М. Е. Липатов, Рекуррентность матричных коциклов,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2010, номер 5, 61–64

https://www.mathnet.ru/vmumm818

$$< y^3 >''' + 10\big(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\big) < y^3 >'' + 9\big(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\big)^2 < y^3 > = 0,$$

$$< y^4 >'''' + 20\big(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\big) < y^4 >'' + 64\big(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\big)^2 < y^4 > = 0.$$

Автор приносит глубокую благодарность профессорам Д. Д. Соколову и В. Н. Тутубалину за прочтение рукописи и сделанные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07–02–00127).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
2. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. журн. 2005. **82**, № 7. 584–589.
3. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, N 1. 3–19.
4. *Lamburt V.G., Sokoloff D.D., Tutubalin V.N.* Light propagation in a Universe with spatial inhomogeneities // Astrophys. and Space Sci. 2005. **298**. 409–418.
5. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. журн. 1964. **41**. 19–24.
6. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физ. наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
7. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* The Almighty Chance. Singapore: World Scientific, 1991.
8. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке // Успехи физ. наук. 1985. **145**, № 4. 593–628.
9. *Kleeorin N., Rogachevskii I., Sokoloff D.* Magnetic fluctuations with zero mean field in a random fluid with a finite correlation time and a small magnetic diffusion // Phys. Rev. E. 2002. **65**. 303–307.
10. *Грачев Д.А.* Влияние эффектов памяти в задаче о распространении света во Вселенной с неоднородностями // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2008. № 1. 16–19.
11. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
12. *Семенов Д.В.* Усреднение параболических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Матем. заметки. 1989. **45**, № 3. 123–126.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
14. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2000.

Поступила в редакцию
30.10.2009

УДК 519.218

РЕКУРРЕНТНОСТЬ МАТРИЧНЫХ КОЦИКЛОВ

М. Е. Липатов[1]

Рассматриваются измеримые коциклы со значениями в подгруппе $SL(2,\mathbb{C})$ диагональных и антидиагональных матриц над эргодическим преобразованием, сохраняющим вероятностную меру. Доказывается рекуррентность таких коциклов при некоторых условиях, а также эквивалентность двух определений рекуррентности.

Ключевые слова: рекуррентность, коцикл, консервативное преобразование, косое произведение.

This paper considers measurable cocycles with values in the subgroup of $SL(2,\mathbb{C})$ of diagonal and skew-diagonal matrices over an ergodic, transformation preserving the probability

[1] *Липатов Максим Евгеньевич* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: maxim.lipatov@gmail.com.

measure. We prove the recurrence of such cocycles under certain conditions as well as the equivalence of two definitions of recurrence.

Key words: recurrence, cocycle, conservative transformation, skew product.

В настоящей работе мы доказываем рекуррентность измеримых коциклов специального вида со значениями в группе $SL(2,\mathbb{C})$, которые определены на вероятностном пространстве, где действует эргодический, сохраняющий меру автоморфизм. С точки зрения теории вероятности речь идет о возвратности случайного блуждания на группе. Аналогичный результат для коциклов со значениями в группе $SL(2,\mathbb{R})$ был получен в [1] и [2]. В вещественном случае рассматриваемый вид коциклов соответствует одному из четырех классов когомологии коциклов [3, 2]. Также мы доказываем эквивалентность двух определений рекуррентности коциклов данного вида. Ниже везде $(\Omega,\mathcal{F},P)$ будет обозначать стандартное борелевское пространство, где P — вероятностная мера. Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть T — эргодический автоморфизм Ω, сохраняющий P, и пусть измеримая функция $A(\omega):\Omega\to SL(2,\mathbb{C})$ равна диагональной матрице $\begin{pmatrix} a(\omega) & 0 \\ 0 & a^{-1}(\omega)\end{pmatrix}$ при $\omega\in\bar{\Delta}$ и антидиагональной $\begin{pmatrix} 0 & -a(\omega)^{-1} \\ a(\omega) & 0\end{pmatrix}$ при $\omega\in\Delta$ $(\Delta\in\mathcal{F})$, причем $\ln|a(\omega)|\in L^1(P)$. Тогда если $e^{i\pi I_\Delta(\omega)}$ не когомологично 1 (не равно $g^{-1}(T\omega)g(\omega)$ п.н. ни при какой борелевской функции $g:\Omega\to\mathbb{R}$), то коцикл $A_n(\omega), n\in\mathbb{Z}$, заданный соотношениями*

$$A_1(\omega)=A(\omega),\ A_{m+n}(\omega)=A_m(T^n\omega)A_n(\omega),\ m,n\in\mathbb{Z},$$

