Yu. M. Smetanin, Non-paradoxical logical consequence and the problem of solving ML-equations, *Program Systems: Theory and Applications*, 2016, Volume 7, Issue 1, 99–115

ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №1(28), 2016, с. 99–115

УДК 519.766.2

Ю. М. Сметанин

Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений

Аннотация. Рассматривается $\#P$-полная задача вычисления всех выполняющих подстановок для логического уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Предлагается новый способ ее решения за счет приведения к задаче вычисления такого множества U, что $U = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Здесь $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — формула алгебры множеств, изоморфная $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и X_n — заранее известные множества. Переменные x_n в логическом уравнении являются характеристическими функциями для множеств X_n из второго равенства, которое названо МЛ-уравнением.

Ключевые слова и фразы: логические уравнения, силлогистика, алгебраическая онтология, алгебраическая система, непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле, булева алгебра.

Введение

Следуя А. Тарскому [1] в том, что истинностное значение формулы соответствует понятию выполнимости ее образа в области интерпретации, введено новое понятие — непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле (НЛССС), позволяющее построить непарадоксальную логику на основе нового базиса силлогистики

$$NOB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X = U, X \subset U \rangle$$

с интерпретацией в алгебре множеств. Ортогональный базис силлогистики

$$OB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y) \rangle$$

введен автором в работах [2, 3] как альтернатива базису Аристотеля для традиционной силлогистики (ТС)

$$A_S = \langle AXY, EXY, IXY, OXY \rangle,$$

G_1:	X	■
	Y	■
G_2:	X	■
	Y	=
G_3:	X	■■
	Y	=■
G_4:	X	==
	Y	■■
G_5:	X	=■
	Y	■■
G_6:	X	=■
	Y	■=
G_7:	X	=■■
	Y	■■=
G_8:	X	=
	Y	=
G_9:	X	=■
	Y	=■
G_{10}:	X	=■
	Y	==
G_{11}:	X	=■■
	Y	==■
G_{12}:	X	===
	Y	=■■
G_{13}:	X	==■
	Y	=■■
G_{14}:	X	==■
	Y	■==
G_{15}:	X	==■■
	Y	=■=■

Рис. 1. Модельные схемы отражающие отношения между объемами терминов X, Y

который состоит из четырех категорических суждений [4] и имеет неоднозначную интерпретацию в семи расширенных Жергонновых отношениях, входящих в состав 15 модельных схем, введенных в работе [4], смотри рис. 1. Если пополнить OB_S двумя суждениями, то в новом односмысловом базисе силлогистики (NOB_S) можно выразить все пятнадцать модельных схем с рис. 1. Суждения $A(X,Y)$ и $Eq(X,Y)$ выражают смысл Жергонновых отношений $G_{13}(X,Y)$ и $G_9(X,Y)$, а суждение $IO(X,Y)$ — «некоторые X есть Y и некоторые не X есть Y и некоторые не X есть Y и некоторые не X есть не Y» выражает Жергонново отношение $G_{15}(X,Y)$.

Схемы с непустыми и не универсальными модельными множествами уместно назвать невырожденными, а остальные схемы вырожденными Жергонновыми отношениями. Невырожденные отношения выражаются в OB_S, а вырожденные в NOB_S. В работе решается задача поиска общих и частных решений МЛ-уравнений (нетождественных равенств) [5]

$$F\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = U, \tag{1}$$

в которых левая часть есть ППФ алгебры множеств, построенная на модельных множествах, а правая есть универсум. К виду (1) также сводится нетождественное равенство вида (2)

$$F_1(\tilde{X_n}) = F_2(\tilde{X_n}), \tilde{X_n} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}. \tag{2}$$

К рассматриваемой задаче сводится задача верификации НЛССС для посылок и следствия выраженных суждениями NOB_S и задача решения логических уравнений $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 1$.

Переменные x_n в логическом уравнении являются характеристическими функциями для множеств X_n из уравнения (1).

1. Алгебраическая онтология как логико-семантическая модель

Определение 1. *Непарадоксальным логическим следованием в семантическом смысле (НЛССС) называется отношение между высказываниями в виде формул G и B, отображающее тот факт, что если G и B выполнимые формулы (не законы и не противоречия), то в силу только их логической структуры нельзя приписать высказыванию G значение «истинно»(выполнено), не будучи быть вынужденным приписать значение «истинно»(выполнено) B. Обозначим НЛССС как $\vDash_N$, его отсутствие как $\nvDash$* [1].

