N. Yu. Galanova, Symmetry of Sections in Fields of Formal Power Series and a Non-Standard Real Line, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 1, 26–36

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 26—36

УДК 512.62.52

СИММЕТРИЯ СЕЧЕНИЙ В ПОЛЯХ ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И НЕСТАНДАРТНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ*)

Н. Ю. ГАЛАНОВА

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

Через $R[[G]]$ обозначается, как и в [1], *поле формальных степенных рядов* $x = \sum\limits_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in R$, $\mathrm{supp}(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$, $\mathrm{supp}(x)$ — вполне антиупорядоченное подмножество линейно упорядоченной абелевой группы G. Полагаем $r_g = x(g)$. Порядок в $R[[G]]$ вводим так: если $x = \sum\limits_{g\in G} r_g g$, то $x > 0$ тогда и только тогда, когда $r_\gamma > 0$, где $\gamma = \max\,\mathrm{supp}(x)$. Пусть β — кардинал, $\aleph_0 < \beta \leqslant |G|$, обозначим через $R[[G, \beta]]$ подполе поля $R[[G]]$ таких формальных степенных рядов x, что $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(x)) < \beta$, и назовем его *полем ограниченных формальных степенных рядов*. Если G — делимая группа, то $R[[G]], R[[G, \beta]]$ — вещественно замкнутые, упорядоченные поля [2].

Пусть K — линейно упорядоченное поле; *сечением* (A, B) поля K называется разбиение этого поля на подмножества A и B такое, что $A \cup B = K$, $\forall\, x \in A\, \forall\, y \in B$ $(x < y)$. Говорят, что подмножество $X \subseteq A$ *конфинально* (*коинициально*) A, если $\forall a \in A\ \exists x \in X\ a \leq x$ $(a \geq x)$; наименьшую из мощностей всех множеств, конфинальных (коинициальных) A, назовем *конфинальностью* (*коинцинальностью*) A и обозначим $\mathrm{cf}(A)$ $(\mathrm{coi}(A))$. Говорят [2], что сечение (A, B) поля K имеет *тип* (α, β), если

*) Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ, грант РД02-1.1-386.

$\mathrm{cf}(A) = \alpha$, $\mathrm{coi}(B) = \beta$. В [3] были впервые введены понятия симметричного и несимметричного сечения упорядоченного поля. Пусть (A, B) — сечение поля K, $x_0 \in A$, $y_0 \in B$. Рассмотрим следующие множества: $A_{x_0} = \{x - x_0 \mid x \in A,\, x \geq x_0\}$, $B_{y_0} = \{y_0 - y \mid y \in B,\, y \leq y_0\}$. Сечение (A, B) называется *симметричным*, если $[\forall x_0 \in A\, \exists y_0 \in B\ (A_{x_0} \supset B_{y_0})]$ и $[\forall y_0 \in B\, \exists x_0 \in A\ (B_{y_0} \supset A_{x_0})]$. Сечение, не являющееся симметричным, называется *несимметричным*. Множества A и B, так же как в [3—5], будем называть *берегами* сечения (A, B). Берег A сечения (A, B) называется *коротким* [3—5], а точка x_0 из A — *близкой* к B, если для всех $x \in A$, $x \geq x_0$, выполняется $x + (x - x_0) \in A$. Берег B называется *коротким*, а точка y_0 из B — *близкой* к A, если для всех $y \in B$, $y \leq y_0$, выполняется $y + (y - y_0) \in B$. Берег, не являющийся коротким, называется *длинным*. Сечение (A, B) поля K называется *фундаментальным* (*дедекиндовым*) [3—6], если $\forall \varepsilon \in K\ (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_\varepsilon \in A\, \exists y_\varepsilon \in B\ (|y_\varepsilon - x_\varepsilon| < \varepsilon))$.

ЛЕММА 1.1. *Каждое фундаментальное сечение (A, B) упорядоченного поля K, не производимое ни одним элементом из K, симметрично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A, B) — фундаментальное сечение упорядоченного поля K такое, что A не имеет последнего элемента, а B — первого. Допустим, что (A, B) несимметрично. Тогда один из берегов будет длинным, а другой — коротким [3—5]. Пусть A — короткий, B — длинный берега сечения. Тогда существует элемент x_0 из A, близкий к B. Пусть $x \in A$, $x_0 < x$. Положим $\varepsilon = x - x_0$. Поскольку сечение (A, B) фундаментально, найдутся $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ такие, что $y_1 - x_1 < \varepsilon$. В [4, с. 200] доказано, что для несимметричного сечения с коротким берегом A имеет место равенство $\{y - x \mid x \in A,\, y \in B\} = \{y - x_0 \mid y \in B\}$. Отсюда, существует $y \in B$, для которого $y - x_0 = y_1 - x_1 < \varepsilon = x - x_0$. Тогда $y - x_0 < x - x_0$, $y < x \in A$, а значит, $y \in A$; получаем противоречие.

ЛЕММА 1.2. *Если (A, B) — симметричное сечение в произвольном упорядоченном поле, то* $\mathrm{cf}(A) = \mathrm{coi}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A, B) — симметричное сечение. Допустим, что $\mathrm{cf}(A) < \mathrm{coi}(B)$. Во множестве A найдется конфинальное ему подсемейство $\{a_t\}_{t\in T}$, причем $\mathrm{card}(T) = \mathrm{cf}(A)$. Сечение симметрично, поэтому для всех $a_t \in A$ существует $a_{t'} \in A$ такое, что $a_t < a_{t'}$ и $(a_{t'} + (a_{t'} - a_t)) \in B$. Положим $C = \{a_{t'} + (a_{t'} - a_t)\}_{t\in T}$. Множество C является подмножеством в B, причем C не коинициально B, так как $\mathrm{card}(C) \leqslant \mathrm{card}(T) = \mathrm{cf}(A) < \mathrm{coi}(B)$. Поэтому найдется элемент $y \in B$, который меньше каждого элемента из C. Поскольку (A, B) симметрично, существует $y_1 < y$ такой, что $y_1 \in B$ и $y_1 - (y - y_1) \in A$. В силу конфинальности семейства $\{a_t\}_{t\in T}$ множеству A и симметричности сечения существуют a_{t_0}, $a_{t'}$ такие, что $y_1 - (y - y_1) \leqslant a_{t_0} < a_{t'}$ и $a_{t'} + (a_{t'} - a_{t_0}) \in C$. Покажем, что $a_{t'} + (a_{t'} - a_{t_0}) < y$. Учитывая, что каждый элемент из A меньше каждого элемента из B, оцениваем выражение $a_{t'} + (a_{t'} - a_{t_0}) < y_1 + (a_{t'} - a_{t_0}) < y_1 + (y_1 - a_{t_0}) < y_1 + (y_1 - (y_1 - (y - y_1)) = y$; приходим к противоречию с тем, что $y < C$.

Упорядоченное поле называется *полным по Дедекинду* (*полным по Коши, полным по Скотту, непрерывно замкнутым*) [6], если каждое фундаментальное сечение поля производится некоторым элементом этого поля. Два элемента x и y поля K называются *архимедовски эквивалентными*, если $\exists n \in N$ $(|x|n \geq |y| \wedge |y|n \geq |x|)$. Фактор-группу мультипликативной группы $K^+ \setminus \{0\}$ по отношению архимедовской эквивалентности называют *группой архимедовых классов* поля K.

ТЕОРЕМА 1.1 [4]. *Пусть сечение (A, B) в упорядоченном поле K несимметрично, $K(t)$ — простое расширение поля K, в котором $A < t < B$. Тогда в $K(t)$ существуют элементы, которые не будут архимедовски эквивалентными ни одному элементу из K.*

Упорядоченное поле K называется *архимедовски полным* (*архимедовски замкнутым*) [3, 4], если в каждом упорядоченном расширении $\hat{K}$ поля K существует $y \in \hat{K}$ такой, что для всех $x \in K$ выполняется такое условие: x, y не являются архимедовски эквивалентными,

ТЕОРЕМА 1.2 [3]. *Поле архимедовски полно тогда и только тогда, когда все сечения поля несимметричны.*

ТЕОРЕМА 1.3 [3]. *Поле $R[[G]]$ архимедовски полно.*

ТЕОРЕМА 1.4 (ОКГ) [2]**.** (a) *Пусть G — упорядоченная группа, $R[[G]]$ — поле формальных степенных рядов. Тогда для $R[[G]]$ справедлива следующая оценка*: $2^{cf(G)} \leqslant \mathrm{card}(R[[G]]) \leqslant 2^{\mathrm{card}(G)}$.

