P. I. Lizorkin, Behavior at infinity of functions from Liouville classes. Riesz potentials of arbitrary order,
*Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1979, Volume 150, 174–197

*Труды Математического института АН СССР*
1979, том 150

П. И. ЛИЗОРКИН

# ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. О РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

## ВВЕДЕНИЕ

В первом параграфе работы дается нестандартное освещение некоторых результатов (сравнительно недавнего происхождения) из теории пространств Соболева $w_p^r(R^n) \equiv w_p^r$ с полунормой

$$|f, w_p^r(R^n)| = \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha f \|_{L_p(R^n)}.$$

Эти «модельные результаты» обобщаются в статье на случай нецелых индексов дифференцирования. Самостоятельный интерес представляет, по-видимому, трактовка риссовых потенциалов.

Рассматриваемые «лиувиллевские классы» $l_p^r(R^n) \equiv l_p^r$, $0 < r < \infty$, $1 < p < \infty$, состоят из функций $f$, обобщенные лиувиллевские производные [1] порядка $r$ которых принадлежат $L_p(R^n) \equiv L_p$. Функциональное пополнение $C_0^\infty$ (бесконечно дифференцируемых финитных в $R^n$ функций) в $l_p^r$ обозначается через $\mathring{l}_p^r$ и называется пространством риссовых потенциалов порядка $r$ функций из $L_p$. Название оправдывается тем, что при $r - n/p < 0$ функция $f \in \mathring{l}_p^r$ представима (единственным образом) в виде

$$f(x) = \int_{R^n} \frac{g(y)\,dy}{|x-y|^{n-r}}, \qquad g \in L_p, \tag{$*$}$$

и наоборот. Более того, вне указанной традиционной области изменения $r$ (т. е. при $r - n/p \geqslant 0$) представление ($*$) сохраняет смысл (но должно истолковываться специальным образом, см. начало § 2). Риссовы потенциалы обладают единообразными оценками: из $f \in \mathring{l}_p^r$ следует суммируемость $f$ в степени $p$ и весом $(1 + |x|)^{-pr}$ по $R^n$ при всех $r - n/p \neq 0, 1, \ldots$ Эти результаты и оценки изложены в § 2.

Ясно, что $\mathring{l}_p^r \subset l_p^r$. В § 3 дается характеризация пространства $\mathring{l}_p^r$ как подпространства $l_p^r$. Доказывается, что критерием принадлежности функции $f$ к $\mathring{l}_p^r$ (при $r - n/p \neq 0, 1, \ldots$) является конечность интеграла

$$\int_{R^n} \frac{|f(x)|^p}{(1+|x|)^{pr}}\,dx. \tag{1}$$

В § 4 устанавливается, что $\mathring{l}_p^r$ в существенном «исчерпывает» $l_p^r$. Это означает, что:

1) $$l_p^r = \mathring{l}_p^r \qquad \left(\text{при } r - \frac{n}{p} \geqslant [r]^-\right) \tag{2}$$

(где $[r]^-$ — наибольшее целое, меньше $r$);

2) $\mathring{l}_p^r$ исчерпывает $l_p^r$ с точностью до конечномерного пространства полиномов (при $r - n/p < [r]^-$). В пункте 2) целесообразно различать два случая:

2а) $0 \leqslant r - n/p < [r]^-$ (промежуточный случай),

2б) $r - n/p < 0$ (случай «выхода на полином»).

В случае 2б) любая функция $f \in l_p^r$ единственным образом представляется в виде

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{|\alpha| \leqslant [r]^-} C_\alpha x^\alpha, \tag{3}$$

где $f_0(x) \in \mathring{l}_p^r$ и «обращается в нуль» на $\infty$ (и, следовательно, $f(x)$ «выходит на полином» при $x \to \infty$). Если обозначить через $\mathcal{P}$ совокупность многочленов степени не выше $[r]^-$, то соотношение (3) означает разложение $l_p^r$ в прямую сумму

$$l_p^r = \mathring{l}_p^r \dotplus \mathcal{P}, \qquad r - \frac{n}{p} < 0.$$

В промежуточном случае 2б) положение аналогично. Вместо разложения (3) имеет место разложение:

$$f \in l_p^r \Leftrightarrow f(x) = f_0(x) + \sum_{\left[r - \frac{n}{p}\right] < \alpha \leqslant [r]^-} C_\alpha x^\alpha, \qquad f_0 \in \mathring{l}_p^r.$$

На этот раз $f_0(x)$ может содержать полиномы вида $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant \left[r - \frac{n}{p}\right]} C_\alpha x^\alpha$ и другие растущие функции.

В заключительном § 4 даются дополнительные замечания и формулируются нерешенные вопросы.

Некоторые обозначения: $|f, X| = \| f \|_X$ — норма элемента $f$ в нормированном пространстве $X$; знак $\ll$ заменяет иногда знак неравенства (с точностью до константы); $Ff$ $(F^{-1}f)$ — прямое (обратное) преобразование Фурье функции $f$[1].

## § 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Рассмотрим евклидово пространство $n$ измерений $R^n$ и пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка $R^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Линейное пространство функций $f(x)$, имеющих обобщенные (по Соболеву) производные порядка $r$, суммируемые по $R^n$ в степени $p \leqslant 1$, обозначим через $w_p^r(R^n) = w_p^r$. Это пространство можно нормировать различными способами, нормировку в нем целесообразно выбирать в соответствии с обстоятельствами. Позже мы зафиксируем в $w_p^r$ некоторую норму. Известно, что функции $f \in w_p^r$ имеют

[1] Пояснение других обозначений дано в тексте и в конце статьи.

обобщенные производные

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \qquad 0 \leqslant |k| = k_1 + \cdots + k_n < r,$$

суммируемые в степени $p$ локально: $D^k f \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(R^n)$.

Однако эти производные и, в частности, сама функция $f$ не обязаны принадлежать $L_p(R^n)$ и могут быть растущими на бесконечности. Ясно, например, что функция $f$ может быть полиномом степени $r - 1$. Имеются ли в $w_p^r$ растущие функции, отличные от полиномов? Если имеются, то каким образом характеризовать их рост? Ответ на эти вопросы дается следующими теоремами. Введем в рассмотрение выражение

$$|f, w_p^r| = \sum_{|k|=r} \| D^k f \|_p.$$

Оно является полунормой в $w_p^r$, ядро $\mathcal{P}$ (множество элементов, на которых полунорма аннулируется) которой состоит из многочленов степени не выше $r - 1$.

Т е о р е м а I. *Если $r - n/p < 0$, $1 < p < \infty$, то в $w_p^r$ нет других растущих функций, кроме полиномов порядка $r - 1$. Это означает, что для каждой функции $f \in w_p^r$ найдется единственный полином $P_f(x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant l-1} C_\alpha x^\alpha$ такой, что разность*

$$f(x) - P_f(x)$$

*стремится к нулю почти по всем направлениям $x/|x|$ при $|x| \to \infty$ и при этом*

$$\int\limits_{R^n} \frac{|f(x) - P_f(x)|^p}{(1 + x^2)^{pr/2}}\, dx \leqslant C\, |f - P_f, w_p^r|^p,$$

*где постоянная $C > 0$ не зависит от $f$.*

Теорема I именуется «теоремой о выходе на многочлен». Неравенство (4) дает количественную оценку стремления $f$ к многочлену $P_f$ на $\infty$.

Пусть число $r - n/p$ неотрицательно, обозначим через $[r - n/p]$ его целую часть. Имеем

$$0 \leqslant \left[ r - \frac{n}{p} \right] \leqslant r - 1,$$

причем $[r - n/p] = r - 1$ при $n \leqslant p$.

Обозначим через $L_p(R^n, \omega)$ пространство суммируемых в степени $p \geqslant 1$ и с весом $\omega$ функций $f$ с нормой

$$|f, L_p(R^n, \omega)| = \left\{ \int\limits_{R^n} |f\omega|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Положим

$$\omega_r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 + |x|^2)^{r/2}} & \text{при } r - \dfrac{n}{p} \text{ нецелом} \\[2ex] \dfrac{1}{(1 + |x|^2)^{r/2} \ln(e + |x|^2)} & \text{при } r - \dfrac{n}{p} = 0, 1, \ldots, r - 1. \end{cases}$$

Будем употреблять также сокращенные обозначения:

$L_p(R^n, \omega_r) = L_{p,r}$, при нецелом $r - n/p$;

$L_p(R^n, \omega_r) = L_{p,r,1}$ при $r - n/p = 0, 1, \ldots, r-1$.

Теорема II. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r - n/p \geqslant 0$, $[r - n/p] = k$, $f \in w_p^r$. *Тогда найдется единственный многочлен вида*

$$P_f(x) = \sum_{k < |\alpha| \leqslant l-1} C_\alpha x^\alpha \tag{5}$$

*такой, что*

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - P_f(x)|^p}{(1 + |x|^2)^{pr/2}} dx < \infty \quad \text{\textit{при нецелом}}\ r - \frac{n}{p}, \tag{6}$$

$$|f(x) - P_f(x);\ L_{p,r,1}| < \infty \quad \text{\textit{при целом}}\ r - \frac{n}{p}. \tag{7}$$

Грубо говоря, оценка (6) означает, что разность $f - P_f$ может иметь рост порядка $|x|^{r-n/p}$ на $\infty$ и что сама функция $f$ может превышать указанный рост только благодаря наличию полиномиального слагаемого $P_f$. Аналогично истолковывается оценка (7). Таким образом, в условиях теоремы II в $w_p^r$ есть растущие на $\infty$ функции, отличные от полиномов и этот допустимый рост (неполиномиального характера) характеризуется конечностью величины $|f, L_{p,r}|$ (при нецелом $r - n/p$) или $|f, L_{p,r,1}|$ (при целом $r - n/p$).

Указанные оценки (4), (6) оптимальны в том смысле, что при любом $\varepsilon > 0$ можно указать функцию $f_0 \in w_p^r$, для которой $P_{f_0} \equiv 0$ и $|f_0, L_{p,r-\varepsilon}| = \infty$. Аналогично в оценке (7) наличие логарифмического множителя существенно — без него уже многочлен степени $k$ не удовлетворяет этой оценке; более того, ослабление степени логарифма на $\varepsilon$ недопустимо. Таким образом, оценки (6), (7) дают адекватную характеристику допустимого роста рассматриваемых функций.