рекуррентен, т.е.

$$\varliminf_{n\to\infty}\|A_n(\omega)-\mathrm{Id}\|=0 \text{ п.н.} \tag{$*$}$$

Заметим, что свойство $(*)$ инвариантно относительно выбора матричной нормы.

Предложение. *Определение $(*)$ рекуррентности матричных коциклов данного вида равносильно следующему свойству, которое принимается за определение рекуррентности в* [1, 2]*:*

$$\forall\ \varepsilon>0,\ B\in\mathcal{F}_+,\ \exists n\in\mathbb{N}: P(B\cap T^{-n}B\cap\{\|A_n(\omega)-\mathrm{Id}\|<\varepsilon\})>0,$$

где $\mathcal{F}_+:=\{A\in\mathcal{F}:P(A)>0\}$.

При доказательстве этих утверждений мы будем пользоваться известными фактами эргодической теории (теоремы 2–5). Прежде чем к ним перейти, напомним некоторые понятия.

Нормой на группе $(G,*)$ называется функция $\|\cdot\|:G\to\mathbb{R}$, такая, что $\|g\|=\|g^{-1}\|\geqslant 0$ для любого $g\in G$, причем равенство выполняется только на нейтральном элементе, и такая, что $\|g*h\|\leqslant\|g\|+\|h\|$ для любых $g,h\in G$.

Пусть далее G — локально-компактная, польская топологическая группа с левой мерой Хаара m_G, нормой $\|\cdot\|$ наделенная борелевской σ-алгеброй. И пусть $\varphi:\Omega\to G$ — некоторая измеримая функция.

Рассмотрим расширение $(\Omega\times G,\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(G),P\times m_G,T_\varphi)$ динамической системы $(\Omega,\mathcal{F},P,T)$, T — несингулярное, необязательно обратимое преобразование пространства $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и T_φ — *косое произведение*, имеющее вид $T_\varphi(\omega,g)=(T\omega,\varphi(\omega)*g)$. Тогда $T_\varphi^n(\omega,g)=(T^n\omega,\varphi_n(\omega)*g)$, где *коцикл* $\varphi_n(\omega)$ задается формулой

$$\varphi_n(\omega):=\begin{cases}\varphi(T^{n-1}\omega)*\ldots*\varphi(T\omega)*\varphi(\omega), & n\geqslant 1;\\ e, & n=0;\\ \varphi^{-1}(T^{-|n|}\omega)*\ldots*\varphi^{-1}(T^{-2}\omega)*\varphi^{-1}(T^{-1}\omega), & T \text{ обратимо и } n\leqslant -1,\end{cases}$$

и удовлетворяет условию $\varphi_{m+n}(\omega)=\varphi_m(T^n\omega)*\varphi_n(\omega)$ для всех $\omega\in\Omega$, $m,n\in\mathbb{N}$ ($m,n\in\mathbb{Z}$, если T обратимо). Также можно рассматривать косое произведение $T_\varphi(\omega,g)=(T\omega,g*\varphi(\omega))$ с соответствующим образом определенным коциклом $\varphi_n(\omega)$ со значениями в группе с правой мерой Хаара.

Множество $W\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(G)$ называется *блуждающим* для T_φ, если множества $\{T_\varphi^{-n}W\}_{n=0}^\infty$ попарно не пересекаются. Преобразование T_φ называется *консервативным*, если не существует T_φ-блуждающего множества $W\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(G)$, такого, что $(P\times m_G)(W)>0$.