(b) *Пусть β — произвольный кардинал такой, что $\aleph_0 < \beta \leqslant \mathrm{card}(G)$. Тогда* $\mathrm{card}(R[[G,\beta]]) = \mathrm{card}(G)$.

ТЕОРЕМА 1.5 (об изоморфизме [5])**.** *Пусть упорядоченные вещественно замкнутые поля P и K таковы, что* $\mathrm{card}(P) = \mathrm{card}(K) = \alpha > \aleph_0$ *и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда P и K упорядоченно изоморфны в том и только том случае, если группы архимедовых классов этих полей изоморфны.*

§ 2. Симметричность и фундаментальность сечений $R[[G,\beta]]$

Поле $R[[G,\beta]]$ является подполем в $R[[G]]$. Заметим, что если группа G не имеет вполне антиупорядоченных подмножеств мощности, большей или равной β, то поля $R[[G,\beta]]$ и $R[[G]]$ совпадают. Поэтому далее предполагаем, что разность $R[[G]]\backslash R[[G,\beta]]$ не пуста.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Каждое симметричное сечение в $R[[G,\beta]]$ производится некоторым элементом из $R[[G]]\backslash R[[G,\beta]]$. Наоборот, каждый элемент из $R[[G]]\backslash R[[G,\beta]]$ производит некоторое симметричное сечение в $R[[G,\beta]]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A,B) — симметричное сечение в $R[[G,\beta]]$. Докажем, что существует $x \in R[[G]]\backslash R[[G,\beta]]$ для которого $A < x_0 < B$, $A = \{x \in R[[G,\beta]] \mid x < x_0\}$, $B = \{x \in R[[G,\beta]] \mid x > x_0\}$. Допустим противное: если $x_0 \in R[[G]]\backslash R[[G,\beta]]$, то существует или $x \in A$, для которого $x_0 < x$, или $y \in B$, для которого $y < x_0$. Тогда множества $\tilde{A} = \{x_0 \in R[[G]] \mid \exists x \in A,\ x_0 < x\}$, $\tilde{B} = R[[G]]\backslash \tilde{A}$ образуют симметричное сечение в поле $R[[G]]$. Действительно, покажем, что оба берега $\tilde{A}, \tilde{B}$ являются длинными. Так как A — длинный берег, то $\forall x \in A\, \exists y \in B\ \forall z \in B$ $(z \leq y \Rightarrow (x+y-z) \in A)$. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{A}$, тогда существует $x \in A$ такой, что $\tilde{x} < x$. Для $x \in A$ выполняется $\exists y \in B\, \forall z \in B$ $(z \leq y \Rightarrow (x+y-z) \in A)$. Положим $\tilde{y} = y$. Имеем $\forall \tilde{z} \in \tilde{B}$ $(\tilde{z} \leq \tilde{y} \Rightarrow \exists z \in B\ (z \leq \tilde{z}))$, тогда

$\tilde{x} + (\tilde{y} - \tilde{z}) \leq x + (y - z) \in A$, отсюда $\tilde{x} + (\tilde{y} - \tilde{z}) \in \tilde{A}$. Следовательно, $\tilde{A}$ — длинный берег. Аналогично показывается, что $\tilde{B}$ — длинный берег. В поле $R[[G]]$ нет симметричных сечений (теор. 1.2, 1.3), получаем противоречие.

Пусть теперь $x_0 \in R[[G]] \setminus R[[G, \beta]]$. Покажем, что множества $A = \{x \in R[[G, \beta]] \mid x < x_0\}$, $B = \{x \in R[[G, \beta]] \mid x > x_0\}$ образуют симметричное сечение в $R[[G, \beta]]$. Допустим, что (A, B) несимметрично, тогда (теор. 1.1) в простом расширении $R[[G, \beta]](x_0)$ найдется элемент, не эквивалентный архимедовски ни одному элементу из $R[[G, \beta]]$. Данное простое расширение входит в $R[[G]]$, а каждый элемент из $R[[G]]$ архимедовски эквивалентен некоторому элементу из $R[[G, \beta]]$, так как $R[[G]]$ и $R[[G, \beta]]$ имеют группы архимедовых классов, изоморфные G; приходим к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если $\beta < \mathrm{cf}(G)$, то поле $R[[G, \beta]]$ полно по Дедекинду.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\beta < \mathrm{cf}(G)$, то в G нет вполне антиупорядоченного подмножества G мощности β, коинициального G. Значит в этом поле нет фундаментальных симметричных сечений. Каждое фундаментальное сечение либо симметрично, либо производится некоторым элементом данного поля (лемма 1.1). Следовательно, каждое фундаментальное сечение производится некоторым элементом из $R[[G, \beta]]$.