Отметим, что при $p \geqslant n$ множество полиномов вида (5) пусто и функция $f$ подчиняется оценкам (6) или (7), не будучи подправленной на полином. Целесообразно различать случай $r - n/p \geqslant 0$, $p < n$ и случай $r - n/p \geqslant 0$, $p \geqslant n$. В первом из них (мы именуем его в дальнейшем «промежуточным») естественно говорить о «выходе функции $f$ на остаточный полином».

Конечно, теоремы I и II можно было объединить в единой формулировке, если вместо оценки (4) высказывать лишь утверждение о конечности величины $|f - P_f, L_{p,r}|$. Однако написанная оценка (4) содержательнее. Желательно и соотношения (6), (7) переписать в виде оценки. Мы нарочито обошлись их приведенной записью, чтобы не вводить раньше времени величин, без которых качественная картина и так проясняется достаточно полно. Мы придадим количественную форму соотношениям (6), (7), освещая факты с другой стороны.

Известно, что на $C_0^\infty$ (финитных, бесконечно дифференцируемых в $R^n$) функциях величина $|\cdot, w_p^r|$ является нормой. Поэтому можно рассматривать пополнение $C_0^\infty$ по этой норме. Будем наряду со сходимостью последовательности $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty$ по норме $|\cdot, w_p^r|$ требовать ее сходимость по мере на каждом компакте $R^n$. Такое «функциональное пополнение» по норме $|\cdot, w_p^r|$ обозначим через $\mathring{w}_p^r$.

Л е м м а 1. *Если* $1 < p < \infty$, $r - n/p < 0$, *то* $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ *нормированное пространство с нормой*

$$\| u \|_{\overset{\circ}{w}{}_p^r} = | u, w_p^r |, \qquad u \in \overset{\circ}{w}{}_p^r$$

*и имеет место оценка*

$$\int\limits_{R^n} \frac{| u(x) |^p}{(1 + | x |^2)^{pr/2}} \, dx \leqslant C \, | u, w_p^r |. \tag{8}$$

Из этой оценки следует, что функция $u \in \overset{\circ}{w}{}_p^r$ «зануляется» на $\infty$ ($pr < n$) и поэтому $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ не содержит полиномов (при $r - n/p < 0$). Более того, оценка (8) дает количественную оценку «зануления». Однако при $r - n/p \geqslant 0$ в пространство $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ попадают и полиномы степени $\leqslant r - n/p$. Поэтому величина $| \cdot, w_p^r |$ оказывается (в этом случае) всего лишь полунормой в $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ и встает вопрос о привнесении в $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ нормы, не уменьшающей объем ($\equiv$ запас элементов) пространства. Такой нормой может служить, очевидно, выражение

$$\| u \|_{L_p(Q)} + | u, w_p^r |, \tag{9}$$

где $Q$ — единичный шар (с центром в начале координат) пространства $R^n$. Пространство $\overset{\circ}{w}{}_p^r$, снабженное нормой (9), обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^r$ (ясно, что выражение (9) может служить нормой и при $r - n/p < 0$). *Можно непосредственно воспринимать* $\overset{\circ}{W}{}_p^r$ *как замыкание* $C_0^\infty$ *функций по норме* $\| f \|_{L_p(Q)} + | f, w_p^r |$.

З а м е ч а н и е 1. В дальнейшем мы нередко не различаем пространства $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^r$. По составу элементов они совпадают, но одно из них — линейное пространство, другое — нормированное. Понятие функционального пополнения $C_0^\infty$ в $w_p^r$, приведшее к $\overset{\circ}{w}{}_p^r$, эквивалентно понятию обычного пополнения $C_0^\infty$ по норме (9). Мы часто аппелируем к этому факту.

Т е о р е м а III. *Если* $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^r$, $1 < p < \infty$, *то*

$$| u, L_{p,r} | \leqslant C \, | u, \overset{\circ}{W}{}_p^r | \quad \textit{при } r - \frac{n}{p} \neq 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

(*причем при* $r - n/p < 0$ *справедлива более точная оценка* (8))

$$| u, L_{p,r,1} | \leqslant C \, | u, \overset{\circ}{W}{}_p^r | \textit{ при } r - n/p = 0, 1, \ldots, r - 1, \tag{11}$$

*где постоянная* $C > 0$ *не зависит от* $f$[1].

Легко построить примеры, показывающие оптимальность оценок (10), (11) в смысле, который уже пояснялся (например,

$$u = (1 + | x |^2)^{1/2(r - n/p)} \ln (e + | x |^2)^{1/p' - \varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0$$

в случае (11)).

Обратимся теперь к рассмотрению «незануленных» пространств. Линейное пространство $w_p^r$ превратим в нормированное пространство $W_p^r$, взяв в качестве нормы выражение

$$| f, W_p^r | = \| f \|_{L_p(Q)} + | f, w_p^r |.$$

Тогда утверждения теорем I и II можно пересказать следующим образом:

[1] Оценки (10), (11) являются упомянутым уточнением соотношений (6), (7), $u = f - P$.

1. Пространство $W_p^r$, $r - n/p < 0$, является прямой суммой пространства $\overset{\circ}{w}{}_p^r$ и конечномерного пространства $\mathcal{P}$ полиномов степени не выше $r-1$, т. е. из $f \in W_p^r$ следует, что

$$f = u + P_f, \quad u \in \overset{\circ}{w}{}_p^r, \quad P_f = \sum_{|\alpha| \leqslant r-1} C_\alpha x^\alpha \in \mathcal{P}.$$

Из «зануления» $u$ на $\infty$ (лемма 1) следует выход $f \in W_p^r$ на многочлен $P_f$ при $|x| \to \infty$.

2. При $r - n/p \geqslant 0$, $p \geqslant n$ пространство $W_p^r$ совпадает с $\overset{\circ}{W}{}_p^r$ (или, что то же самое, $w_p^r = \overset{\circ}{w}{}_p^r$).

В промежуточном случае $k = [r - n/p] \geqslant 0$, $p < n$, также имеет место разложение в прямую сумму, т. е.

$$f \in W_p^r \Leftrightarrow f = u + \sum_{k < |\alpha| \leqslant r-1} C_\alpha x^\alpha, \qquad u \in \overset{\circ}{w}{}_p^r.$$

Перечисленные результаты изложены в книге [2], где имеются ссылки на первоисточники (С. Л. Соболев, С. В. Успенский, Л. Д. Кудрявцев, Т. С. Пиголкина и др.).

З а м е ч а н и е 2. Из сказанного явствует, что носителем существенных свойств пространства $w_p^r$ является его подпространство $\overset{\circ}{w}{}_p^r$. С каким-то правом можно заявить, что элементы (т. е. многочлены), «отсеянные» при переходе от $w_p^r$ к $\overset{\circ}{w}{}_p^r$, «случайно» попали в состав $u_p^r$. Это обстоятельство особенно ярко проявляется в теории дробных пространств при их определении с помощью разностей (порядок разности не влияет на существенные свойства функций, но заставляет включать в состав пространства лишние полиномы).

Перейдем к определению пространства $l_p^r(R^n)$ [1]. Его можно определить как совокупность локально суммируемых в $R^n$ функций $f(x)$, обладающих обобщенными лиувиллевскими производными порядка $r$ [1]

$$D^s f = \frac{\partial^{|s|} f}{\partial x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n}}, \qquad |s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = r,$$

суммируемыми в степени $p$, $1 \leqslant p < \infty$, по $R^n$. Для последующих доказательств удобнее исходить из другого, эквивалентного определения, основанного на рассмотрении полунормы Стрихартца [3] (см. также [4, 5]).

О п р е д е л е н и е 1. *Пространством* $l_p^r(R^n) = l_p^r$, $r \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$, *назовем совокупность локально суммируемых в* $R^n$ *функций* $f(x)$, *обладающих локально суммируемыми в* $R^n$ *производными (по Соболеву)* $D^s f$ *порядка* $|s| = [r]$:

а) *суммируемыми в степени* $p$ *по* $R^n$ *при целом* $r$;

б) *с конечным интегралом* $\| S_\alpha (D^s f) \|_p^p$, *где*

$$S_\alpha(D^s f) = \left\{ \int_0^\infty \Big( \int_{|x-y|<t} |D^s f(x) - D^s f(y)| \, dy \Big)^2 \frac{dt}{t^{2(n+\alpha)+1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

*при нецелом* $r = [r] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

---

[1] В обозначениях мы следуем установившейся традиции, по которой полунормированное пространство, соответствующее пространствам Соболева $\mathcal{W}_p^r$, Бесова $B_{p,\theta}^r$, пространству $L_p^r$ с лиувиллевскими производными, обозначается той же буквой алфавита, но с уменьшением размера:

$$\mathcal{W}_p^r = w_p^r \cap L_p, \ B_{p,\theta}^r = b_{p,\theta}^r \cap L_p, \ L_p^r = l_p^r \cap L_p.$$

Выражение

а′) $$|f, l_p^r| = \sum_{|s|=r} \| D^s f \|_p \quad \text{при целом } r,$$

б′) $$|f, l_p^r| = \sum_{|s|=[r]} \| S_\alpha (D^s f) \|_p \quad \text{при нецелом } r$$

является полунормой в $l_p^r$ с ядром $\mathcal{P}$, состоящим из многочленов степени не выше $[r]^-$ (где $[r]^-$ — наибольшее целое, меньшее $r$).

Мы видим, что при целом $r$ пространства $l_p^r(R^n)$ и $w_p^r(R^n)$ совпадают (в частности, $l_p^0(R^n) = w_p^0(R^n) = L_p(R^n)$). По аналогии со случаем целого $r$ будем рассматривать при произвольном $r \geqslant 0$ пространства: $\mathring{l}_p^r$, $\mathring{\mathscr{L}}_p^r$, $\mathscr{L}_p^r$.

Пространство $\mathring{l}_p^r$ есть функциональное пополнение $C_0^\infty$ — функций по норме $|f, l_p^r|$. Для бесконечно дифференцируемых финитных функций эта норма имеет удобное эквивалентное выражение в образах Фурье ($Fu = \tilde{u}$, $F^{-1} v = \hat{v}$)

$$|u, l_p^r| \sim \| \widehat{|\xi|^r \tilde{u}(\xi)} \|_{L_p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{12}$$

при $r - n/p < 0$ равносильно представлению $u$ в виде потенциала Рисса

$$u(x) = C_{n,r} \int\limits_{R^n} \frac{g(y)\,dy}{|x-y|^{n-r}}, \quad g(x) = \widehat{|\xi|^r \tilde{u}(\xi)} \in L_p(R^n). \tag{13}$$

Как известно, потенциал Рисса допускает оценку [6, 7]

$$|u, L_{p,r}| \leqslant C \| g \|_{L_p} \qquad (\| g \|_{L_p} \leqslant C |u, l_p^r|). \tag{14}$$

С учетом сказанного приходим к заключению, что при $r - n/p < 0$ пространство $\mathring{l}_p^r$ есть банахово пространство с нормой $|u, l_p^r|$ ($|u, l_p^r| = 0 \Rightarrow u = 0$).