Теорема 2 [4]. *Если T — преобразование Ω, сохраняющее P, то косое произведение T_φ консервативно тогда и только тогда, когда*

$$\varliminf_{n\to\infty}\|\varphi_n(\omega)\|=0 \text{ п.н.}$$

Теорема 3 [4]. *Если T — эргодическое преобразование Ω, сохраняющее P, то косое произведение T_φ консервативно тогда и только тогда, когда коцикл $\varphi_n(\omega)$ рекуррентен, т.е.*

$$\forall\varepsilon > 0, B \in \mathcal{F}_+, \exists n \in \mathbb{N}: \ P(B \cap T^{-n}B \cap \{\|\varphi_n\| < \varepsilon\}) > 0.$$

Доказательство предложения. Рассмотрим коцикл $\varphi_n(\omega) = A_n(\omega) - \mathrm{Id}$, порожденный функцией $\varphi(\omega) = A(\omega) - \mathrm{Id}$, со значениями в группе G, состоящей из матриц вида $A - \mathrm{Id}$, где матрица $A \in SL(2, \mathbb{C})$ либо диагональная, либо антидиагональная с операцией $A * B = AB + A + B$. Введем на G норму

$$\|(a_{jk})\| = \sum_{a_{jk}+\delta_{jk}=r_{jk}e^{i\varphi_{jk}}\neq 0, \varphi_{j,k}\in[-\pi,\pi)} |\ln r_{jk}| + |\varphi_{jk}|.$$

Кроме того, G обладает мерой Хаара $dm_G(g) = dv\, d\bar{v}/|v|^2$, где параметр v такой, что

$$g = \begin{pmatrix} v-1 & 0 \\ 0 & v^{-1}-1 \end{pmatrix} \text{ либо } g = \begin{pmatrix} -1 & -v^{-1} \\ v & -1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к φ_n теоремы 2 и 3, получаем эквивалентность двух определений рекуррентности $A_n(\omega)$. Предложение доказано.

Для доказательства теоремы 1 потребуются также теоремы 4 и 5.

Теорема 4 [5]. *Пусть T — эргодическое преобразование Ω, сохраняющее P. Если измеримая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема, то коцикл*

$$f_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)$$

рекуррентен тогда и только тогда, когда $Ef(\omega) = 0$.

Теорема 5 [2]. *Пусть на стандартном борелевском пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задана σ-конечная мера m, G — компактная польская группа с левой (правой) мерой Хаара, T — консервативное преобразование Ω, сохраняющее m. Тогда соответствующее косое произведение T_φ консервативно.*

Доказательство теоремы 1. Пусть для вещественных функций $r : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\theta : \Omega \to [-\pi, \pi)$

$$a(\omega) = r(\omega)e^{i\theta(\omega)}, \ \ln a(\omega) = \ln r(\omega) + i\theta(\omega).$$

Далее λ — мера Лебега, $\mu = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ — мера Хаара на $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $S_1 = \{\psi : -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi\}$. Рассмотрим преобразование $\tilde{T}$ пространства $(\Omega \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \times S^1, \ P \times \mu \times \lambda \times \lambda)$:

$$\tilde{T}(\omega, k, x, \psi) = \Big(T\omega, \ k + I_\Delta(\omega) \mod 2, \ x + \ln r(\omega)e^{i\pi k}, \ \psi + \theta(\omega)e^{i\pi k} + \pi k I_\Delta(\omega) \mod 2\pi\Big).$$

Пусть $T_1 : (\omega, k) \mapsto \Big(T\omega, \ k + I_\Delta(\omega) \mod 2\Big)$. Перейдем к преобразованию, изоморфному T_1:

$$T_2 : (\omega, z) \mapsto \Big(T\omega, \ \xi(\omega)z\Big), \text{ где } z \in \{\pm 1\}, \quad \xi(\omega) = e^{i\pi I_\Delta(\omega)}.$$