ЛЕММА 2.1. *Если $x, y \in R[[G]]$, $\varepsilon \in G$, $y - x < 1\varepsilon$, то для любого $g \in G$ из того, что $g > \varepsilon$, следует $y(g) = x(g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение 1ε представляет собой формальный степенной ряд из одного слагаемого $\mathrm{supp}(1\varepsilon) = \varepsilon$. Для двух произвольных формальных степенных рядов z_1, z_2 из $R[[G]]$ выполняется, что z_1 меньше z_2, если существует $\varepsilon \in G$ такой, что $z_1(g) = z_2(g)$ для всех $g > \varepsilon$ и $z_1(\varepsilon) < z_2(\varepsilon)$. Таким образом, носители обоих рядов z_1 и z_2 вместе с соответствующими коэффициентами совпадают после ε, а коэффициент $z_1(\varepsilon)$ меньше $z_2(\varepsilon)$. Пусть теперь x, y — два формальных степенных ряда в $R[[G]]$, причем $y - x < 1\varepsilon$. Положим $y - x = z$. Выполняется $z < 1\varepsilon$. Из определения порядка в $R[[G]]$ следует, что $\mathrm{supp}(z) \leq \varepsilon$. Значит, для всех

$g \in \mathrm{supp}(z)$ выполняется $g \leq \varepsilon$. Если $g > \varepsilon$, то $g \notin \mathrm{supp}(z)$. Отсюда $z(g) = 0$ и $(y - x)(g) = 0$, т. е. $y(g) = x(g)$ для всех $g > \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Будем говорить, что вполне антиупорядоченное множество X *инверсно подобно* кардиналу β, если существует биекция $f : X \to \to \beta$, для которой $f(x) > f(y)$, если $x, y \in X$ и $x < y$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Симметричное сечение* (A, B) *в* $R[[G, \beta]]$ *фундаментально тогда и только тогда, когда существует* $x_0 \in \in R[[G]] \backslash R[[G, \beta]]$ *такое, что* $A < x_0 < B$, *а* $\mathrm{supp}(x_0)$ *инверсно подобен* β *и коинициален* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A, B) — симметричное фундаментальное сечение в $R[[G, \beta]]$. Поскольку (A, B) симметрично, по утверждению 2.1 существует $x_0 \in R[[G]] \backslash R[[G, \beta]]$ такой, что $A < x_0 < B$. Заметим, что для каждого положительного $x \in R[[G]]$ найдется положительный $y \in R[[G, \beta]]$ такой, что $y < x$. Поэтому сечение (A, B) индуцирует фундаментальное же сечение в $R[[G]]$, а именно, $\tilde{A} = \{x \in R[[G]] \mid \exists y \in \in A(x \leq y)\} \cup \{x_0\}$, $\tilde{B} = \{x \in R[[G]] \mid \exists y \in B(y \leq x)\}$. Отсюда вытекает единственность x_0. Остается показать, что $\mathrm{supp}(x_0)$ инверсно подобен кардиналу β и коинициален G. Для этого достаточно увидеть, что $\forall \varepsilon \in G$ $(\mathrm{card}(\{g \in \mathrm{supp}(x_0) \mid g > \varepsilon\}) < \beta)$. Допустим противное, т. е. $\exists \varepsilon \in G$ $(\mathrm{card}(\{g \in \mathrm{supp}(x_0) \mid g > \varepsilon\}) \geqslant \beta)$. Так как сечение фундаментально, то $\exists x_\varepsilon \in A$ $(x_0 - x_\varepsilon < 1\varepsilon)$. По лемме 2.1, $\forall\ g > \varepsilon$ $(x_0(g) = x_\varepsilon(g))$, поэтому $\{g \in \mathrm{supp}(x_0) \mid g > \varepsilon\} \subset \mathrm{supp}(x_\varepsilon)$, отсюда $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(x_\varepsilon)) \geqslant \beta$. Поскольку $x_\varepsilon \in R[[G, \beta]]$, имеем $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(x_\varepsilon)) < \beta$; приходим к противоречию.