При $r - n/p \geqslant 0$ величина $|f, l_p^r|$ оказывается полунормой в $\mathring{l}_p^r$ (легко проверяется, например, что функция $u(x) = 1$ содержится в $\mathring{l}_p^r$). Пространство $\mathring{l}_p^r$, снабженное нормой

$$\| u \|_{L_p(Q)} + |u, l_p^r|, \tag{15}$$

обозначается через $\mathring{\mathscr{L}}_p^r$ (при $r - n/p < 0$ норма (15) эквивалентна $|u, l_p^r|$). Привнесение нормы (15) в пространство $l_p^r$ дает (по определению) пространство $\mathscr{L}_p^r$.

Замечание 3. По поводу взаимосоотношений между пространствами $\mathring{l}_p^r$ и $\mathring{\mathscr{L}}_p^r$ можно повторить сказанное в замечании 1. Говоря в дальнейшем о функциональном пополнении $C_0^\infty$ в $l_p^r$, мы часто будем иметь в виду обычное пополнение по норме (15) (что равносильно).

## § 2. РИССОВЫ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИХ ОЦЕНКИ

Как явствует из определений, по составу элементов пространства $\mathring{l}_p$ и $\mathring{\mathscr{L}}_p^r$ совпадают. Одно из них рассматривается как линейное пространство (с полунормой), другое — как банахово пространство с нормой

$$|u, \mathring{\mathscr{L}}_p^r| = \| u \|_{L_p(Q)} + |u, l_p^r|.$$

Согласно сказанному, при $r - n/p < 0$ эта норма эквивалентна величине $|u, l_p^r|$, $u$ представляется в виде потенциала (13) и справедлива оценка (14).

Вопрос о представимости $u(x) \in \mathring{l}_p^r$ интегралом типа потенциала при $r - n/p \geqslant 0$ не так прост. Все же он решается положительно (в некотором смысле). Пусть $u_m(x)$ — последовательность $C_0^\infty$ функций, порождающая элементы $u(x) \in \mathring{l}_p^r$ (при функциональном пополнении). Построим функцию

$$g_m(x) = \widehat{|\xi|^r \tilde{u}_m(\xi)}, \quad r > 0.$$

Можно показать, что (при $r \neq n + 2k$, $k = 0,1,\ldots$)

$$u_m(x) = C_{n,r} \int_{R^n} \frac{g_m(y)\,dy}{|x-y|^{n-r}} \tag{16}$$

и что последовательность $g_m$ сходится по норме $L_p$ к некоторой функции $g$. Следовательно, вместо обычного представления интегралом типа потенциала имеем

$$u(x) = \lim_{m\to\infty} C_{n,r} \int_{R^n} \frac{g_m(y)\,dy}{|x-y|^{n-r}}, \tag{17}$$

где предел понимается в смысле сходимости по мере на любом компакте и по полунорме $|\cdot, l_p^r|$ (поскольку $|u_m, l_p^r| \sim \| g_m \|_p$). Конечно, предельный переход под знаком интеграла недопустим — интеграл от предельной функции $g$, вообще говоря, не существует. Более того, предел (17) зависит не только от $g$, различные последовательности будут порождать, в общем случае, различные пределы (17) (при этом имеются в виду такие последовательности, что

$$\{F^{-1} |\xi|^{-r} (Fg_m)(\xi)\} \subset C_0^\infty,$$

и, конечно, $g_m \to g$ по норме $L_p$). Возникающий здесь произвол можно охарактеризовать так: $g$ определяет $u$ с точностью до многочлена вида $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} C_\alpha x^\alpha$, $k = [r - n/p]$ ($u$ определяется полностью пределом (17) лишь при указании приближающей последовательности).

Мы не останавливаемся на обосновании перечисленных утверждений, поскольку в контексте данной статьи они приведены для оправдания терминологии: *функции из пространства* $\mathring{l}_p^r$ *мы именуем риссовыми потенциалами.* Заметим, что алгоритм построения функции $g_m$, связанной с функцией $u_m \in C_0^\infty$ соотношением (16), исследован в работе автора [4] (см. также [7]). Операция свертки с ядром

$$R_r(x) = F^{-1} |\xi|^r, \quad -\infty < r < \infty,$$

изучалась в работе автора [5] в рамках пространства $\Phi'$ обобщенных функций (над некоторым пространством пробных функций $\Phi$). В предыдущем абзаце разговор, по сути дела, шел об обращении операции $R_r : \mathring{l}_p^r \to L_p$

$$R_r * u \equiv F^{-1} |\xi|^r Fu = g(x), \quad r > 0.$$

Описанная ситуация означает, что оператор $R_r$ переводит класс функций $f(x) + \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} C_\alpha x^\alpha$ из $\mathring{l}_p^r$ в единственный элемент $g \in L_p$. Следовательно, пространство $\mathring{l}_p^r$ само распадается в прямую сумму конечномерного пространства полиномов вида $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} C_\alpha x^\alpha$ и дополнительного подпространства $l_p^r$, изоморфного $L_p$. Нелишне отметить, что это пространство $\overset{\#}{l}{}_p^r$ «рафинированных потенциалов» можно описать как функциональное пополнение в $l_p^r$ упомянутого выше пространства пробных функций Ф. (Напомним, что функциональное пополнение в $l_p^r$ совпадает с обычным пополнением по норме $\mathscr{L}_p^r$.)

Перейдем к оценкам риссовых потенциалов. Случай целых $r$ считаем известным (теорема III) и опираемся на него. Поэтому основная работа производится при $0 < r < 1$, что позволяет обойтись простейшими интегральными представлениями. Пусть $Q_a$ — шар радиуса $a$ с центром в начале координат, $Q_1 = Q$. Объем единичного шара обозначим $|Q| = 1/q$. Положим

$$f^a(x) = \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|y| \leqslant a|x|} f(y)\, dy.$$

Таким образом, $f^a(x)$ — среднее значение $f$ по шару $Q_{a/x}$.

Лемма 1 (подготовительная). *Пусть* $f \in l_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$|f - f^a, L_{p,\alpha}| \leqslant C |f, l_p^\alpha|, \tag{18}$$

*где постоянная $C$ не зависит от $f$.*

Доказательство. Напишем очевидное равенство

$$f(x) = \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|y|<a|x|} f(y)\, dy + \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|y|<a|x|} f(x) - f(y)\, dy = f^a(x) + J. \tag{19}$$

Второе слагаемое оценим следующим образом:

$$|J| \leqslant \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\, dy, \quad t \geqslant (1+a)|x|.$$

Интегрируя по $dt/t$ в пределах от $A = (1+a)|x|$ до $B = (1+a)e|x$ и применяя неравенство Шварца, получим

$$J| \leqslant \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_A^B \frac{dt}{t} \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{(a|x|)^n} \left\{ \int\limits_A^B \Bigl( \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\, dy \Bigr)^2 \frac{dt}{t^{2(n+\alpha)+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \Bigl( \int\limits_A^B t^{2n+2\alpha-1}\, dt \Bigr)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cq(1+a)^{n+\alpha}}{a^n} |x|^\alpha \left\{ \int\limits_0^\infty \Bigl( \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\, dy \Bigr)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} = c(\alpha)|x|^\alpha (S_a f). \tag{20}$$

Из равенства (19) и неравенства (20) легко получаем оценку (18), причем $C = c(a)$. Лемма 1 доказана.

В дальнейшем нам будет полезно следующее обобщение неравенства Харди [8] (именуемое неравенством Сысоевой — Таленти).

Теорема IV. *Пусть* $k(x)$ — *положительная измеримая функция, определенная в промежутке* $(0,1)$ $(0 < 1 \leqslant +\infty)$ *и пусть* $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)\, dt \right|^p \frac{dx}{k(x)} \leqslant \lambda^*(p) \int\limits_0^l |f(x)|^p \frac{dx}{k(x)}, \tag{21}$$

*где*

$$\lambda^*(p) = \Bigl( p \sup_{0<x<l} x^{p-1} k(x) \int\limits_x^l \frac{dt}{t^p k(x)} \Bigr)^p.$$

Нижеследующую теорему формулируем для функций из $\mathring{l}_p^\alpha$, хотя впоследствии увидим, что часть ее утверждения сохраняется и в более общих рамках пространства $l_p^\alpha$. Через $S$ будем обозначать единичную сферу в $R_n$, пусть $s$ — «площадь» поверхности $S$, $s = n\,|\,Q\,| = n/q$.

Теорема 1. *Пусть* $u \in \mathring{l}_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

1. $u \in L_{p,\alpha} \equiv L_p(R^n, \omega)$, $\omega = (1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$, *если* $\alpha p \neq n$.

2. $u \in L_p(R^n, \omega)$, $\omega = (1 + |x|^2)^{-(\alpha+\varepsilon)/2}$, *если* $\alpha p = n$ (*при любом* $\varepsilon > 0$).

*При этом имеет место оценка*

$$|\,u,\ L_p(R^n,\ \omega)\,| \leqslant c\,|\,u,\ \mathring{\mathscr{L}}_p^\alpha\,|, \tag{22}$$

*где постоянная* $c > 0$ *не зависит от* $u$ (*при* $p\alpha < n$ *имеет место оценка через полунорму* $|\,u,\ \mathring{l}_p^r\,|$).