Рассмотрим модель которая задает n-арное логическое отношение между модельными множествами. Обозначим через $B(\tilde{X}_n)$ семейство из всех подмножеств универсума, которые могут быть построены из конечной системы $\tilde{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, образующих множеств, являющихся подмножествами универсума, посредством операций объединения, пересечения и дополнения до универсума. Семейство $B(\tilde{X}_n)$ — основа, включает также универсум и пустое множество. Всего можно составить не более чем 2^n конституент. Конституенты являются элементарными «кирпичиками», из которых составляются подмножества основы; если занумеровать надлежащим образом конституенты, то универсум можно рассматривать как множество номеров конституент. Нумерацию конституент

$$X_1{}^{\sigma_1} \cdot X_2{}^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_n{}^{\sigma_n}, X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \sigma_i = 1, \\ X_i{}', & \sigma_i = 0 \end{cases}$$

для вычисления множества выражаемого конституентой удобно производить зафиксировав порядок индексов модельных множеств. При заданном порядке каждой конституенте (полной конъюнкции) можно сопоставить набор из нулей и единиц $\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$ и соответствующее ему десятичное число, которое будем называть индикатором (номером) конституенты. Рассмотрим алгебраическую систему (3)

$$\langle B(\tilde{X}_n), \quad \mathrm{W}_F, \quad \mathrm{W}_R \rangle, \tag{3}$$

[1] Из девяти возможных комбинаций (закон T, противоречие F, выполнимость P) между посылкой и следствием в отношении НЛССС может находиться только одна комбинация $P \vDash_N P$.

где W_F=$\{+,\cdot,'\}$, W_R=$\{=,\subset\}$ [2]. В алгебре логики конституенты

$$x_1{}^{\sigma_1}\cdot x_2{}^{\sigma_2}\cdot\dots\cdot x_n{}^{\sigma_n}, x_i^{\sigma_i}=\begin{cases} x_i, & \sigma_i, \ =1\\ x_i{}', & \sigma_i=0,\end{cases}$$

принято называть полными конъюнкциями операции $\{+,\cdot,'\}$ есть логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Определение 2. *Единицей M алгебраической системы (АС) (3) или характеристическим множеством, называется семейство непустых конституент данной системы.*

Базовой системой номеров $BSN(U)$ универсума называется множество номеров конституент единицы алгебраической системы. Базовую систему номеров также будем называть конституентным множеством.

Нулем N алгебраической системы (3) или дополнением единицы, будем называть семейство ее пустых конституент.

Базовой системой номеров $BSN(X)$ любого непустого множества X из $B(\tilde{X}_n)$ будем называть множество номеров (индикаторов) непустых конституент из характеристического множества, таких, что объединение этих конституент совпадает с данным множеством[3].

По аналогии с бинарными логическими отношениями $A(X,Y)$; $Eq(X,Y)$; $IO(X,Y)$, введем понятие n-арного логического отношения. Оно задается с помощью алгебраической системы (3), путем указания номеров конституент ее единицы (M).

Определение 3. *АС (3) с фиксированным порядком индексов модельных множеств полностью определяется кортежем (4)*

$$I=\langle U,X_1,X_2,\cdots,X_n\rangle, M(I)=U \tag{4}$$

который мы будем называть n-арным логическим отношением между модельными множествами или алгебраической онтологией (А-онтологией)[4].

---

[2]W_F=$\{+,\cdot,'\}$-операции объединение, пересечение, дополнение до универсума алгебры множеств

[3]Далее, если это специально не оговорено будем считать, что в (3) все множества и универсум заданы в виде BSN, то есть как конституентные множества.

[4]Наглядно А-онтологию будем изображать в виде линейной диаграммы (смотри рисунки 2, 3), которая является дискретным аналогом диаграммы Венна.

```
Ur =   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
X1 = |================■■■■■■■■■■■■■■■■|
X2 = |========■■■■■■■■========■■■■■■■■|
X3 = |====■■■■====■■■■====■■■■====■■■■|
X4 = |==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■|
```

Рис. 2. Каноническая А-онтология для $n = 4$

А-онтологию $I^0 = \langle U^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0 \rangle$, у которой все конституенты не пусты, будем называть канонической. Отношение, задаваемое канонической А-онтологией, будем называть отношением независимости в совокупности n-модельных множеств.

Очевидно, что $M(I^0) = U^0 = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, смотри рис. 2.

