

М. В. Нецадим

СФЕРИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ*

Решена задача описания амплитуд обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения для фазовых функций типа сферической волны.

Ключевые слова: волновое уравнение, обобщенные функционально-инвариантные решения.

Введение

Относительно неискажающимися волнами называются [1] решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, \quad c = \text{const} > 0, \quad (1)$$

вида

$$u = gf(\theta), \quad (2)$$

где функции $\theta = \theta(x, y, z, t)$ и $g = g(x, y, z, t)$ — соответственно фаза и амплитуда — фиксированы, а форма волны f — произвольная функция одного переменного. Н. П. Еругин [2] называет решения такого вида обобщенными функционально-инвариантными решениями (ОФИР). Данное определение, очевидно, переносится на случай любого числа $n \geq 1$ пространственных переменных, и, более того, определение ОФИР может быть дано для любой системы дифференциальных уравнений.

Классические примеры явных решений вида (2) — это плоские и сферические волны

$$u = f(z - ct) \quad \text{и} \quad u = \frac{f(R - ct)}{R}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

с $\theta = z - ct$, $g = 1$ и $\theta = R - ct$, $g = \frac{1}{R}$ соответственно; они восходят к д'Аламберу и Эйлеру [1].

Если амплитуда постоянна ($g = 1$), то получаем определение функционально-инвариантного решения (ФИР). Так, например, в работе С. Л. Соболева [3] доказано, что все ФИР уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$

даются формулой Смирнова–Соболева [4; 5]

$$t\sqrt{a^2(u) + b^2(u)} + xa(u) + yb(u) = c(u),$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Математического отделения РАН (проект 1.3.1–2012), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект 44–2012).

где a, b, c — произвольные функции переменной u .

Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах Н. П. Еругина, М. М. Смирнова, Л. М. Галонен, О. Ф. Меньших, М. С. Шнеерсон [2; 6; 7].

В связи с построением частицеподобных решений уравнения (1) в работе [8] возник интерес к решению Бейтмена [9], в котором

$$\theta = z - t + \frac{x^2 + y^2}{z + ct}, \quad g = \frac{1}{z + ct} \quad (4)$$

(точнее к его комплексифицированным версиям, простейшая из которых получается заменой $z + ct \mapsto z + ct - i\varepsilon$, $\varepsilon = \text{const} > 0$). Для решений (3), (4) фаза не определяет амплитуду единственным образом. В плоской волне можно умножить g на произвольную гармоническую функцию от x и y [10], а в сферической — на любую функцию гармоническую на сфере. Аналогичное утверждение для решений Бейтмена приведено в [11].

Менее известно классическое решение вида (2), описывающее цилиндрические волны, найденное впервые Пуассоном [9] и переоткрытое Вольтерра [12],

$$u = \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sqrt{r}} f(r - ct), \quad (5)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/r)$. Отметим, что выбор в (5) в качестве f дельта-функции дает решение двумерного волнового уравнения, не обладающее диффузией.

В работе [13] приводится решение

$$u = (A + Bz) \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(i\varphi/2) f(r - ct)$$

уравнения (1). Здесь A, B — произвольные константы, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/r)$, $f(\xi)$ — произвольная функция одного аргумента. Отметим также работы [14–16], в которых построены классы ОФИР волнового уравнения.

Вопросы, связанные с описанием и классификацией фаз и отвечающих им амплитуд, по-видимому, тесно связаны с геометрией. Так, например, Ф. Г. Фридлендер [10] показал, что для фаз вида $\theta = t - h(x, y, z)$, где h вещественно, линии уровня функции $h(x, y, z)$ являются алгебраическими поверхностями 4-го порядка, известными как циклиды Дюпена, и их вырожденными формами. В работах Ю. Е. Аниконова и М. В. Нецадима [17–20] построены классы уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, допускающие ОФИР, и получены некоторые приложения к обратным задачам.

В данной работе рассматривается задача полного описания амплитуд для фазовых функций типа сферической волны. Все функции в работе предполагаются вещественными и достаточно гладкими.