Доказательство достаточно провести для $\varphi \in C_0^\infty$. Действуя как и выше, получим неравенство

$$|\,\varphi(x)\,| \leqslant \frac{q}{(a\,|\,x\,|)^n}\left|\int\limits_{|y|<a|x|}\varphi(y)\,dy\right| + C(a)\,|\,x\,|^\alpha(S_\alpha\varphi)(x). \tag{23}$$

Положим $\gamma = \alpha$ при $\alpha p \neq n$, $\gamma = \alpha + \varepsilon$ при $\alpha p = n$ и возьмем $L_{p,\gamma}$-норму от обеих частей неравенства (23). Получим

$$|\,\varphi,\ L_{p,\gamma}\,| \leqslant |\,\varphi^a,\ L_{p,\gamma}\,| + C(a)\ |\,\varphi,\ l_p^r\,|. \tag{24}$$

Положим $|\,\varphi^a,\ L_{p,\gamma}\,| = A$, тогда

$$A^p \leqslant \int\limits_{R^n}\frac{dx}{(1+|\,x\,|^2)^{p\gamma/2}}\left(\frac{q}{(a\,|\,x\,|)^n}\int\limits_{|y|<a|x|}|\,\varphi(y)\,|\,dy\right)^p =$$

$$= \frac{q^p s}{a^{np}}\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^2)^{p\gamma/2}}\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\,\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{a\rho}r^{n-1}dr\int\limits_S|\,\varphi(r\sigma)\,|\,d\sigma\right)^p =$$

$$= q^p s\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho\left[t^{n-1}\int\limits_S|\,\varphi(at\sigma)\,|\,d\sigma\right]dt\right)^p\frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^2)^{p\gamma/2}\rho^{(n-1)p}}.$$

Мы преобразовали выражение к виду, удобному для применения неравенства (21). Отметим, что точку $y$ в сферических координатах $(r, \sigma)$, $0 < r < \infty$, $\sigma \in S$, мы записываем иногда в виде $r\sigma$. Применение неравенства (21) и затем неравенства Гёльдера дает

$$A^p \leqslant q^p s\lambda^*(p)\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_S|\,\varphi(at,\ \sigma)\,|\,d\sigma\right]^p\frac{v^{n-1}\,dv}{(1+v^2)^{p\gamma/2}} \leqslant$$

$$\leqslant q^p s^p\lambda^*(p)\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_S|\,\varphi(at,\ \sigma)\,|^p\,d\sigma\right)\frac{v^{n-1}dv}{(1+v^2)^{p\gamma/2}} = \lambda^*(p)\,n^p a^{p\gamma-n}\int\limits_{R^n}\frac{|\,\varphi(y)\,|^p dy}{(a^2+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}}.$$

Положим $\lambda^*(p)\,n^p = C$ и произведем очевидные из текста преобразования

$$A^p \leqslant ca^{p\gamma-n}\int\limits_{R^n}\frac{|\,\varphi(y)\,|^p dy}{(a^2+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}} = ca^{p\gamma-n}\int\limits_{|y|<1}\frac{|\,\varphi(y)\,|^p dy}{(a^2+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}} +$$

$$+ ca^{p\gamma-n}\int\limits_{|y|\geqslant 1}\frac{|\,\varphi(y)\,|^p}{(1+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}}\,\frac{(1+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}}{(a^2+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}}\,dy \leqslant ca^{-n}\int\limits_{|y|<1}|\,\varphi(y)\,|^p\,dy +$$

$$+ 2ca^{p\gamma-n}\int\limits_{|y|\geqslant 1}\frac{|\,\varphi(y)\,|^p}{(1+|\,y\,|^2)^{p\gamma/2}}\,dy.$$

При последнем переходе мы воспользовались тем, что

$$\frac{(1+|y|^2)}{(a^2+|y|^2)} < \frac{1+|y|^2}{|y|^2} \leqslant 2 \quad \text{при } |y| \geqslant 1.$$

Итак, окончательно имеем (пользуясь финитностью $\varphi$)

$$A \leqslant C\,(a^{-n/p}\,\|\varphi\|_{L_p(Q)} + a^{\gamma-n/p}\,|\varphi, L_{p,\gamma}|). \tag{25}$$

Если $\alpha p \geqslant n$, то выберем $a$ из условия $Ca^{\gamma-n/p} < 1$, если же $\alpha p < n$ — то опять из условия $Ca^{\gamma-n/p} < 1$ (это наверняка возможно в первом случае при $a < 1$, во втором — при $a > 1$). После этого неравенства (24) и (25) в совокупности порождают оценку (22). Теорема доказана (утверждение в скобках следует из оценок интегралов типа потенциала).

Теперь мы в состоянии доказать общую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $r > 0$, $1 < p < \infty$, $u \in \mathring{l}_p^r$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{R^n} \frac{|u(x)|^p\,dx}{(1+|x|^2)^{\rho p/2}} \leqslant c\left(\int\limits_Q |u(x)|^p\,dx + |u, l_p^r|^p\right), \tag{26}$$

*где* $\rho = r$ *при* $r - n/p \neq 0, 1, \ldots, r$. *В исключенных случаях можно брать* $\rho = r + \varepsilon$ *при любом* $\varepsilon > 0$.

Замечание 4. Для целых $r$ теорема известна и даже в более сильной форме при целом $r - n/p \geqslant 0$: гарантируется оценка

$$|u, L_{p,r,1}| \leqslant c\,|u, \mathring{\mathscr{L}}_p^r|, \qquad \mathring{\mathscr{L}}_p^r = \mathring{W}_p^r$$

(см. теорему III). Неравенство (26) (с учетом соотношений между $\mathring{l}_p^r$ и $\mathring{\mathscr{L}}_p^r$) записывается коротко в виде

$$\mathring{\mathscr{L}}_p^r \subsetneq L_{p,\rho}.$$

Доказательство. Пусть $r$ — нецелое: $r = [r] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Как следует из доказанной выше теоремы 1, для $u \in C_0^\infty$ и $|k| = k_1 + \ldots + k_n = [r]$ справедлива оценка

$$\int\limits_{R^n} \frac{|D^k u(x)|^p\,dx}{(1+|x|^2)^{\gamma p/2}} \leqslant c\left(\int\limits_Q |D^k u|^p\,dx + \|S_\alpha(D^k u)\|_p^p\right). \tag{27}$$

Из теории лиувиллевских пространств известно [3, 10], что в шаре $Q$ $L_p$-нормы промежуточных производных $u$ оцениваются через норму $u$ в самом пространстве. Следовательно, норма $\|D^k u\|_{L_p(Q)}$ мажорируется величиной

$$\|u\|_{L_p(Q)} + \sum_{|s|=[r]} \|S_\alpha(D^s u)\|_p.$$

С учетом этого обстоятельства оценка (27) перепишется в виде

$$\int\limits_{R^n} \frac{|D^k u(x)|^p\,dx}{(1+|x|^2)^{\gamma p/2}} \leqslant c\left(\|u\|_{L_p(Q)}^p + \sum_{|s|=[r]} \|S_\alpha(D^s u)\|_p^p\right).$$

Сказанное означает наличие вложения

$$\mathring{\mathscr{L}}_p^r \subsetneq \mathring{w}_{p,\gamma}^{[r]}, \tag{28}$$

где через $w_{p,\gamma}^{[r]}$ обозначено весовое пространство Соболева функций $f$

с конечной полунормой

$$|f, w_{p,\gamma}^{[r]}| = \sum_{|s|=[r]} \| D^s f, L_{p,\gamma} \|,$$

а $\overset{\circ}{w}{}_{p,\gamma}^{r}$ — замыкание $C_0^\infty$ по этой норме.

Пусть $r - n/p \neq 0, 1, \ldots, r$. Тогда (поскольку $r$ нецелое) число $\alpha - n/p$ — нецелое и можно положить $\gamma = \alpha$. По теореме вложения (см. книгу [2, с. 215])

$$\overset{\circ}{w}{}_{p,\alpha}^{[r]} \subsetneq L_{p,\,[r]+\alpha}. \tag{29}$$

Соотношения (28) и (29) в совокупности дают

$$\overset{\circ}{\mathscr{L}}{}_p^r \subsetneq L_{p,r}.$$

Если $r - n/p$ совпадает с одним из чисел $0, 1, \ldots, r$, то из равенства

$$r - n/p = [r] + (\alpha - n/p)$$

следует, что $\alpha - n/p$ целое неположительное число. В этом случае имеет место вложение (см. [2, с. 215])

$$\overset{\circ}{w}{}_{p,\alpha}^{[r]} \subsetneq L_{p,r,1}.$$

Кроме того, при $\alpha - n/p$ следует взять в (28) $\gamma = \alpha + \varepsilon$. В конечном итоге можно утверждать вложение

$$\overset{\circ}{\mathscr{L}}{}_p^r \subsetneq L_{p,r+\varepsilon} \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. На последнем шаге получено несколько больше, чем утверждалось: «при $r - n/p = 0, 1, \ldots, ([r] - 1)$ имеет место вложение $\overset{\circ}{\mathscr{L}}{}_p^r \subsetneq L_{p,r,1}$». Видимо, это вложение верно и при $r - n/p = [r]$.

## § 3. СОВОКУПНОСТЬ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ КАК ПОДПРОСТРАНСТВО $l_p^r$

Вложение $\overset{\circ}{l}{}_p^r \subset l_p^r$ очевидно; при этом, как уже говорилось, $l_p^r = \overset{\circ}{l}{}_p^r$ при целом $r$, $n \leqslant p$. Мы увидим в § 4, что и при нецелом $r$, $n \leqslant p$, имеет место «полное исчерпание» (т. е. совпадение пространств $l_p^r$ и $\overset{\circ}{l}{}_p^r$). Оказывается, что при остальных значениях $r$ $\overset{\circ}{l}{}_p^r$ «исчерпывает» $l_p^r$ с точностью до конечномерного пространства (состоящего из полиномов). Чтобы установить эти факты, мы выведем в этом параграфе характеристическое свойство $\overset{\circ}{l}{}_p^r$ как подпространства $l_p^r$ (теорема 4). Вспомогательные теоремы 3 и 3′ имеют отношение к результатам, принадлежащим Л. Д. Кудрявцеву [9]: в них устанавливается $p$-суммируемость промежуточных производных с соответствующим весом[1]).