Теорема 1. *Для А-онтологии I с n модельными множествами и универсумом $U(I)$ выполняются соотношения* (5)

$$
\begin{aligned}
&1.\ M = \cup\{i\}, K(i) \neq \emptyset,\\
&2.\ N = \{ \bigcup_{i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\} \setminus M} K(i) \},\\
(5)\qquad &3.\ N = \{ \bigcap_{i \in M} D(i') \}; i = 2^n - i' - 1, i' = 2^n - i - 1,\\
&4.\ M = \{ \bigcap_{i \in N} D(i') \}),\\
&5.\ X_i = U(I) \cdot X_i^0 = M \cdot {X_i}^0, i = \overline{1, n};
\end{aligned}
$$

X_i^0-термины канонической А-онтологии, $D(i') = K(i)'$ — дизституента, двойственная i-ой конституенте[5].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно заметить, что множество $D(i') = U \setminus \{i\}$, здесь $U^0 = M(I^0)$ — единица канонической А-онтологии.

Из соотношения (5) теоремы 1 следует, что объемы модельных множеств А-онтологии полностью определяются ее единицей.

Определение 4. *Полный набор (множество всех) бинарных отношений между модельными множествами для заданной А-онтологии I будем называть полным бинарным инвариантом $BIN(I)$, определяемого А-онтологией n-арного логического отношения. Если набор неполный (входящие в него бинарные отношения заданы не для всех возможных сочетаний модельных множеств), то такой набор называется неполным бинарным инвариантом $nBIN(I)$.*

---

[5] Принцип нумерации дизституент такой же как у конституент. Порецкий П.С. называл дизституенты в своей работе [6] продуцентами.

```
Ur =   5  7  8  9 12 13 15          Ur =   5  7  8  9 12 15
X1 = |====■■■■■■■■■■|                X1 = |====■■■■■■■■|
X2 = |■■■■=====■■■■■■|               X2 = |■■■■=====■■■■|
X3 = |==■■==========■■|              X3 = |==■■========■■|
X4 = |■■■■==■■==■■■■|                X4 = |■■■■==■■==■■|
```

Рис. 3. Иллюстрация понятия *бинарный инвариант*

Доказано, что в каждый BIN входит максимальная по числу конституент А-онтология, при этом добавление к ее единице любой непустой конституенты выводит максимальную А-онтологию из данного BIN.

Замечание 1. *Логическое содержание максимальной А-онтологии выражается ее BIN. Логическое содержание не максимальной А-онтологии с данным BIN выражается конъюнкцией суждений ее BIN в совокупности с суждениями NOB_S, выражающими пустоту констиуент, которые не входят в данную А-онтологию по сравнению с максимальной.*

Бинарный инвариант $BIN = \{A(X_1', X_2);\ IO(X_1, X_2); A(X_1', X_4); A(X_2', X_3');\ IO(X_2, X_3);\ A(X_3, X_4)\}$ *определяет две А-онтологии одна из которых максимальная (рис. 3).*

А-онтология I позволяет выразить n-арное логическое отношение в виде суждения NOB_S

$$F(X_n) = M(I),$$

называемого далее МЛ-уравнением, где $F(\tilde{X}_n)$ — ППФ алгебры множеств.

Модельные множества, выраженные номерами конституент, и вся А-онтология могут быть представлены совершенной нормальной формой Кантора ($SNFK$). Например, левая А-онтология рис. 3 представляется как МЛ-уравнение с левой частью в форме $SNFK$:

$$\begin{array}{l} X_1{}' \cdot X_2 \cdot X_3{}' \cdot X_4 + X_1{}' \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_4{}' + \\ X_1 \cdot X_2' \cdot X_3{}' \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4{}' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3{}' \cdot X_4 + \\ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 = U \end{array}, \tag{6}$$

либо через равносильную левой части этого равенства ППФ, например, $X_1 \cdot X_3{}' + X_2 \cdot X_4 = U$.

2. Исчисление конституентных множеств

Для того, чтобы доказать функциональную полноту NOB_S и иметь возможность построения А-онтологии с наперед заданными свойствами, построено исчисление конституентных множеств. Теорема 2 позволяет последовательно вводить в исходную А-онтологию бинарные отношения (суждения NOB_S).

Теорема 2.

(1) *Чтобы ввести в n-арную А-онтологию отношение $X \subset U$, достаточно добавить к ее единице хотя бы одну конституенту с номером из множества номеров конституент, образующих множество $X\ ' = U^0 \setminus X$, где U^0 — универсум n-арной канонической А-онтологии.*

(2) *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = U$ необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X\ ' = U \setminus X$.*

(3) *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X \subset Y$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент, образующих множество $X \cdot Y\ '$.*

(4) *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = Y$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент, образующих множество $X\ ' \cdot Y + X \cdot Y\ '$.*

(5) *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $IO(X, Y)$, достаточно добавить в нее хотя бы по одной конституенте с номерами из тех множеств $X\ ' \cdot Y\ '$, $X\ ' \cdot Y$, $X \cdot Y\ '$, $X \cdot Y$, которые являются в ней пустыми.*

На основе теорем исчисления конституентных множеств разработан М-алгоритм вычисления А-онтологии I и ее универсума (единицы $M(I)$) для конъюнкции суждений NOB_S [2].

