P. I. Naumkin, Evolution of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation,
Dokl. Akad. Nauk, 1997, Volume 352, Number 6, 742–745

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 6, с. 742–745

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9–535.5

ЭВОