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left|\prod_{i=1}^{j-1} a_i \prod_{i=j}^{k} \bar{a}_i - \prod_{i=1}^{j} a_i \prod_{i=j+1}^{k} \bar{a}_i\right| \leqslant c^{k-1} \sum_{j=1}^{k} |a_i - \bar{a}_i|. \quad (4.7)$$

Отметим далее, что из условий (4.1) следует существование константы $K_V > 0$ такой, что $U_V(G/\widetilde{G}) \geqslant -K_V$ при всех $G \in \mathfrak{G}_V$, $\widetilde{G} \in \overline{\mathfrak{G}}_V$. Обозначим через M максимальное число точек в множестве $G \in \mathfrak{G}_V$ при условии $|x-y| > d$, $x \in G$, $y \in G$, $x \neq y$, и, используя (4.7), (4.3) и (4.1), находим, что если $\overline{G}_1 = \widetilde{G} \cup \{\bar{x}_1\}$, $\overline{G}_2 = \widetilde{G} \cup \{\bar{x}_2\}$, $\overline{G}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_V$, $\overline{G}_2 \in \overline{\mathfrak{G}}_V$, то

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_V} |\exp\{-\beta U_V(G/\overline{G}_1)\} - \exp\{-\beta U_V(G/\overline{G}_2)\}|\, dG =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} \overbrace{\int\limits_V \ldots \int\limits_V}^{k \text{ раз}} \exp\{-\beta U_V(\{x_1, \ldots, x_k\}/\widetilde{G})\} \left|\exp\left\{-\beta \sum_{i=1}^{k} U(x_i - \bar{x}_1)\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\beta \sum_{i=1}^{k} U(x_i - \bar{x}_2)\right\}\right| dx_1 \ldots dx_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{M} \frac{e^{\beta K(k-1) + \beta K_V}}{(k-1)!} \int\limits_V \ldots \int\limits_V |e^{-\beta U(x_1 - \bar{x}_1)} - e^{-\beta U(x_1 - \bar{x}_2)}|\, dx_1 \ldots dx_k \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{M} \frac{|V|^{k-1} e^{\beta K(k-1) + \beta K_V}}{(k-1)!}\right) \int\limits_V |e^{-\beta U(x - \bar{x}_1)} - e^{-\beta U(x - \bar{x}_2)}|\, dx. \quad (4.8)$$

Применяя оценку (4.6) к функции $f(x) = e^{-\beta U(x)} - 1$, интегрируемой в силу условий (4.1), находим, что левая часть в (4.8) стремится к 0 при $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \to 0$ равномерно по выбору $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и $\widetilde{G}$. В силу определения (4.2) равномерно стремится к 0 и $\int\limits_{\mathfrak{G}_V} |q_V(G/\overline{G}_1) - q_V(G/\overline{G}_2)| dG$. Поэтому если $\hat{G}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_V$ получается из $\hat{G}_2$ достаточно малым изменением всех координат, то $q_V(\cdot/\hat{G}_1)$ близко к $q_V(\cdot/\hat{G}_2)$ в смысле метрики (4.4). Возможность отбросить из $\overline{G}$ точки $x \in \overline{G}$ с $|x| > D$, лишь мало меняя $q_V(\cdot/\overline{G})$, легко следует из (4.1), и отсюда видно, что $S_{\delta,D}$ образует ε-сеть. Отсюда и следует сразу утверждение леммы.

Из леммы легко следует бикомпактность выпуклой оболочки $\mathfrak{A}_V$ совокупности всех распределений Гиббса в сосуде V. Отсюда в свою очередь следует, что если $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ и сумма $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = R^\nu$ и если распределение $P_n \in \mathfrak{A}_V$, то последовательность P_n компактна в смысле метрики (4.5). Просмотр доказательств в [1], [2] показывает, что этот факт заменяет отсутствующую бикомпактность пространства всех распределений. После этого замечания остается лишь заменить во всех формулах суммы на интегралы. Отметим особо лишь то, что последнее условие теоремы 2 в [1] надо формулировать так: существуют монотонно убывающие функции $\psi_n(a)$ такие, что

$$|U_n(t) - U(t)| \leqslant \psi_n(|t|), \qquad \int\limits_{R^\nu} \psi_n(|t|)\,dt \to 0 \ (n \to \infty). \tag{4.9}$$

Оценка (4.6) из [1] остается неизменной, если $|U(t)| \leqslant C < \infty$, $|t| > d$. В общем случае надо дополнительно воспользоваться тем легко вытекающим из (4.1) фактом, что если $\bar{t} \in \bar{G}$, $\bar{G} \in \mathfrak{G}_{H_t}$, $t \in H_t$, то индуцируемая распределением вероятностей $q_{H_t}(\cdot/\bar{G})$ плотность вероятности того, что в точке t находится частица, не превосходит $ce^{-\beta U(t-\bar{t})}$, где c не зависит от H_t.

В теоремах 1 и 2 из [2] мы использовали результаты работы [4], относящиеся к полям с дискретным аргументом. Однако рассматриваемую сейчас ситуацию можно свести к случаю дискретного поля следующим приемом. Пусть S_t — куб со стороной 1 с центром $t \in T^\nu$. Введем поле $\xi(t), t \in T^\nu$, со значениями в пространстве $(\mathfrak{G}_{S_t}, \mathfrak{B}_{S_t})$ (не зависящем от $t \in T^\nu$) и строящееся по распределению $P(dG)$, $G \in \mathfrak{G}$, так, чтобы $\xi(t) = G \cap S_t$. Применение к такому полю теорем работы [4] и дает теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 из [2].

В дополнение к приводившимся ранее ссылкам укажем работу [9], где результат, близкий по содержанию к результатам теоремы 2 из [2], получен для случая финитного потенциала. Отметим, что для непрерывного случая неизвестны примеры, в которых была бы доказана неединственность гиббсовского распределения.

Институт проблем передачи
информации АН СССР

Поступила в редакцию
23 февраля 1968 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Добрушин Р. Л., Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ **2**, вып. 4 (1968), 31—43.
2. Добрушин Р. Л., Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функц. анализ **2**, вып. 4 (1968), 44—57.
3. Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., Существование и непрерывность давления в классической статистической физике, Теория вероятн. и ее примен. **12**, вып. 4 (1967), 3—26.
4. Добрушин Р. Л., Задание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, Теория вероятн. и ее примен. **13**, вып. 1 (1968), 595—618.
5. Gallavoti G., Miracle-Soll S., Correlation functions of a lattice system (препринт), 1967.
6. Ruelle D., Correlation functions of classical gases, Ann. Phys. (N. Y.) **25** (1963), 109—120.
7. Gallavoti G., Miracle-Soll S., Robinson W., Analicity properties of a lattice gas (препринт), 1967.
8. Добрушин Р. Л., Исследование условий асимптотического существования конфигурационного интеграла распределения Гиббса, Теория вероятн. и ее примен. **9**, вып. 4 (1964), 626—643.
9. Van Hove L., Configuration integral for one-dimensional system of particles, Physica **16** (1950), 137—143.