Следствие 1. *Доказано, что модифицированная А-онтология, получаемая в результате введения в исходную А-онтологию отношения $X \subset Y$ или $X = Y$, является максимальной по числу непустых конституент среди всех А-онтологий, имеющих одинаковый с ней BIN. То есть, применяемый для ведения этих отношений М-алгоритм производит удаление минимального числа конституент, для выполнения вводимого логического отношения.*

$Ur =$ 0 2 4 6 7
$X_1 =$ |====■■■■■■|
$X_2 =$ |==■■==■■■■|
$X_3 =$ |========■■|

Рис. 4. А-онтология соответствующая суждению (8)

На основании теорем исчисления конституентных множеств и свойств М-алгоритма доказана

Теорема 3. *Имеет место функциональная полнота простых суждений* ***нового базиса силлогистики****, то есть любая А-онтология может быть выражена конъюнкцией суждений* NOB_S.

На рис. 3 левая А-онтология — максимальная (добавление к ее единице нового конституентного номера изменяет BIN). М-алгоритм строит максимальную А-онтологию по конъюнкции суждений NOB_S, поэтому ее логическое содержание может быть выражено конъюнкцией суждений BIN как

$$A(X_1', X_2) \cdot IO(X_1, X_3) \cdot A(X_1', X_3) \cdot A(X_2', X_3') \cdot IO(X_2, X_4) \cdot A(X_3, X_4).$$

Для того, чтобы выразить логическое содержание правой А-онтологии в NOB_S, нужно добавить к данной конъюнкции еще один множитель $D(2) = U$, который утверждает пустоту конституенты с номером 13, $13' = 2^4 - 13 - 1 = 2$, $D(2) = (X_1' + X_2' + X_3 + X_4') = U$.

Рассмотрим совершенную нормальную форму Кантора (СНФК), представленную объединением семейства конституент

$$(7)\quad X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' + X_1' \cdot X_2' \cdot X_3' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1' \cdot X_2 \cdot X_3' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3'.$$

Если число составляющих ее конституент меньше 2^n, то ей можно сопоставить нетождественное равенство (МЛ-уравнение)

$$(8)\quad \underbrace{X_1 \cdot X_2' \cdot X_3'}_{4} + \underbrace{X_1' \cdot X_2' \cdot X_3'}_{0} + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}_{7} + \underbrace{X_1' \cdot X_2 \cdot X_3'}_{2} + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3'}_{6} = U,$$

в котором левую часть нельзя тождественно привести к правой. МЛ-уравнение, как суждение NOB_S, характеризуется единицей $M = U = \{0, 2, 4, 6, 7\}$, сопоставленной ему посредством М-алгоритма. Этой единице соответствует А-онтология, изображенная на рис. 4.

Рассмотрим СНФК

$$SNFK = \bigcup_{i \in M(I) \subset \{0,1,2,\ldots,2^n-1\}} \mathbf{K}(i),$$

построенную по единице $M(I)$ неканонической А-онтологии I. Все ППФ алгебры множеств $F_i(\tilde{X}_n)$ такие, что

$$F_i(\tilde{X}_n) \equiv SNFK, \quad i = \overline{1, m},$$

образуют *класс эквивалентности.* Из них можно составить m МЛ-уравнений вида (9)

$$F_i(\tilde{X}_n) = U, \; i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{9}$$

Каждое утверждение NOB_S (9) выполняется, тогда и только тогда, когда $M(F_i(\tilde{X}_n) = U) = M(I)$.

Класс эквивалентности (9) называется *общим решением*, определяющим все равносильные следствия исходного МЛ-уравнения.

Частным решением называются его нетождественные следствия (МЛ-уравнения), которые не равносильны исходному и несут только не тождественную часть логического содержания[6] исходного.

Определение 5. *А-онтологии I можно сопоставить МЛ-уравнение $SNFK(I) = U$. Выразим равносильное ему МЛ-уравнение через нуль $N(I) = U^0 \setminus M(I)$ в виде конъюнкции утверждений (10) из суждений NOB_S:*

$$\big(D(i'_1) = U\big) \cdot \big(D(i'_2) = U\big) \cdot \ldots \cdot \big(D(i'_k) = U\big), \tag{10}$$

где $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = N(I)$, $i_j = 2^n - 1 - i'_j$, $j = \overline{1, k}$. Каждый «множитель» этой конъюнкции выражает пустоту одной из конституент, входящих в $N(I)$. Будем называть конъюнкцию (10) канонической формой логического содержания А-онтологии I.