1. Сферические волны

Пусть фазовая функция имеет вид $\theta = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} - t$ сферической волны, $n \geq 2$.

Справедлива следующая теорема.

Общее решение (11) можно представить в виде

$$g = r^{\frac{1-n}{2}} G(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \theta),$$

где $\theta = r - t$. Подставим это представление для g в (9). Имеем

$$\Delta g = r^{\frac{1-n}{2}} \Delta G + G \Delta r^{\frac{1-n}{2}} + 2 \langle \nabla r^{\frac{1-n}{2}}, \nabla G \rangle. \quad (12)$$

Непосредственные вычисления дают

$$\Delta r^{\frac{1-n}{2}} = \frac{1}{4} (3-n)(n-1) r^{\frac{-3-n}{2}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Delta G = & \sum_{i=1, j=1}^{n-1} G_{\varphi_i \varphi_j} \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} G_{\varphi_i} \Delta \varphi_i + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} G_{\theta \varphi_i} \langle \nabla \varphi_i, \nabla r \rangle + G_{\theta} \Delta r + G_{\theta \theta} |\nabla r|^2. \end{aligned}$$

Из (8)

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x_{n-k+1}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-k}^2} \right), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

и

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Отсюда

$$\Delta \varphi_k = \frac{(n-k-1) \sin(2\varphi_k)}{2r^2 \sin^2 \varphi_1 \dots \sin^2 \varphi_k}, \quad (13)$$

и

$$\nabla \varphi_k = \frac{(x_{n-k+1} x_1, \dots, x_{n-k+1} x_{n-k}, -(x_1^2 + \dots + x_{n-k}^2), 0, \dots, 0)}{x_{n-k+1} \operatorname{tg}(\varphi_k) (x_1^2 + \dots + x_{n-k+1}^2)},$$

где $k = 1, \dots, n-1$. Также отметим, что

$$\nabla r = \frac{1}{r} (x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно,

$$\langle \nabla \varphi_i, \nabla r \rangle = 0, \quad \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j = 1, \dots, n-1 \quad (14)$$

и

$$|\nabla \varphi_1|^2 = \frac{1}{r^2}, \quad |\nabla \varphi_k|^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi_1 \dots \sin^2 \varphi_{k-1}} \quad \text{при } k = 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

С учетом (13)–(15) выражение для ΔG принимает вид

$$\Delta G = \sum_{k=1}^{n-1} |\nabla \varphi_k|^2 G_{\varphi_k \varphi_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta \varphi_k G_{\varphi_k} + \frac{n-1}{r} G_{\theta} + G_{\theta \theta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{G_{\varphi_k \varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_{k-1}} + \frac{1}{r^2} G_{\varphi_1 \varphi_1} + \\
&\quad + \frac{1}{2r^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1) \sin(2\varphi_k) G_{\varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_k} + \frac{n-1}{r} G_{\theta} + G_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

Значит, (12) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta g &= r^{\frac{1-n}{2}} \Delta G + G \Delta r^{\frac{1-n}{2}} + 2 \langle \nabla r^{\frac{1-n}{2}}, \nabla G \rangle = \\
&= r^{\frac{-3-n}{2}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{G_{\varphi_k \varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_{k-1}} + r^{\frac{-3-n}{2}} G_{\varphi_1 \varphi_1} + \\
&\quad + \frac{1}{2} r^{\frac{-3-n}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1) \sin(2\varphi_k) G_{\varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_k} + (n-1) r^{\frac{-1-n}{2}} G_{\theta} + r^{\frac{1-n}{2}} G_{\theta\theta} + \\
&\quad + \frac{1}{4} (3-n)(n-1) r^{\frac{-3-n}{2}} G + (1-n) r^{\frac{-1-n}{2}} G_{\theta} = \\
&= r^{\frac{-3-n}{2}} G_{\varphi_1 \varphi_1} + r^{\frac{-3-n}{2}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{G_{\varphi_k \varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_{k-1}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} r^{\frac{-3-n}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1) \sin(2\varphi_k) G_{\varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_k} + r^{\frac{1-n}{2}} G_{\theta\theta} + \frac{1}{4} (3-n)(n-1) r^{\frac{-3-n}{2}} G.
\end{aligned}$$