Пусть теперь $x_0 \in R[[G]] \backslash R[[G, \beta]]$ и $\forall \varepsilon \in G$ $(\mathrm{card}(\{g \in \mathrm{supp}(x_0) \mid g > \varepsilon\}) < \beta)$. Покажем, что сечение в $R[[G, \beta]]$, порожденное x_0, фундаментально. Пусть $\varepsilon \in G$. Полагаем $x_\varepsilon(g) = x_0(g) = y_\varepsilon(g)$ для всех $g > \varepsilon$, $x_\varepsilon(\varepsilon) = x_0(\varepsilon) - 1/3$, $y_\varepsilon(\varepsilon) = x_0(\varepsilon) + 1/3$, где $\mathrm{supp}(x_\varepsilon) = \mathrm{supp}(y_\varepsilon) = \{g \in \in \mathrm{supp}(x_0) \mid g > \varepsilon\} \cup \{\varepsilon\}$. Заметим, что $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(x_\varepsilon)) = \mathrm{card}(\mathrm{supp}(y_\varepsilon)) < \beta$. Таким образом, для произвольного ε нашлись $x_\varepsilon \in A$, $y_\varepsilon \in B$, для которых выполняется $y_\varepsilon - x_\varepsilon = 2\varepsilon/3 < 1\varepsilon$. Значит, сечение (A, B) фундаментально. По лемме 1.1, каждое фундаментальное сечение, не производимое ни одним элементом данного поля, симметрично. Теорема доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3 (ОКГ)**.** *Пусть G — это линейно упорядоченная абелева группа.*

(a) *Если* $\mathrm{card}(G) = \mathrm{cf}(G) = \gamma$, *то мощность множества всех фундаментальных симметричных сечений* $R[[G, \gamma]]$ *равна* 2^γ.

(b) *Если* $\mathrm{card}(G) = \mathrm{coi}\{g \in G \mid g > 1\} = \gamma$, *то мощность множества всех нефундаментальных симметричных сечений* $R[[G, \gamma]]$ *равна* 2^γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Из теоремы 1.4 следует, что $2^\gamma = \mathrm{card}(R[[G]]) > \mathrm{card}(R[[G, \gamma]]) = \gamma$, а значит, $R[[G]] \backslash R[[G, \gamma]] \neq \varnothing$, и по утверждению 2.1 в поле $R[[G, \gamma]]$ есть симметричные сечения. По утверждению 2.2 сечение (A, B) симметрично и фундаментально в $R[[G, \gamma]]$ тогда и только тогда, когда существует $x_0 \in R[[G]] \backslash R[[G, \gamma]]$, для которого $A < x_0 < B$, $\mathrm{supp}(x_0)$ инверсно подобен кардиналу γ и коинициален G. Так как коинициальность G равна конфинальности G и равна γ, то существует вполне антиупорядоченное подмножество Γ в G мощности γ, инверсно подобное γ и коинициальное G.

Пусть $S = \{x \in R[[G]] \backslash R[[G, \gamma]] \mid \mathrm{supp}(x) = \Gamma\}$, $x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$. Покажем, что x_1, x_2 порождают различные сечения в $R[[G, \gamma]]$. Пусть (A_i, B_i) — сечение $R[[G, \gamma]]$, порожденное элементом x_i, $A_i = \{x \in R[[G, \gamma]] \mid x < x_i\}$, $B_i = R[[G, \gamma]] \backslash A_i$, $i = 1, 2$. Так как Γ вполне антиупорядочено, существует $g_0 = \max\{g \in \Gamma \mid x_1(g) \neq x_2(g)\}$. Полагаем $\mathrm{supp}(x_3) = \{g \in \Gamma \mid g \geq g_0\}$. Из того, что Γ инверсно подобно γ, вытекает $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(x_3)) < \gamma$. Положим $x_3(g) = x_1(g) = x_2(g)$ для всех $g > g_0$ и $x_3(g_0) = (x_1(g_0) + x_2(g_0))/2$. Тогда $x_1 < x_3 < x_2$, $x_3 \in R[[G, \gamma]]$. Из того, что $x_1 < x_3$, следует $x_3 \in B_1$, отсюда $x_3 \notin A_1$. Поскольку $x_3 < x_2$, имеем $x_3 \in A_2$. Отсюда $A_1 \neq A_2$.