Т е о р е м а 3. *Пусть $r > 0$ — целое число $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, $0 < |s| < r$. Если $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$, $1 < p < \infty$, $r - n/p \neq 0, 1, \ldots [r]^-$, то $D^s f \in L_{p,r-s}$ и справедлива оценка*

$$|D^s f;\ L_{p,r-s}| \leqslant C\,(\|f\|_{L_{p,r}} + |f, w_p^r|). \tag{30}$$

[1] Отметим, что в работе [9] была продемонстрирована целесообразность использования нормы (9), не накладывающей излишних ограничений на рассматриваемые функции.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением (VI.5.43) книги [2] (считая $\eta = |x|$, ср. (VI.9.10)), верным для $f \in w_p^r$:

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta|<r} \frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \int_{R^n} \mathcal{L}_\beta\left(\frac{y}{|x|}\right) \varphi(y)\,dy + \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} K_\alpha(x, x-y)\, D^\alpha\varphi(y)\,dy, \quad (31)$$

где $\mathcal{L}_\beta(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции с носителем в единичном шаре, а ядра $K_\alpha$ имеют вид (см. [2, с. 272])

$$K_\alpha(x, x-y) = C_\alpha (x-y)^\alpha \int_1^\infty v(x - \tau(x-y))\, \tau^{n-1}\, d\tau. \quad (32)$$

Здесь $v(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в шаре $|z| \leqslant |x|$, $\int v(z)\,dz = 1$, которая получается из стандартного усредняющего ядра по формуле (35). При фиксированном $x$ носитель ядра $K_\alpha$ $(x, x-y)$ содержится в шаре $|y| \leqslant |x|$. В самом деле, при $|y| > |x|$ и $1 < \tau < \infty$ имеем

$$|x - \tau(x-y)| \geqslant \tau|y| - (\tau-1)|x| \geqslant \tau|x| - (\tau-1)|x| = |x|$$

и, следовательно, подынтегральная функция в (32) равна нулю тождественно. Из сказанного заключаем, что интегрирование в (31) фактически проводится не по $R^n$, а по шару $|y| < |x|$. Дифференцируя соотношение (31), получаем выражение $D^s\varphi$ в виде

$$D^s\varphi = \sum_{|\beta|<r} \int_{|y|<|x|} D^s\left\{\frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \mathcal{L}_\beta\left(\frac{y}{|x|}\right)\right\} \varphi(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=r} \int_{|y|<|x|} D_x^s[K_\alpha(x, x-y)]\, D^\alpha\varphi(y)\,dy. \quad (33)$$

При каждом дифференцировании полярность ядер в первой сумме возрастает на единицу и, следовательно,

$$\left|D^s\left[\frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \mathcal{L}_\beta\left(\frac{y}{|x|}\right)\right]\right| \leqslant C_\beta \frac{1}{|x|^{n+|\beta|}}. \quad (34)$$

Займемся оценкой ядра $D^s K_\alpha$:

$$D_x^s[K_\alpha(x, x-y)] = C_{\alpha,s}(x-y)^{\alpha-s} \int_1^\infty v(x-\tau(x-y))\,\tau^{n-1}d\tau +$$
$$+ C_\alpha (x-y)^\alpha \int_1^\infty (D^s v)(x-\tau(x-y))(1-\tau)^s \tau^{n-1} d\tau =$$
$$= C_{\alpha,s} \frac{(x-y)^{\alpha-s}}{|x-y|^n} \int_{|x-y|}^\infty v\left(x - t\,\frac{(x-y)}{|x-t|}\right) t^{n-1}\,dt +$$
$$+ C_\alpha \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^{n+|s|}} \int_{|x-y|}^\infty (D^s v)\left(x - t\,\frac{x-y}{|x-t|}\right)(|x-t|-t)^{|s|}\, t^{n-1}\,dt.$$

Интеграл $J_1$ в первом слагаемом полученного выражения ограничен. Функция $v$ берется в виде

$$v(z) = \varkappa_0 |x|^{-n} \omega\left(\frac{z}{|x|}\right), \quad (35)$$

где $\varkappa_0$ — нормировочная постоянная, выбранная из условия $\int v(x)\,dx =$

$= 1$, а $\omega_1$ — фиксированная функция из $C_0^\infty$ с носителем в единичном шаре. Следовательно,

$$| v(z) | \leqslant C / | x |^n.$$

Поэтому

$$| J_1 | \leqslant \frac{C}{| x |^n} \int_0^{2|x|} t^{n-1} dt \leqslant C_1.$$

Аналогично оценивается интеграл $J_2$ (во втором слагаемом)

$$| D^s v(z) | = \varkappa_0 | x |^{-n} | D^s \omega | \frac{1}{| x |^{|s|}} \leqslant \frac{C_2}{| x |^{n+|s|}},$$

$$| J_2 | \leqslant \frac{C_2}{| x |^{n+|s|}} \int_{|x-y|}^{2|x|} (t - | x - y |)^{|s|} t^{n-1} dt \frac{C_2}{| x |^{n+|s|}} \int_0^{2|x|} t^{n+|s|-1} dt = C_3.$$

Окончательно получим

$$| D_x^s [K_\alpha (x, x - y)] | \leqslant \frac{C}{| x - y |^{n+|s|-\alpha}}. \tag{36}$$

Домножая равенство (33) на $(1 + | x |^2)^{|s|/2}$ и беря $L_p (R^n)$-норму от обеих частей, с учетом оценок (34), (36) придем к неравенству ($| s | = k$, $| \alpha | = r$)

$$\int_{R^n} \frac{| D^s f(x) |^p dx}{(1 + | x |^2)^{(r-k)p/2}} \leqslant \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + | x |^2)^{(r-k)p/2} | x |^{(n+k)p}} \left( \int_{|y| < |x|} | \varphi(y) | dy \right)^p +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = r} \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + | x |^2)^{(r-k)p/2}} \left( \int_{|y| < |x|} \frac{| D^\alpha \varphi(y) | dy}{| x - y |^{n+k-r}} \right)^p = A_1 + \sum_\alpha A_\alpha.$$

Оценка слагаемых $A_\alpha$ идет по типу оценки интеграла типа потенциала. Ограничения на параметры несколько ослабляются за счет того, что во внутреннем интеграле область интегрирования отлична от $R^n$. Выкладки приводят (см. оценки $U_1 f$ и $U_3 f$ в работе [7]) к неравенству

$$A_\alpha \leqslant C \| D^\alpha \varphi \|_p.$$

Пусть сначала $rp \leqslant n$. Для оценки слагаемого $A$ применим неравенство Сысоевой — Таленти (21)

$$A = C \int_0^\infty \frac{r_1^p}{(1 + r_1^2)^{(r-k)p/2} r_1^{(n+k)p}} \left| \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \rho^{n-1} d\rho \int_S \varphi(\rho, \sigma) d\sigma \right|^p r_1^{n-1} dr_1 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_0^\infty \left| \rho^{n-1} \int_S \varphi(\rho, \sigma) d\sigma \right|^p \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho^2)^{(r-k)p/2} \rho^{(n+k-1)p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{R^n} \frac{| \varphi(y) |^p dy}{(1 + | y |^2)^{(r-k)p/2} | y |^{kp}} \leqslant C_2 \int_Q \frac{| \varphi(y) |^p dy}{| y |^{kp}} +$$

$$+ C_2 \int_{|y|>1} \frac{| \varphi(y) |^p}{(1 + | y |^2)^{rp/2}} \frac{(1 + | y |^2)^{kp/2}}{| y |^{kp}} dy \leqslant d_1 \int_Q \frac{| \varphi(y) |^p dy}{| y |^{kp}} +$$

$$+ d_2 \int_{R^n} \frac{| \varphi(y) |^p dy}{(1 + | y |^2)^{rp/2}}. \tag{37}$$

Напишем очевидную оценку

$$\int\limits_Q \frac{|\varphi(y)|^p\,dy}{|y|^{kp}} \leqslant C\int\limits_Q \frac{|\varphi(y)|^p\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}}\,|y|^{kp}} \leqslant C\overbrace{\int\limits_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}}\,|y|^{kp}}}^{B}. \tag{38}$$

Интеграл $B$ допускает оценку (при $rp \leqslant n$)

$$B \leqslant C^* a^{kp-n}\int\limits_Q \frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{kp}}\,dy + C_1\|\varphi\|^p_{L_{p,\,r}} + C_2\sum_{|\alpha|=r}\|D^\alpha\varphi\|_p \tag{39}$$

с произвольным параметром $a > 1$ (причем $C^*$ — не зависит от $a$). Выбрав $a$ достаточно большим, на основании неравенств (37), (38), (39) приходим к оценке

$$A \leqslant C\left(\|\varphi\|^p_{L_{p,\,r}} + \sum_{|\alpha|=r}\|D^\alpha\varphi\|_p\right),$$

и доказательство теоремы в рассматриваемом случае завершено (коль скоро неравенство (39) доказано).

Для доказательства (39) воспользуемся вместо (31) следующим представлением ($a > 1$):

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta|<r}\frac{(ax)^\beta}{|ax|^{n+|\beta|}}\int\limits_{R^n}\mathcal{L}_\beta\left(\frac{y}{a|x|}\right)\varphi(y)\,dy + \sum_{|\alpha|=r}\int\limits_{R^n} K_\alpha(x, x-y)\,D^\alpha\varphi(y)\,dy, \tag{40}$$

где $K_\alpha$ определяется опять формулой (32), но с функцией $v(z) \in C_0^\infty$ с носителем в шаре $|z| < a|x|$. Легко видеть, что при фиксированном $x$ носитель ядра $K_\alpha(x, x-y)$ содержится в шаре $|y| < a|x|$ ($|y| \geqslant a|x| \Rightarrow |x - \tau(x-y)| \geqslant \tau|y| - (\tau-1)|x| \geqslant \tau a|x| - (\tau-1)|x|$). Поэтому фактическое интегрирование в (40) происходит по шару $|y| \geqslant a|x|$. Оценка ядра $K_\alpha(x, x-y)$ сохраняет прежний вид (36):

$$|K_\alpha(x, x-y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^{n-|\alpha|}}.$$

С учетом сказанного можем написать

$$B \leqslant \int\limits_{R^n}\frac{dy}{(1+|y|^2)^{(r-k)p/2}\,|y|^{kp}}\,\frac{1}{|ay|^{np}}\Big\{\int\limits_{|z|<a|y|}|\varphi(z)|\,dz\Big\}^p +$$

$$+\sum_{|\alpha|=r}\int\limits_{R^n}\frac{dy}{(1+|y|^2)^{(r-k)p/2}\,|y|^{kp}}\left(\int\limits_{|z|<a|x|}\frac{|D^\alpha\varphi(z)|\,dz}{|y-z|^{n-r}}\right)^p = A' + \sum A'_\alpha.$$

Оценка слагаемых под знаком суммы происходит, как и выше. Оценка первого слагаемого $A'$ несколько меняется. По неравенству (21) получим

$$A' \leqslant c^* a^{pr-n}\int\limits_{R^n}\frac{|\varphi(y)|^p\,dy}{(a^2+|y|^2)^{(r-k)p/2}\,|y|^{kp}} = c^* a^{pr-n}\int\limits_Q\frac{|y|^{-kp}\,|\varphi(y)|^p\,dy}{(a^2+|y|^2)^{(r-k)p/2}} +$$

$$+ c^* a^{pr-n}\int\limits_{|y|\geqslant 1}\frac{|\varphi(y)|^p\,(1+|y|^2)^{pr/2}\,dy}{(1+|y|^2)^{pr/2}\,(a^2+|y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}}\,|y|^{kp}} \leqslant c^* a^{kp-n}\int\limits_Q\frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{kp}}\,dy +$$

$$+ 2^{pr/2}c^* a^{pr-n}\int\limits_{R^n}\frac{|\varphi(y)|^p\,dy}{(1+|y|^2)^{pr/2}}.$$

Оценку (39) можно считать установленной.