Подставляя Δg в (9), получаем

$$\begin{aligned}
G_{\varphi_1 \varphi_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{G_{\varphi_k \varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_{k-1}} + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1) \sin(2\varphi_k) G_{\varphi_k}}{\sin^2 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \varphi_k} + \frac{1}{4} (3-n)(n-1) G = 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. Если функция

$$\theta = r - t, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

является фазой для решения

$$w = g(x, y, t) f(r - t)$$

уравнения

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{tt},$$

то амплитуда g имеет представление

$$g = \frac{1}{\sqrt{r}} C_1(r - t) \exp(i\varphi/2) + \frac{1}{\sqrt{r}} C_2(r - t) \exp(-i\varphi/2),$$

где $\varphi = \arctg(y/x)$ и C_1, C_2 — произвольные функции от $r - t$.

Следствие 2. Если функция

$$\theta = \rho - t, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

является фазой для решения

$$w = g(x, y, z, t)f(\rho - t)$$

уравнения

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = w_{tt},$$

то амплитуда g имеет представление

$$g = \frac{1}{\rho} G(\alpha, \varphi, \rho - t),$$

где $G(\alpha, \varphi, \theta)$ — произвольное решение уравнения

$$G_{\alpha\alpha} + G_{\varphi\varphi} = 0,$$

и переменные ρ, α, φ связаны с переменными x, y, z системой равенств

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\rho + z}{\rho - z} \right).$$

Список литературы

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л.: ГТТИ, 1945. Т. 2.
2. Еругин Н. П., Смирнов М. М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 853–865.
3. Соболев С. Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. физ.-мат. Ин-та им. В.А. Стеклова 1934. Т. 5. С. 259–264.
4. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1932. Т. 20.
5. Смирнов В. И., Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1933. Т. 29. С. 43–51.
6. Меньших О. Ф. О групповых свойствах нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, все решения которых являются функционально-инвариантными // Вестн. СамГУ. Естеств. науч. сер. 2004. № 4 (34). С. 20–30.
7. Шнеерсон М. С. Уравнения Максвелла и функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Дифф. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 743–758.
8. Kiselev A. P., Perel V. V. Highly Localized Solutions of the Wave Equation // J. Math. Phys. 2000. Vol. 41. No. 4. P. 1934–1955.
9. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: ФМЛ, 1958.
10. Friedlander F. G. Simple Progressing Solutions of the Wave Equation // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1947. Vol. 43. No. 3. P. 360–373.
11. Kiselev A. P. Generalization of Bateman-Hillion Progressive Wave and Bessel–Gauss Pulse Solutions of the Wave Equation via a Separation of Variables // J. Phys. A. Math. Gen. 2003. Vol. 36. No. 23. P. L345–L349.

12. *Volterra V.* Sur les Vibrations des Corps Elastiques Isotropes // Acta. Math. 1894. Vol. 18. P. 161–332.
13. *Киселев А. П.* Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2001. Т. 275. С. 100–103.
14. *Киселев А. П.* Относительно неискаженные цилиндрические волны, зависящие от трех пространственных переменных // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 635–636.
15. *Киселев А. П., Перель М. В.* Относительно неискажающиеся волны для m -мерного волнового уравнения // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1128–1129.
16. *Киселев А. П., Плаченов А. Б.* Точные решения m -мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2011. Т. 393. С. 167–177.
17. *Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В.* Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I // Сиб. журн. индустр. мат. 2011. Т. 14, № 1. С. 27–39.
18. *Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В.* Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II // Сиб. журн. индустр. мат. 2011. Т. 14, № 2. С. 28–33.
19. *Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В.* Представления для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка // Сиб. журн. индустр. мат. 2012. Т. 15, № 4. С. 17–23.
20. *Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В.* Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. мат. 2013. Т. 16, № 2. С. 40–49.

Материал поступил в редколлегию 01.11.2013

Адрес автора

НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: neshch@math.nsc.ru