Очевидно, что мощность S равна $R^{\mathrm{card}(\Gamma)} = 2^{\mathrm{card}(\Gamma)} = 2^\gamma$, поэтому мощность множества всех симметричных фундаментальных сечений не меньше 2^γ; с другой стороны, она и не больше, так как мощность всех сечений в $R[[G, \gamma]]$ не больше 2^γ.

(b) Рассмотрим множество $X = \{g \in G \mid g > 1\}$. По условию, $\mathrm{coi}(X) = \gamma$, следовательно, существует множество Γ, инверсно подобное γ и коинициальное X. Множество Γ имеет мощность γ, вполне антиупорядочено в G, инверсно подобно кардиналу γ, но не коинициально G. Пусть $S = \{x \in R[[G]] \backslash R[[G,\gamma]] \mid \mathrm{supp}(x) = \Gamma\}$ Пусть $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2$. По утверждению 1.2 эти элементы порождают симметричные нефундаментальные сечения в $R[[G,\gamma]]$. Так же, как и в (a), x_1, x_2 порождают различные сечения в $R[[G,\gamma]]$. Мощность S равна $R^{\mathrm{card}(\Gamma)} = 2^{\mathrm{card}(\Gamma)} = 2^\gamma$. Тогда мощность множества всех симметричных нефундаментальных сечений не меньше 2^γ; с другой стороны, она и не больше, так как мощность множества всех сечений в $R[[G,\gamma]]$ не больше 2^γ. Теорема доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Если (A,B) — симметричное сечение в $R[[G,\beta]]$, то $\beta \leqslant \mathrm{cf}(A) = \mathrm{coi}(B) \leqslant \mathrm{card}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A,B) удовлетворяет условию утверждения. По лемме 1.2, $\mathrm{cf}(A) = \mathrm{coi}(B)$. Покажем, что $\mathrm{coi}(B) = \mathrm{cf}(A) \geqslant \beta$. Допустим противное, т. е. $\mathrm{coi}(B) = \mathrm{cf}(A) < \beta$. По свойству конфинальности найдутся семейство $\{a_t\}_{t\in T}$, конфинальное A (здесь $a_t \in A$), а также семейство $\{b_t\}_{t\in T}$, коинициальное B (здесь $b_t \in B$). По предположению выполняется условие $\mathrm{card}(T) < \beta$.

Положим $\Gamma = \left(\bigcup_{t\in T} \mathrm{supp}(a_t)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T} \mathrm{supp}(b_t)\right)$. По построению, $\mathrm{card}(\Gamma) < \beta$. Достроим Γ до подгруппы в G. Пусть $G_0 = \{g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k} \mid g_i \in \Gamma$, $n_i \in Z$, $k \in N\}$. Множество G_0, очевидно, является подгруппой группы G. Мощность G_0 строго меньше β. Рассмотрим поле формальных степенных рядов $R[[G_0]]$. Оно является подполем поля $R[[G,\beta]]$. Действительно, носитель каждого ряда из $R[[G_0]]$ имеет мощность, не большую $\mathrm{card}(G_0)$, а значит, строго меньшую β.

Рассмотрим теперь сечение в $R[[G_0]]$, порожденное семействами $\{a_t\}_{t\in T}$, $\{b_t\}_{t\in T}$. Каждый элемент этих семейств принадлежит $R[[G_0]]$. Полагаем $\tilde{A} = \{x \in R[[G_0]] \mid$ существует a_t, для которого $x < a_t\}$, $\tilde{B} = \{y \in R[[G_0]] \mid$ существует b_t, для которого $y > b_t\}$. Из симметричности сечения (A,B) следует симметричность сечения $(\tilde{A},\tilde{B})$ в поле $R[[G_0]]$. Действительно, покажем, что оба берега $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ являются длинными. Так как A — длинный берег, то $\forall x \in A\ \exists y \in B\ \forall z \in B\ (z \leq y \Rightarrow (x+y-z) \in A)$. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{A}$, тогда $\exists a_t \in A\ (\tilde{x} < a_t)$. Для элемента $a_t \in A$ выполняется $\exists y \in B\ \forall z \in B\ (z \leq y \Rightarrow (a_t + y - z) \in A)$; так как $\{b_t\}_{t\in T}$ коинициально B, то существует $b_t \leq y$. Тогда $\forall z \in B$ $(z \leq b_t \Rightarrow (a_t + b_t - z) \in A)$. Положим $\tilde{y} = b_t$. Для каждого $\tilde{z} \in \tilde{B}$ такого, что $\tilde{z} \leq \tilde{y}$, существует $z \in B$ такой, что $z \leq \tilde{z}$; тогда $\tilde{x} + (\tilde{y} - \tilde{z}) \leq a_t + (b_t - z) \in A$.

В силу конфинальности $\{a_t\}_{t \in T}$ множествам A и $\tilde{A}$, верно $\tilde{x}+(\tilde{y}-\tilde{z}) \in \in \tilde{A}$. Следовательно, $\tilde{A}$ — длинный берег. Аналогично показывается, что $\tilde{B}$ — длинный берег. С другой стороны, поле $R[[G_0]]$ архимедовски полно (теор. 1.3), а значит в нем нет симметричных сечений (теор. 1.2). Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{coi}(B) = \mathrm{cf}(A) \geqslant \beta$. Таким образом, $\beta \leqslant \mathrm{cf}(A) = \mathrm{coi}(B) \leqslant \mathrm{card}(G)$.

Упорядоченное множество (группа, поле) L называется *η_α-множеством* (*группой, полем*) [7], если для любых $A, B \subset L$ таких, что $A < B$ и $\mathrm{card}(A \cup B) < \aleph_\alpha$ существует $x \in L$ такой, что $A < x < B$. Для вещественно замкнутых полей это определение совпадает с определением $\aleph_\alpha$-насыщенности.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (ОКГ)**.** *Пусть F вещественно замкнутое, неархимедово, $\aleph_\alpha$-насыщенное линейно упорядоченное поле мощности $\aleph_\alpha$. Тогда в поле F существует $2^{\aleph_\alpha}$ симметричных фундаментальных и $2^{\aleph_\alpha}$ симметричных нефундаментальных сечений.*

Далее рассмотрим следствия из доказанных утверждений для нестандартной вещественной прямой $^*R$. Существуют различные модели $^*R$ (см. [8]). В качестве модели нестандартной вещественной прямой здесь будем рассматривать ультрастепень R по α^+-хорошему счетно-неполному ультрафильтру над бесконечным кардиналом α, обладающую следующими свойствами:

(i) $\mathrm{card}(^*R) = \alpha^+$;

(ii) $\mathrm{cf}(^*R) = \alpha^+$;

(iii) $^*R$ является α^+-насыщенной;

(iv) если G — группа архимедовых классов $^*R$, то $\mathrm{card}(G) = \mathrm{cf}(G) = = \alpha^+$.

В силу теоремы об изоморфизме Эрдёша, Гилмана и Хенриксона (см. [7]) любые два вещественно замкнутых поля мощности $\aleph_\alpha$, являющиеся η_α-множествами, изоморфны (некоторому полю ограниченных формальных степенных рядов [2]). Покажем, как устанавливается изоморфизм ${}^*R$ и некоторого поля ограниченных формально степенных рядов с помощью теоремы об изоморфизме [5].

СЛЕДСТВИЕ 2.3 (ОКГ). *Нестандартная вещественная прямая* ${}^*R$ *упорядоченно изоморфна полю ограниченных формальных степенных рядов* $R[[G, \alpha^+]]$*, где* G *— группа архимедовых классов* ${}^*R$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем изоморфизм полей ${}^*R$ и $R[[G, \alpha^+]]$. Данные поля вещественно замкнуты; группа архимедовых классов поля $R[[G, \alpha^+]]$ упорядоченно изоморфна групе G. Таким образом, рассматриваемые поля имеют изоморфные группы архимедовых классов; $\mathrm{card}({}^*R) = \mathrm{card}(R[[G, \alpha^+]]) = \mathrm{card}(G) = 2^\alpha$ (теор. 1.4). Пусть (A, B) — симметричное сечение ${}^*R$. По п. (iii) конфинальность сечения равна α^+, аналогичное свойство для симметричных сечений имеет место и для $R[[G, \alpha^+]]$ (утвержд. 2.4). Таким образом, выполняются все условия теоремы 1.5 об изоморфизме, а значит, поля ${}^*R$ и $R[[G, \alpha^+]]$ изоморфны.

Далее G — группа архимедовых классов поля ${}^*R$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. (a) *Мощность множества всех фундаментальных симметричных сечений* ${}^*R$ *равна* 2^{α^+}.

(b) *Мощность множества всех нефундаментальных симметричных сечений* ${}^*R$ *равна* 2^{α^+}.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Если* $\beta < \alpha^+$*, то каждое подполе* ${}^*R$*, упорядоченно изоморфное полю* $R[[G, \beta]]$*, полно по Дедекинду.*

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Пусть* G *есть группа архимедовых классов поля* ${}^*R$*. Тогда поле* $R[[G, \mathrm{card}(G)]]$ *является* $\mathrm{card}(G)$*-насыщенным.*

Поскольку ${}^*R$ является α^+-насыщенным, для каждого регулярного кардинала β, $\beta \leqslant \alpha^+$, в полях ${}^*R$ и $R[[G, \alpha^+]]$ имеются сечения типов (α^+, β), (β, α^+), а сечений других типов в этих полях нет. Действительно, конфинальность ${}^*R$ равна α^+, значит, в ${}^*R \backslash R$ найдется вполне упорядоченная последовательность Γ бесконечно больших элементов мощности α^+, конфинальная ${}^*R$. Пусть β — произвольный регулярный кардинал, меньший α^+, Γ_β — начальный отрезок Γ, инверсно подобный кардиналу β.

Пусть $A = \{x \in {}^*R \mid \exists\gamma \in \Gamma_\beta\ (x \leq \gamma)\}$, $B = {}^*R \backslash A$. Тогда тип сечения (A, B) есть (β, α^+), в силу α^+-насыщенности. Сечения типа (α^+, α^+) существуют в силу следствия 2.1, которое гарантирует существование симметричных сечений. Хотя из того, что сечение имеет конфинальность (α^+, α^+), не следует его симметричность, как показывает пример из [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Фукс*, Частично упорядоченные алгебраические системы, М., Мир, 1965.
2. *H. J. Dales, H. Woodin*, Super real fields, Oxford, Clarendon Press, 1996.
3. *Г. Г. Пестов*, Строение упорядоченных полей, Томск, изд-во ТГУ, 1980.
4. *Г. Г. Пестов*, Симметрия сечений в упорядоченном поле, Избр. докл. межд. конф. "Всесибирские чтения по математике и механике", 1, Томск, изд-во ТГУ, 1997, 198—203.
5. *Г. Г. Пестов*, К теории сечений в упорядоченных полях, Сиб. матем. ж., **42**, N 6 (2001), 1350—1360.
6. *E. Artin, O. Schreier*, Algebraische Konstruktion Reeller Körper, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., **5** (1925), 85—99.
7. Справочная книга по мат. логике, ч. 1: Теория моделей, М., Наука, 1982.
8. *B. Delay*, Coupures propres dans $^*R$, Ann. Math. Blaise Pascal, **4**, N 1 (1997), 19—25.
9. *Н. Ю. Галанова*, Конфинальность и симметричность сечений в упорядоченных полях, в сб. "Исследования по математическому анализу и алгебре", Томск, изд-во ТГУ, 1998, 138—143.

Адрес автора:
ГАЛАНОВА Наталия Юрьевна,
РОССИЯ,
634050, г. Томск,
пр. Ленина, 36,
Томский гос. университет,
механико-математический факультет.
Тел.: (3822) 42-38-95.
e-mail: natagyi@mail2000.ru; nataliya@umr.ru

Поступило 6 декабря 2000 г.
Окончательный вариант
29 июня 2002 г.