Дальнейшее доказательство (при $pr > n$) наметим лишь схематически. Для простоты ограничимся случаем $0 < r - n/p \leqslant 1$. Представление (31) несколько модифицируем, пользуясь непрерывностью $\varphi$ (устойчивой по отношению к норме):

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{|\beta|<r} \frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \int_{R^n} \mathscr{L}_\beta\left(\frac{y}{|x|}\right)[\varphi(y) - \varphi(0)]\,dy +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} K_\alpha(x, x-y)\, D^\alpha \varphi(y)\,dy.$$

Действуя как и выше, получим те же оценки, но с заменой $\varphi(y)$ на $\varphi(y) - \varphi(0)$. Вместо (37) будем иметь

$$\int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(r-k)p/2}\,|x|^{(n+k)p}} \left(\int_{|y|<|x|} |\varphi(y) - \varphi(0)|\,dy\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant d_1 \int_Q \frac{|\varphi(y) - \varphi(0)|^p}{|y|^{kp}}\,dy + d_2 \int_{R^n} \frac{|\varphi(y) - \varphi(0)|^p}{(1+|y|^2)^{pr/2}}\,dy.$$

Второе слагаемое мажорируется величиной $(\|\varphi\|_{L_{p,r}} + |\varphi(0)|) \leqslant \leqslant c\,(\|\varphi\|_{L_{p,r}} + \|\varphi\|_{L_p(Q)} + |\varphi, w_p^r|)$. Первое слагаемое оценивается с помощью введения параметра $a$ (как это делалось выше).

В общем случае $0 < k - 1 < r - n/p \leqslant k$, $k \leqslant r$, следует вычитать из $\varphi(y)$ многочлен

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \frac{(D^\alpha\varphi)(0)}{\alpha!}\, x^\alpha$$

и рассуждать аналогично вышеизложенному.

Теорема доказана.

Теорема 3 обобщается на случай нецелых $r$.

Теорема 3′. *Пусть $r > 0$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — вектор с целочисленными компонентами, $0 < |s| < r$. Если $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$, $1 < p < \infty$, $r - n/p \neq \neq 0, 1, \ldots, [r]^-$, то $D^s f \in L_{p,r-|s|}$ и справедлива оценка* (30).

Для доказательства при нецелых $r$ следует использовать интегральные представления функции $f$ через разности от старших производных, подобные тем, которые получены в работе [10]. Остальные рассуждения и выкладки вполне аналогичны вышеприведенным.

На основе теорем 3 и 3′ устанавливается следующее важное предложение.

Теорема 4. *Для того чтобы функция $f$ из $l_p^r$ принадлежала пространству $\mathring{l}_p^r$, достаточно, а при $r - n/p \neq 0, 1, \ldots, [r]^-$ и необходимо, чтобы $f \in L_{p,r}$.*

Докажем теорему сначала для целых $r$. Необходимость следует из теоремы III (из которой вытекает необходимое условие и для исключенных значений $r$). Для доказательства достаточности следует убедиться, что функция $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$ приближается $C_0^\infty$ — функциями по норме $|f, W_p^r|$. Поскольку бесконечно дифференцируемые функции плотны в $W_p^r$ (см., например, [2]) можно считать $f \in C^\infty(R^n)$. Домножим функцию $f$ на срезающую функцию

$$\eta_h(x) = \eta(x/h),$$

где

$$\eta(x) \in C_0^\infty, \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

и докажем

$$| f - f_h, w_p^r | \to 0 \text{ при } h \to \infty. \tag{41}$$

Имеем

$$f(x) - f_h(x) = \left[1 - \eta\left(\frac{x}{h}\right)\right] f(x) = \psi\left(\frac{x}{h}\right) f(x) = \psi_h(x) f(x)$$

$$| D^\alpha [f(x) - f_h(x)], \quad L_p | \leqslant | \psi_h(x) D^\alpha f, L_p | + \sum_{k \leqslant \alpha} | D^{\alpha-k} f D^k \psi_h, L_p |.$$

Производная $D^k\psi_h$ имеет носитель в кольце $h < |x| < 2h$ и подчиняется оценке

$$| D^k\psi_h | = \left| (D^k\psi)\left(\frac{x}{h}\right) \right| \frac{1}{h^{|k|}} \leqslant \frac{C}{h^{|k|}}.$$

Поэтому

$$| D^{\alpha-k} f D^k \psi_h, L_p |^p \leqslant \frac{C}{h^{kp}} \int\limits_{h<|x|<2h} | D^{\alpha-k} f(x) |^p dx \leqslant C_1 \int\limits_{|x|>h} \frac{| D^{\alpha-k} f |^p dx}{(1+x^2)^{kp/2}}.$$

По теореме 3 $D^{\alpha-k} f \in L_{p,k}$ и полученный интеграл стремится к нулю при $h \to \infty$. Соотношение (41) доказано.

Пусть теперь $0 < r < 1$, $pr \neq n$. Если $f \in \overset{\circ}{l}{}_p^r$, то с необходимостью $f \in L_{p,r}$ (см. теорему 1). Пусть, наоборот, $f \in l_p^r \cap L_{p,r}$, докажем, что $f \in \overset{\circ}{l}{}_p^r$. Для этого следует убедиться, что

$$| f - \eta_h f, l_p^r | = | \psi_h f, l_p^r | \to 0 \text{ при } h \to \infty \tag{42}$$

Имеем (полагая $\beta = 2n + 2r + 1$)

$$S_r(\psi_h f) = \left\{ \int_0^\infty \left( \int\limits_{|x-y|<t} | \psi_h(x) f(x) - \psi_h(y) f(y) | dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^\infty \left( \int\limits_{|x-y|<t} | \psi_h(x) - \psi_h(y) | | f(y) | dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{ \int_0^\infty \left( \int\limits_{|x-y|<t} | f(x) - f(y) | | \psi_h(x) | dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} = J_1 + J_2. \tag{43}$$

Второе слагаемое $J_2$ равно $|\psi_h(x)| \, S_r(f)$ и легко оценивается. Займемся оценкой слагаемого $J_1$. Запишем его в виде

$$J_1^2(z) = \frac{1}{h^{2r}} \int_0^\infty \left( \int\limits_{|z-u|<\tau} | \psi(z) - \psi(u) | | f(hu) | du \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^\beta} =$$

$$= \frac{1}{h^{2r}} \int_0^\infty \left( \int\limits_{|z-u|<\tau} \left[ \int_z^u | \operatorname{grad} \psi(\xi) | d\xi \right] | f(hu) | du \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^\beta},$$

где $z = x/h$ и $\int_z^u$ обозначает интеграл по линии, соединяющей точки $z$ и $u$.

Поскольку носитель $\operatorname{grad} \psi(u)$ содержится в шаровом слое $1 < |u| < 2$, то при больших $z$ ($|z| > 2$) целесообразно записать $J_1^2(z)$ в виде трех слагаемых:

$$J_1^2(z) = \frac{1}{h^{2r}} \int\limits_0^{|z|-2} \ldots + \frac{1}{h^{2r}} \int\limits_{|z|-2}^{|z|+2} \ldots + \frac{1}{h^{2r}} \int\limits_{|z|+2}^{\infty} \ldots = A_1 + A_2 + A_3.$$

Первое из них исчезает, так как шары $|z-u| < \tau$ и $|u| < 2$ не пересекаются (подынтегральная функция обращается в нуль тождественно). $A_3$ допускает оценку

$$A_3 \leqslant C(\sup_\xi |\operatorname{grad} \psi(\xi)|)^2 \frac{1}{h^{2r}} \int\limits_{|z|+2}^{\infty} \Big( \int\limits_{1<u<2} |f(hu)|\,du\Big)^2 \frac{d\tau}{\tau^\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{h^{2n+2r}} \Big( \int\limits_{h<|v|<2h} |f(v)|\,dv\Big)^2 \frac{1}{(|z|+1)^{2n+2r}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{h^{2n+2r}} \int\limits_{h<|v|<2h} \frac{|f(v)|^p\,dv}{(1+v^2)^{\frac{pr}{2}}}\Big)^{\frac{2}{p}} \Big( \int\limits_{|v|<2h} (1+v^2)^{\frac{rp'}{2}}\,dv\Big)^{\frac{2}{p'}} \frac{1}{(|z|+1)^{2n+2r}}.$$

При $h > 1$ можно написать

$$\int\limits_{|v|<2h} (1+v^2)^{\frac{p'r}{2}}\,dv \leqslant \int\limits_{|v|<2h} (h^2+v^2)^{\frac{p'r}{2}}\,dv = Ch^{n+p'r}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$A_3^{p/2} \leqslant \frac{C}{h^n} \int\limits_{|h|<|v|} \frac{|f(v)|^p\,dv}{(1+v^2)^{pr/2}} \frac{1}{(|z|+1)^{(n+2)p}}.$$

Аналогично оценивается слагаемое $A_2$. При малых $z$ получаем ту же оценку и для $J_1^p(z)$ (достаточно убедиться в этом при $z = 0$). Собирая оценки воедино, получим

$$\int\limits_{R^n} J_1^p(z)\,dz = h^n \int\limits_{R^n} J_1^p(z)\,dz \leqslant C \int\limits_{h<|v|<2h} \frac{f(v)^p\,dv}{(1+v^2)^{pr/2}}.$$

Беря $L_p$-норму от обеих частей неравенства (43) и устремляя $h$ к $\infty$, придем к (42).

В общем случае (нецелого $r > 1$) рассуждения проходят аналогично.

Теорема 4 доказана.

## § 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ $l_p^r = \mathring{l}_p^r + \mathscr{P}$

Получим дробный аналог «теоремы о выходе на постоянную» в рамках лиувиллевских классов $l_p^r$. Начнем с невесового варианта этой теоремы, который установим в виде леммы.