Конъюнкция утверждений NOB_S (10) равносильна одному утверждению (11):

$$\Big(\bigcap_{i \in N(I)} D(i')\Big) = U, \tag{11}$$

где $i' = 2^n - i - 1$. Левая часть этого равенства выражает единицу А-онтологии I:

$$M(I) = \bigcap_{i \in N(I)} D(i'). \tag{12}$$

Из введенного понятия НЛССС и теорем исчисления конституентных множеств вытекает

---

[6] Логическое содержание можно выразить различными способами, например на основе $BIN(I)$.

$Ur =$ 0 4 5 6 7 8 12 13 16 20 22 24 28
$X_1 =$ |================■■■■■■■■■■|
$X_2 =$ |==========■■■■■■======■■■■|
$X_3 =$ |==■■■■■■■■==■■■■==■■■■==■■|
$X_5 =$ |====■■==■■====■■==========|

Рис. 5. А-онтология I_1

Теорема 4. *Логическое содержание А-онтологии I_2 — $Log(I_2)$, является частью логического содержания А-онтологии I_1 — $Log(I_1)$, тогда и только тогда, когда их единицы (объемы универсумов) находятся в соотношении $M(I_1) \subseteq M(I_2)$. При этом строгое включение выполняется только тогда, когда*

$$\big(Log(I_1) \vDash_N Log(I_2)\big) \cdot \big(Log(I_2) \nvDash Log(I_1)\big).$$

Теорема 4 позволяет находить частные решения для МЛ-уравнения с набором n переменных $\tilde{X_n}$ в виде МЛ-уравнения тоже с набором n переменных, а также проверять является ли данное МЛ-уравнение частным решением МЛ-уравнения с таким же числом переменных. Для проверки является ли МЛ-уравнение $F_2(\tilde{X_m}) = U$ следствием МЛ-уравнения $F_1(\tilde{X_n})$ в случае, когда $(\tilde{X_n})$ и $(\tilde{X_m})$ являются несовпадающими, их приводят к одной системе переменных.

Пусть логическое содержание А-онтологии I_1 определяет левая часть равенства (13) и у I_2 МЛ — уравнение (14). Покажем, что МЛ-уравнение (14) есть частное решение МЛ-уравнения

$$SNFK(I_1) = U,$$

которое можно получить, вычислив $M(I_1)$ посредством М-алгоритма. Отметим, что левая часть МЛ-уравнения (14) при непустых и неуниверсальных G, S, X, Y, равносильна отношению $A(A \cdot D', E')$, которое выполняется в А-онтологии I_1 (смотри рис. 5):

$$Eq(E, C \cdot E) \cdot Eq(D, D \cdot C) \cdot Eq(E, A' \cdot E) \cdot Eq(D, D \cdot B') = U, \tag{13}$$

$$\big((A \cdot D')' + E'\big) = U. \tag{14}$$

Представим суждение (13) посредством М-алгоритма как МЛ-уравнение, которое изображено в виде единицы А-онтологии на рис. 5.

Приведенное уравнение (14) примет вид (15)

$$\big((A \cdot D')' + E'\big) \cdot (B + B') \cdot (C + C') = U. \tag{15}$$

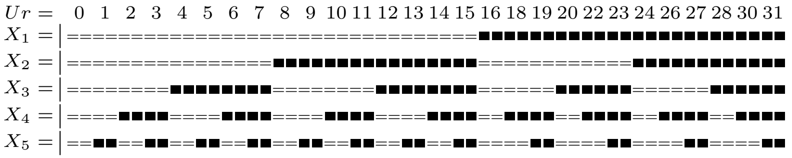

Рис. 6. А-онтология I_2

Построим с помощью М-алгоритма А-онтологии I_1 и I_2 (рис. 5 и 6 соответственно). Видно, что МЛ-уравнение (14) есть частное решение для (13), так как $M(I_1) \subset M(I_2)$.

3. Решение логического уравнения путем вычисления единицы соответственного МЛ-уравнения

МЛ-уравнению $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = U$ можно однооднозначно сопоставить логическое уравнение $F(\tilde{x}_n) = 1$ (булевы переменные x_i, $i = 1, \ldots, n$, являются характеристическими функциями модельных множеств X_i). Посредством применения М-алгоритма для вычисления объема единицы $M\Big(F(\tilde{X}_n) = U\Big)$ разработан алгоритм поиска поиска всех выполняющих подстановок для $F(\tilde{x}_n) = 1$. М-алгоритм можно эффективно распараллелить. При этом доказано, что

$$M\big(F(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = F(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0), \tag{16}$$

где $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ — модельные множества канонической n-арной А-онтологии.