Ввиду того что T — эргодическое преобразование и $\xi(\omega)$ не когомологично 1, любая почти инвариантная функция $F(\omega, z) = f_0(\omega) + f_1(\omega)z$, т.е. такая, что $F(T_2(\omega, z)) = F(\omega, z)$ п.н., является константой (п.н.). Таким образом, преобразования T_2 и T_1 эргодичны. Поскольку

$$\iint \ln r(\omega)e^{i\pi k}\, dPd\mu = 0,$$

по теореме 4, учитывая интегрируемость функции $\ln r(\omega)$, получаем рекуррентность коцикла

$$\phi_n(\omega, k) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T_1^k(\omega, k)), \text{ где } \phi(\omega, k) = \ln r(\omega)e^{i\pi k}.$$

Тогда из теоремы 3 вытекает, что ограничение преобразования $\tilde{T}$ на первые три координаты консервативно. Следовательно, по теореме 5 преобразование $\tilde{T}$ консервативно. Для итераций преобразования $\tilde{T}$ имеем

$$\tilde{T}^n(\omega, k, x, \psi) = \Big(T^n\omega,\ (k, x, \psi) * \varphi_n(\omega)\Big),$$

где коцикл $\varphi_n(\omega)$ порождается функцией $\varphi : \omega \mapsto \Big(I_\Delta(\omega),\ \ln r(\omega),\ \theta(\omega)\Big)$ и принимает значения в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \times S^1$ с операцией

$$(k, x, \psi) * (l, y, \varphi) = \Big(k + l \mod 2,\ x + ye^{i\pi k},\ \psi + \varphi e^{i\pi k} + \pi kl \mod 2\pi\Big).$$

Снабдим эту группу следующей нормой: $\|(k, x, \psi)\| = k + |x| + (1 - k)|\psi|/2$.

Согласно теореме 2, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|\varphi_n(\omega)\| = 0$ п.н. Обозначим $(z_n(\omega), w_n(\omega))^T := A_n(\omega)(1, 0)^T$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим измеримую функцую $k_n : \Omega \to \mathbb{Z}_2$, равную 0 на множестве $\{z_n(\omega) \neq 0\}$ и 1 на множестве $\{w_n(\omega) \neq 0\}$, имеющую смысл номера ненулевой координаты вектора $(z_n(\omega), w_n(\omega))^T$. Пусть $x_n(\omega)$ и $\psi_n(\omega)$ — вещественная и мнимая части логарифма этой координаты соответственно. Заметим, что $\varphi_n(\omega)$ можно представить в виде $(k_n(\omega), x_n(\omega), \psi_n(\omega))$. Очевидно, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|(k_n(\omega), x_n(\omega), \psi_n(\omega))\| = 0 \text{ п.н.} \Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} |z_n(\omega) - 1| = 0 \text{ п.н.}$$

Последнее равенство равносильно рекуррентности коцикла $A_n(\omega)$. Теорема 1 доказана.

Автор приносит благодарность научному руководителю профессору В. И. Оселедцу за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ochs G., Oseledets V.I.* On recurrent cocycles and the nonexistence of random fixed points. Report N 382. Bremen: Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1996.
2. *Thieullen Ph.* Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices // J. Anal. Math. 1997. **73**. 19–64.
3. *Oseledets V.I.* Classification of GL(2, R)-valued cocycles of dynamical systems. Report N 360. Bremen: Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.
4. *Aaronson J.* An introduction to infinite ergodic theory // Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 50. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1997.
5. *Atkinson G.* Recurrence of co-cycles and random walks // J. London Math. Soc. 1976. **13**, N 2. 486–488.

Поступила в редакцию
21.12.2009

УДК 511.35

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ МОДУЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

В. А. Кухта[1]

В работе получена асимптотическая формула для среднего значения модуля дзета-функции Римана на последовательности, лежащей в критической полосе.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, среднее значение.

An asymptotic formula for the mean absolute value of the Riemann zeta-function in a critical stripe is obtained in the paper.

Key words: Riemann zeta-function, mean value.

В настоящей работе мы продолжаем исследования Р. Т. Турганалиева [1]. Нами получена асимптотическая формула для среднего значения модуля дзета-функции Римана по некоторой последовательности

[1] *Кухта Вячеслав Анатольевич* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vlagentt@gmail.com.