Лемма 2. *Пусть $f \in l_p^r$, $0 < r < 1$, $1 < p < \infty$, $pr < n$. Тогда существует постоянная $A$ такая, что*

$$\Big\{ \int\limits_{R^n} |f(x) - A|^{p_r}\,dx \Big\}^{\frac{1}{p_r}} \leqslant C\,|f, l_p^r|, \tag{44}$$

*где $C$ не зависит от $f$ и $\alpha - n/p = -n/p_r$.*

З а м е ч а н и е. На самом деле мы докажем несколько больше, именно, что при

$$A = \lim_{|x|\to\infty} q\,|x|^{-n} \int\limits_{|y|<|x|} f(y)\,dy. \tag{45}$$

и любом $x \in R^n$ справедлива оценка

$$|f(x) - A| \leqslant C_1\,|f,\ l_p^r|^{pr/n}\,[(S_r f)(x)]^{1-pr/n} \tag{46}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Обозначим для краткости $(S_r f)(x) = S(x)$. На первом шаге докажем неравенство

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leqslant C\,|x - \tilde{x}|^r\,[S(x) - S(\tilde{x})]. \tag{47}$$

Напишем очевидное неравенство ($|Q| = q^{-1}$ — объем единичного шара в $R^n$)

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leqslant \frac{2^n q}{|x-\tilde{x}|^n} \int\limits_D |f(x) - f(y)|\,dy + \frac{2^n q}{|x-\tilde{x}|^n} \int\limits_D |f(\tilde{x}) - f(y)|\,dy,$$

где $D$ — шар с центром в $(x + \tilde{x})/2$ и радиусом $|x - \tilde{x}|/2$.

Заменим интегрирование по $D$ в первом интеграле интегрированием по шару $|x - y| < t$, а во втором — по шару $|\tilde{x} - y| < t$, где $t \geqslant |\tilde{x} - x|$; неравенство только усилится. Интегрируя его по $dt/t$, получим

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leqslant \frac{2^n q}{|x-\tilde{x}|^n} \int\limits_{|x-\tilde{x}|}^{e|x-\tilde{x}|} \frac{dt}{t} \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\,dy +$$

$$+ \frac{2^n q}{|x-\tilde{x}|^n} \int\limits_{|x-\tilde{x}|}^{e|x-\tilde{x}|} \frac{dt}{t} \int\limits_{|\tilde{x}-y|<t} |f(\tilde{x}) - f(y)|\,dy \leqslant$$

(применяя неравенство Шварца)

$$\leqslant \frac{2^n q}{|x-\tilde{x}|^n} \left( \int\limits_{|x-\tilde{x}|}^{e|x-\tilde{x}|} \left( \int\limits_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|\,dy \right)^2 \frac{dt}{t^{2n+2r-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int\limits_{|x-\tilde{x}|}^{e|x-\tilde{x}|} t^{2n+2r-1}\,dt \right)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

После очевидных преобразований придем к неравенству (47).

2. Из оценки (47) вытекает

С л е д с т в и е 1. Пусть $p > 0$, $\alpha r + \beta/p < 0$ и $\{y_k\}_1^\infty$ — последовательность точек в $R^n$ со свойствами

$$|y_k - x| < \delta 2^{k\alpha}, \qquad S^p(y_k) \leqslant \gamma 2^{k\beta}.$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = A(x) \equiv A$, и если в добавок к сказанному $S^p(x) \leqslant \gamma$, то справедлива оценка

$$|f(x) - A| < C\,\delta^r \gamma^{1/p}, \tag{48}$$

где $C$ не зависит от $f$.

В самом деле, при сделанных предположениях из (47) вытекает

$$|f(y_{k+1}) - f(y_k)| \leqslant C \delta^r \gamma^{1/p} 2^{k(\alpha r + \beta/p)}$$

и в силу условия $\alpha r + \beta/p < 0$ последовательность $\{f(y_k)\}$ оказывается фундаментальной.

Если $S^p(x) \leqslant \gamma$, положим $x = y_0$ и напишем

$$|f(y_0) - f(y_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |f(y_i) - f(y_{i+1})| \leqslant C\delta^r\gamma^{1/p} \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i(\alpha r + \beta/p)}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим (48).

3. Пусть теперь $x \in R^n$ таково, что $0 < S(x) < \infty$. Рассмотрим последовательность шаров $B_k$ с центром в точке $x$ и радиуса $2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\delta = |f, l_p^r|^{p/n} |Q|^{1/n} S^{-p/n}(x). \tag{49}$$

В каждом из этих шаров найдется точка $y_k$, для которой

$$S^p(y_k)|B_k| \leqslant \|S(x)\|^p_{L_p(B_k)} \leqslant |f, l_p^r|^p. \tag{50}$$

Следовательно, выполнены условия следствия 1 при $\delta$, задаваемом формулой (49), $\gamma = S^p(x)$, $\alpha = 1$, $\beta = -n$ (ибо (50) переписывается в виде $S^p(y_k) \leqslant S^p(x)2^{-nk}$), причем $\alpha r + \beta/p = r - n/p < 0$. На основании (48) получаем

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = A \equiv A(x)^{1},$$

$$|f(x) - A| \leqslant C\delta^r\gamma^{1/p} = C_1 |f, l_p^r|^{pr/n} S^{1-pr/n}. \tag{51}$$

Неравенство (51) совпадает с (46). Возводя его в степень и интегрируя по $R^n$, приходим к (44).

4. Осталось доказать соотношение (45). Из оценки

$$\left|A - \frac{q}{|x|^n} \int\limits_{|y|<|x|} f(y)\,dy\right| = \left|\frac{q}{|x|^n} \int\limits_{|y|<|x|} [A - f(y)]\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{|x|^n} \Bigl( \int\limits_{|y|<|x|} |A - f(y)|^{pr}\,dx\Bigr)^{\frac{1}{pr}} \Bigl( \int\limits_{|y|<|x|} dy\Bigr)^{\frac{1}{p_r'}}$$

и неравенства (44) очевидно следует (45).

Лемма 2 доказана.

Бо́льший интерес в контексте статьи представляет нижеследующая теорема, первая часть которой легко вытекает из подготовительной леммы 1 (§ 2).

Теорема 5. *Пусть $f \in l_p^r$, $0 < r < 1$, $1 < p < \infty$. Если $pr < n$ и число $A$ определяется формулой* (45), *то*

$$\int\limits_{R^n} \frac{|f(x) - A|^p dx}{(1 + |x|^2)^{pr/2}} \leqslant C |f, l_p^r|^p. \tag{52}$$

*При $pr > n$ справедливо неравенство*

$$|f, L_{p,r}| < C(\|f\|_{L_p(Q)} + |f, l_p^r|^p). \tag{53}$$

Доказательство. 1. Начнем со случая $pr < n$. Пусть, как и в § 2, $f^a(x)$ — усреднение функции $f(y)$ по шару $|y| < a|x|$. Тогда

$$\|f - A\|_{L_{p,r}} \leqslant \|f - f^a\|_{L_{p,r}} + \|f^a - A\|_{L_{p,r}}. \tag{54}$$

[1] Легко доказать, что $A$ не зависит от $x$.

Первое слагаемое справа оценивается по упомянутой лемме 1, второе преобразуется и оценивается ниже

$$\|f^a - A\|^p_{L_{p,r}} = \frac{q}{a^{np}} \int\limits_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}} \left| \frac{1}{|x|^n} \int\limits_{|y|<a|x|} [f(y) - A]\, dy \right|^p =$$

$$= q^p s \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{r}^{n-1}\tilde{r}^p}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2}\tilde{r}^{np}} \left| \frac{1}{\tilde{r}} \int\limits_0^{\tilde{r}} t^{n-1} \left( \int\limits_S [f(at, \sigma) - A]\, d\sigma \right) \right|^p d\tilde{r} \leqslant$$

(применяется неравенство Сысоевой — Таленти и затем Гёльдера)

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty \frac{r^{n-1}\tilde{r}^p}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2}\tilde{r}^{np}} \tilde{r}^{(n-1)p} \left( \int\limits_S |f(a\tilde{r}, \sigma) - A|^p\, d\sigma \right) d\tilde{r} =$$

$$= C \int\limits_{R^n} \frac{|f(a\tilde{r}, \sigma) - A|^p \tilde{r}^{n-1}\, d\tilde{r}\, d\sigma}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2}} =$$

$$= Ca^{pr-n} \int\limits_{R^n} \frac{|f(y) - A|^p}{(a^2+|y|^2)^{pr/2}}\, dy = \frac{C}{a^n} \int\limits_Q |f(y) - A|^p\, dy +$$

$$+ Ca^{pr-n} \int\limits_{|y|>1} \frac{|f(y) - A|^p (1+|y|^2)^{pr/2}}{(1+|y|^2)^{pr/2}(a^2+|y|^2)^{pr/2}}\, dy \leqslant$$

(к первому слагаемому применяется неравенство Гёльдера)

$$\leqslant \frac{C_1}{a^n} \left( \int\limits_Q |f(y) - A|^{p_r}\, dy \right)^{p/p_r} + Ca^{pr-n} \int\limits_{R^n} \frac{|f(y) - A|^p}{(1+|y|^2)^{pr/2}}\, dy. \qquad (55)$$

Первое слагаемое справа оценивается через $|f, l_p^r|$ (по неравенству (44), а второе — мало́ при достаточно большом $a$. Учитывая эти обстоятельства, из неравенства (54) получаем (52).

2. Пусть $f \in l_p^r$, $rp > n$. Подобно тому, как это было в § 2, имеем оценку

$$|f(x)| \leqslant \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|y| \leqslant a|x|} f(y)\, dy + C(a)|x|^r (S_r f)(x).$$

Беря от обеих частей $L_{p,r}(R^n \diagdown Q_N)$-норму, напишем неравенство

$$|f, L_{p,r}(R^n \diagdown Q_N)| \leqslant |f^a, L_{p,r}(R^n \diagdown Q_N)| + C(a)|f, l_p^r| \qquad (56)$$

и оценим первое слагаемое $J$ справа

$$J = \left\{ \int\limits_{|x|<N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}} \left| \frac{q}{(a|x|)^n} \int\limits_{|y|<a|x|} f(y)\, dy \right|^p \right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{q|S|}{a^n} \left\{ \int\limits_0^N \frac{\rho^{n-1}\, d\rho}{(1+\rho^2)^{pr/2}} \left| \int\limits_0^a \tau^{n-1} \left( \int\limits_S f(\rho\tau\sigma)\, d\sigma \right) d\tau \right|^p \right\}^{1/p} \leqslant$$

(применяя неравенство Минковского и затем Гёльдера)

$$\leqslant \frac{C}{a^n} \int\limits_0^a \tau^{n-1}\, d\tau \left\{ \int\limits_0^N \frac{\rho^{n-1}\, d\rho}{(1+\rho^2)^{pr/2}} \left( \int\limits_S |f(\rho\tau\sigma)|^p\, d\sigma \right) \right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{C}{a^n} \int\limits_0^a \tau^{r+\frac{n}{p'}} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \int\limits_{|x|<Na} \frac{|f(x)|^p\, dx}{(\tau^2+|x|^2)^{pr/2}} \right\}^{1/p}.$$