Пример 1. *Пусть дано уравнение* $x_2 \sim x_3 + (x_1 \Rightarrow x_3)' = 1$. *Приведем его к базису «и, или, не»,*

$$x_2 \sim x_3 + x_1 \Rightarrow x_3 \equiv x_2' \cdot x_3' + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3\ ' = 1.$$

Соответственное ему МЛ-уравнение имеет вид

$$X_2' \cdot X_3' + X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_3\ ' = U.$$

По формуле (16) *при*

$I_3^0 = \langle\{U^0 = \{0..7\},\ X_1^0 = \{4,5,6,7\},\ X_2^0 = \{2,3,6,7\},\ X_3^0 = \{1,3,5,7\}\rangle$

имеем

$$\begin{aligned} &X_2' \cdot X_3' + X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_3' \\ = \{0,1,4,5\} \cdot \{0,2,4,6\} &+ \{2,3,6,7\} \cdot \{1,3,5,7\} + \{4,5,6,7\} \cdot \{0,2,4,6\} \\ &= \{0,4\} + \{3,7\} + \{4,6\} = \{0,3,4,6,7\}. \end{aligned}$$

```
Ur=    0 1 4 5 8 910111213141516172021242526272829303142434647585962 63
X1 = |================================================■■■■■■■■■■■■■■■■|G
X2 = |========================■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■========■■■■■■■■|S
X3 = |========■■■■■■■■■■■■■■■■========■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■|X
X4 = |====■■■■========■■■■■■■■====■■■■========■■■■■■■■====■■■■====■■■■|Y
X5 = |============■■■■====■■■■============■■■■====■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■|Z
X6 = |==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■==■■|T
IO(X1,SX2  A(X1, X3)  IO(X1,X4)  A(X1, x5)  IO(X1,X6) IO(X2,X3)  IO(X2,X4
IO(X2,X5)  IO(X2, X6)  IO(X3,X4)  A(X3^,X5^)  IO(X3,X6)  IO(X4,X5)  IO(X4,X6)  IO(X5,X6)

         0               1            2             3        4     5     6     7
Ur=    0 1 4 5   8 9101112131415  16172021  2425262728293031    42434647    58596263
X1 = |========  ================  ========  ================    ■■■■■■■■    ■■■■■■■■|G
X2 = |========  ================  ■■■■■■■■  ■■■■■■■■■■■■■■■■    ========    ■■■■■■■■|S
X3 = |========  ■■■■■■■■■■■■■■■■  ========  ■■■■■■■■■■■■■■■■    ■■■■■■■■    ■■■■■■■■|X
X4 = |====■■■■  ========■■■■■■■■  ====■■■■  ========■■■■■■■■    ====■■■■    ====■■■■|Y
X5 = |========  ====■■■■====■■■■  ========  ====■■■■====■■■■    ■■■■■■■■    ■■■■■■■■|Z
X6 = |==■■==■■  ==■■==■■==■■==■■  ==■■==■■  ==■■==■■==■■==■■    ==■■==■■    ==■■==■■|T
IO(X1,SX2  A(X1, X3)  IO(X1,X4)  A(X1, x5)  IO(X1,X6) IO(X2,X3)  IO(X2,X4  IO(X2,X5)
IO(X2, X6)  IO(X3,X4)  A(X3^,X5^)  IO(X3,X6)  IO(X4,X5)  IO(X4,X6)  IO(X5,X6)
```

Рис. 7. Возможность поблочного вычисления единицы А-онтологии

Проверим. Левая часть исходного МЛ-уравнения равносильна СНФК

$$\underbrace{X_1 \cdot X_2' \cdot X_3'}_{4} + \underbrace{X_1' \cdot X_2' \cdot X_3'}_{0} + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}_{7} + \underbrace{X_1' \cdot X_2 \cdot X_3}_{3} + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3'}_{6},$$

поэтому единица соответственного МЛ-уравнения равна

$$M = \{0, 3, 4, 6, 7\}.$$

Тот же результат дает применение М-алгоритма к суждению $X_2' \cdot X_3' + X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_3\ ' = U$. *Отсюда следует, что полный набор выполняющих подстановок для исходного логического уравнения есть*

$$\{\underbrace{\langle 0, 0, 0, \rangle}_{0}, \underbrace{\langle 0, 1, 1\rangle}_{3}, \underbrace{\langle 1, 0, 0\rangle}_{4}, \underbrace{\langle 1, 1, 0\rangle}_{6}, \underbrace{\langle \{1, 1, 1\}\rangle}_{7}.$$