Считая $a < 1$, продолжим оценку $J$ так:

$$J \leqslant \frac{C}{a^n}\int_0^a \tau^{r+\frac{n}{p'}}\frac{d\tau}{\tau}\left\{\int\limits_{|x|<1}\frac{|f(x)|^p\,dx}{(\tau^2+|x|^2)^{pr/2}}+\int\limits_{1<|x|<N}\frac{|f(x)|^p\,dx}{(\tau^2+|x|^2)^{pr/2}}\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{a^n}\int_0^a \tau^{r+\frac{n}{p'}}\frac{d\tau}{\tau}\left\{\tau^{-r}\Bigl(\int\limits_{|x|<1}|f(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p}+\Bigl(\int\limits_{1<|x|<N}\frac{|f(x)|^p(1+|x|^2)^{pr/2}\,dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}(\tau^2+|x|^2)^{pr/2}}\Bigr)^{1/p}\right\}.$$

Пользуясь тем, что $(1+|x|^2)^{pr/2}(\tau^2+|x|^2)^{-pr/2}\leqslant 2$ при $|x|\geqslant 1$, получим окончательно

$$J \leqslant \frac{1}{a^{n/p}}\|f\|_{L_p(Q)}+a^{r-\frac{n}{p}}\Bigl(\int\limits_{|x|<N}\frac{|f(x)|^p\,dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}}\Bigr)^{1/p}.$$

Из неравенств (56), (57) при достаточно малом $a$ получим

$$|f, L_{p,r}(R^n\diagdown Q_N)|\leqslant C(\|f\|_{L_p(Q)}+|f, l_p^r|).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, придем к (53).

Теорема 5 доказана.

Замечание 5. В нерассмотренном случае ($rp=n$) можно доказать вместо (53) неравенство

$$|f, L_{p,r+\varepsilon}|\leqslant C(\|f\|_{L_p(Q)}+|f, l_p^r|).$$

Следует при этом опираться на неравенство Сысоевой — Таленти для конечного промежутка $(0, N)$. Видимо, справедлива и более точная оценка

$$|f, L_{p,r,1}|\leqslant C(\|f\|_{L_p(Q)}+|f, l_p^r|).$$

Нижеследующая теорема объединяет утверждения, которые мы именовали во введении и других местах «теоремой о выходе на полином ($r-n/p < 0$)», «теоремой о выходе на остаточный полином (промежуточный случай: $0\leqslant r-n/p<[r]^-$)», «теоремой о полном исчерпании» (т. е. о совпадении $l_p^r$ и $\mathring{l}_p^r$ при $r-n/p\geqslant [r]^-$). К сожалению, нам приходится делать оговорку, исключающую из рассмотрения некоторое критическое значение индекса дифференцирования.

Теорема 6. *Пусть* $f\in l_p^r$, $r>0$, $1<p<\infty$. *Тогда существует единственный полином вида*

$$p(x)=\sum_{k<|\alpha|\leqslant[r]^-}C_\alpha x^\alpha,\qquad k=\left[r-\frac{n}{p}\right] \tag{58}$$

*такой, что*

$$f(x)=u(x)+p(x),$$

*где* $u(x)\in\mathring{l}_p^r$ (*при этом нецелое значение* $r$, *для которого* $(r-[r])\,p=n$ *не рассматривается*). *Другими словами, имеет место разложение в прямую сумму*

$$l_p^r=\mathring{l}_p^r\dotplus\mathscr{P},$$

*где через* $\mathscr{P}$ *обозначена совокупность полиномов вида* (58).

Доказательство. При целом $r$ теорема верна (см. § 1). Пусть $r$ нецелое, $r=\bar r+\alpha$, $0<\alpha<1$; в силу сделанной оговорки $\alpha p\neq n$.

Если $\alpha p<n$, то по теореме 5 из $f\in l_p^r$ следует: $D^s f\in L_{p,\alpha}$, $|s|=[r]$. Следовательно, $f$ принадлежит весовому пространству Соболева $w_{p,\alpha}^{\bar r}$ при $-\alpha+n/p<0$. Используя соответствующую теорему вложения ([2, с. 215]), получим $f \in L_{p,r}$. Согласно теореме 4 это означает, что $f \in \overset{\circ}{l}{}_p^r$. Таким образом, $l_p^r \subset \overset{\circ}{l}{}_p^r$, т. е.

$$l_p^r = \overset{\circ}{l}{}_p^r \qquad (\alpha p > n)$$

и теорема при $r - n/p > [r]$ доказана.

Пусть теперь $\alpha p < n$. По теореме 5 получим

$$D^s f - A_s \in L_{p,\alpha}, \qquad |s| = [r].$$

Таким образом, функция $f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s$ является элементом $w_{p,\alpha}^r$. Если $0 < -\alpha + n/p \leqslant 1$ (т. е. $[r] - 1 < r - n/p \leqslant [r]$), то отсюда вытекает (см. [2]), что $\left(f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s\right) \in L_{pr}$. Учтем еще, что $\left(f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s\right) \in l_p^r$ (это очевидно). Тогда из теоремы 4 заключаем

$$u = f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s \in \overset{\circ}{l}{}_p^r,$$

и, таким образом, теорема доказана при $[r] - 1 < r - n/p \leqslant [r]$.

Дальнейшее рассуждение следует той же схеме. Воспроизведем еще один шаг. Пусть $[r] - 2 < r - n/p \leqslant [r] - 1$ (т. е. $1 \leqslant -\alpha + n/p < 2$). Из $f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s \in w_{p,\alpha}^r$ на этот раз (по теореме IV о разложении, с. 215 книги [2]) следует

$$f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s = v(x) + \sum_{|s|=[r]-1} A_s x^s, \; v \in \overset{\circ}{w}{}_{p,\alpha}^{[r]}.$$

Функция $v(x)$ принадлежит $l_p^r$ (это очевидно) и, кроме того, $v \in L_{p,r}$ (ибо по теореме 5 имеем

$$D^k \left[f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s\right] - A_k \in L_{p,1+\alpha}, \; |k| = [r] - 1).$$

Остается сослаться на теорему 4.

Теорема 6 доказана.

## § 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вдобавок к вопросу, возникшему в связи с замечаниями 4 и 5, перечислим некоторые вопросы, решение которых представляет, на наш взгляд, интерес.

Естественно, возникает задача о распространении изложенной теории на случай весовых лиувиллевских классов $l_{p,\gamma}^r$. Например, теорему 3 об оценке промежуточных производных можно было бы сформулировать в терминах весовых соболевских классов [2] таким образом:

$$w_p^r \cap L_{p,\,r} \subsetneq w_{p,\,r-|s|}^{|s|}, \qquad 0 \leqslant |s| \leqslant r.$$

Переход к рассмотрению лиувиллевских производных нецелого индекса $s$ приводит здесь к появлению весовых классов $l_{p,r-|s|}^{|s|}$. Определение классов $l_{p,\gamma}^r$ через лиувиллевские производные высказывается очевидным образом (по аналогии с целым случаем). Труднее получить для них нормировку по типу Стрихартца. По-видимому, полезно будет обращение к теории комплексной интерполяции по Кальдерону — Лионсу. Ориентиром при построении этой обобщенной теории может служить, конечно, теория весовых пространств Соболева $w_{p,\gamma}^l$ [2].

Следует обратить внимание читателя на исследования О. В. Бесова (см. [11, гл. III, § 14]), в которых изучено поведение на $\infty$ функции из анизотропных пространств Соболева $w_p^{(l_1,\ldots,l_n)}$ (в терминах $L_q$-метрик) и вопросы плотности $C_0^\infty$ — функций в этих пространствах. Эти исследования желательно перенести на лиувиллевские анизотропные классы $l_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ (с использованием как весовых метрик, так и $L_q$-метрик).

В большом цикле работ Ю. С. Никольского упомянутые исследования О. В. Бесова были перенесены на случай весовых анизотропных пространств Соболева (см., например, [12] и ссылки там); в этих работах изучались и дробные весовые пространства, нормированные по типу $B$-классов Бесова. Нормировка подобного же типа (точнее типа Соболева — Слободецкого) рассматривалась в работе Т. С. Пиголкиной [13], результаты которой (относящиеся к поведению «зануленных» функций на $\infty$) можно переформулировать в виде, аналогичном нашей теореме 2. Было бы интересно связать исследования Никольского и Пиголкиной с теорией действительной интерполяции по Лионсу — Петре.

Отметим, наконец, интересную работу Г. Трибеля [14], в которой исследуются весовые функциональные пространства, близкие к упомянутым выше. В этой работе широко используется теория интерполяции банаховых пространств.

Пояснение некоторых обозначений: если $\alpha$ — мультииндекс, то $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$; $\|\cdot\|_{L_p(R^n)} = \|\cdot\|_p$; $\sim$ обозначает соотношение эквивалентности; $\subset$ — знак включения (и алгебраического вложения), $\hookrightarrow$ — знак вложения (топологического).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r$.— Мат. сб., 1963, 50, № 3, с. 1.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. *Strichartz R. S.* Multipliers on fractional Sobolev spaces.— J. Math. and Mech., 1967, 16, N 9, p. 1031—1060.
4. *Лизоркин П. И.* Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингуляторных интегралов.— Мат. сб., 1970, 83, № 1, с. 79—91.
5. *Лизоркин П. И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1972, 117.
6. *Самко С. Г.* О пространствах риссовых потенциалов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, 40, № 5, с. 1143—1172.
7. *Stein E. M. Weiss G.* Fractional integrals on $n$-dimensional Euclidean space.— J. Math. and Mach., 1958, 7, N 4, p. 503—514.
8. *Talenti G.* Sopra una disequagliaza integrali.— Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1967, 21, N 2, p. 167—188.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Теоремы вложений для функций, определенных на неограниченных областях.— ДАН СССР, 1963, 153, № 3, с. 534—536.
10. *Ильин В. П.* Интегральные представления функций классов $L_p^l(G)$ и теоремы вложения.— Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1970, 19, с. 95—155.
11. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
12. *Никольский Ю. С.* Поведение на бесконечности функций с заданными в $L_p$ дифференциально-разностными свойствами.— Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 182—198.
13. *Пиголкина Т. С.* К теории весовых классов.— Труды МИАН СССР, 1969, 105, с. 201—212.
14. *Triebel H.* Spaces of Kudrjavcev type.—J. Math. Anal. and Appl. (1), 1976, 56, 253—277; (2) 1976, 56, 278—287.