Алгоритм поиска всех выполняющих подстановок для логического уравнения может быть эффективно распараллелен. Из верхней части рис. 7, построенного реализующей М-алгоритм программой, видно, что в исходной канонической онтологии можно выделить 8 блоков:

$$\underbrace{[0..7]}_{0}, \underbrace{[8..15]}_{1}, \underbrace{[16..23]}_{2}, \underbrace{[24..31]}_{3}, \underbrace{[32..39]}_{4}, \underbrace{[40..47]}_{5}, \underbrace{[48..55]}_{6}, \underbrace{[56..63]}_{7}.$$

Она приведена к данной онтологии путем введения двух отношений $A(X1, X3)$ и $A(X5, X3)$. Из второй части рисунка видно, что в итоговой онтологии блоки с номерами 4 и 6 — пустые множества, в остальных блоках либо выполняются отношения $A(X1, X3)$ и $A(X5, X3)$, либо не противоречащие им отношения $Eq(X1, X3), Eq(X5, X3)$.

Программно реализовано поблочное вычисление для 22 переменных.

Предложенный способ нахожения всех выполняющих подстановок может быть использован в алгоритмах построения декомпозиционных множеств, для крупноблочного распараллеливания SAT-задач и их решения в распределенных вычислительных средах [7].

4. Заключение

В последнее время высокими темпами развиваются параллельные SAT-решатели ([7], [8], [9], [10]). Многие важные прикладные задачи могут быть эффективно сведены к задаче о булевой выполнимости (SAT) [11]. Несмотря на то, что SAT является NP-полной задачей, за последние 15 лет был достигнут значительный прогресс в алгоритмике SAT-решателей. Принципы распараллеливания впервые изложены в работе [12]. Все до настоящего времени используемые алгоритмы ориентированы на поиск отдельных выполняющих подстановок.

В отличии от них в работе предложен новый, обладающий возможностью параллельного выполнения алгоритм поиска *всех* выполняющих подстановок для логического уравнения, который позволяет без логического вывода устанавливать НЛССС между ними.

Благодарности. Автор искренне благодарен Николаю Николаевичу Непейводе за конструктивное обсуждение и ценные замечания по результатам докладов автора на НСКФ-2015 и семинаре ИПС РАН.

Список литературы

[1] A. Tarsky. “The semantic conception of truth and the foundations of semantics”, *Philosophy and Phenomenology Research*, **4**:3 (1944), pp. 341–376. ↑ 99

[2] Ю. М. Сметанин. «Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств», *Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **4** (2010), с. 172–185. ↑ 99,105

[3] Ю. М. Сметанин. «Многозначная пропозициональная логика с непарадоксальным логическим следованием», *Девятые Смирновские чтения по логике*, Материалы Международной научной конференции (Москва, 19–21 июня 2015 г.), ред. Маркин В. И., Герасимова И. А., Зайцев Д. В., Карпенко А. С., Григорьев О. М., Томова Н. Е., «Современные тетради», 2015, с. 160. ↑ 99

[4] В. А. Бочаров, В. И. Маркин. *Силлогистические теории*, Прогресс-Традиция, М., 2010, 336 с. ↑ 100

[5] Ю. М. Сметанин. «Решение логических равенств Порецкого в модели на основе алгебраической системы», *Теория управления и моделирование*, Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9–11 июня 2015 г.), Изд-во «Удмуртский университет», Ижевск, 2015, с. 299–301. ↑ 100

[6] П. С. Порецкий, *О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики*, Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Т. 2, Казань, 1884, 170 с. ↑ 103

[7] А. А. Семенов. «Декомпозиционные представления логических уравнений в задачах обращения дискретных функций», *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2009, №5, с. 47–61. ↑ 111

[8] L. Gil, P. Flores, L. M. Silveira. “PMSat: a parallel version of MiniSAT”, *Journal on Satis fiability, Boolean Modeling and Computation*, **6** (2008), pp. 71–98. ↑ 111

[9] T. Schubert, M. Lewis, B. Beck. “PaMiraXT: Parallel SAT Solving with Threads and Message Passing”, *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation*, **6** (2009), pp. 203–222. ↑ 111

[10] О. С. Заикин, А. А. Семенов. «Применение метода Монте-Карло к прогнозированию времени параллельного решения проблемы булевой выполнимости», *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*, **15**:1 (2014), с. 22–35. ↑ 111

[11] О. С. Заикин, И. В. Отпущенников, А. А. Семенов. «Параллельные алгоритмы решения SAT в применении к оптимизационным задачам с булевыми ограничениями», *Параллельные вычислительные технологии*, Труды V Международной конференции ПАВТ 2011, МГУ, М., 2011, с. 501–508. ↑ 111

[12] M. Bohm, E. Speckenmeyer. “A fast parallel SAT solver — efficient workload balancing”, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **17** (1996), pp. 381–400. ↑ 111

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. Н.Н. Непейвода*

Об авторе:

Юрий Михайлович Сметанин

Преподаватель математики. Область научных интересов – прикладная логика. Разработал исчисление констиуентных множеств, которое позволяет алгоритмически верифицировать логическое следование в неклассической пропозициональной логике, сводя его к проверке включения одного множества в другое.

e-mail: gms1234gms@rrambler.ru

Пример ссылки на эту публикацию:

Ю. М. Сметанин. «Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений», *Программные системы: теория и приложения*, 2016, **7**:1(28), с. 99–115.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf

Yurii Smetanin. *Non-paradoxical logical consequence and the problem of solving ML-equations.*

Abstract. Abstract. In this paper we consider a $\#P$-complete problem of calculating all performing substitutions for a Boolean equation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. We propose a new way to solve this problem by its reduction to a problem of determination of a set U, such that $U = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, where $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is a set algebra formula which is isomorphic to $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and X_n are known sets. Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of a logical equation are characteristic functions for the sets $X_1, X_2, \ldots, X_n$ from the second equality which is referred to as ML-equation. (*In Russian*).

Key words and phrases: logical equations, syllogistics, algebraic ontology, algebraic system, non-paradoxical logical consequence in the semantic sense, Boolean algebra.

References

[1] A. Tarsky. "The semantic conception of truth and the foundations of semantics", *Philosophy and Phenomenology Research*, **4**:3 (1944), pp. 341–376.

[2] Yu. M. Smetanin. "Algorithm for solving polisillogizm in the orthogonal basis by calculating the constituent sets", *Vestn. Udmurt·sk. un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, **4** (2010), pp. 172–185 (in Russian).

[3] Yu. M. Smetanin. "Polysemantic propositional logic with not paradoxical logical implication", *Devyatyye Smirnovskiye chteniya po logike*, Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Moskva, 19–21 iyunya 2015 g.), eds. Markin V. I., Gerasimova I. A., Zaytsev D. V., Karpenko A. S., Grigor'yev O. M., Tomova N. Ye., "Sovremennyye tetradi", 2015, pp. 160 (in Russian).

[4] V. A. Bocharov, V. I. Markin. *Syllogistic theories*, Progress-Traditsiya, M., 2010 (in Russian), 336 p.

[5] Yu. M. Smetanin. "Solving Poretsky's logical equations in a model based on an algebraic system", *Teoriya upravleniya i modelirovaniye*, Tezisy dokladov Vserossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem, posvyashchennoy pamyati professora N. V. Azbeleva i professora Ye. L. Tonkova (Izhevsk, Rossiya, 9–11 iyunya 2015 g.), Izd-vo "Udmurtskiy universitet", Izhevsk, 2015, pp. 299–301 (in Russian).

[6] P. S. Poretskiy, *On the ways to solve logical equation and one return method in mathematical logic*, Sobraniye protokolov zasedaniy sektsii fiziko-matematicheskikh nauk obshchestva yestestvoispytateley pri Kazanskom universitete. V. 2, Kazan', 1884 (in Russian), 170 p.

[7] A. A. Semenov. "Decomposition representations of logical equations in problems of inversion of discrete functions", *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **48**:5 (2009), pp. 718–731.

[8] L. Gil, P. Flores, L. M. Silveira. "PMSat: a parallel version of MiniSAT", *Journal on Satis fiability, Boolean Modeling and Computation*, **6** (2008), pp. 71–98.

[9] T. Schubert, M. Lewis, B. Beck. "PaMiraXT: parallel SAT solving with threads and message passing", *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation*, **6** (2009), pp. 203–222.

[10] O. S. Zaikin, A. A. Semenov. “Application of the Monte Carlo method for estimating the total time of solving the SAT problem in parallel”, *Vychisl. Metody Programm.*, **15**:1 (2014), pp. 22–35 (in Russian).
[11] O. S. Zaikin, I. V. Otpushchennikov, A. A. Semenov. “Parallel algorithms of solving SAT as applied to optimization problems with Boolean constraints”, *Parallel’nyye vychislitel’nyye tekhnologii*, Trudy V Mezhdunarodnoy konferentsii PAVT 2011, MGU, M., 2011, pp. 501–508 (in Russian).
[12] M. Bohm, E. Speckenmeyer. “A fast parallel SAT solver — efficient workload balancing”, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **17** (1996), pp. 381–400.

Sample citation of this publication:

Yurii Smetanin. “Non-paradoxical logical consequence and the problem of solving ML-equations”, *Program systems: theory and applications*, 2016, **7**:1(28), pp. 99–115. (*In Russian*).
URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf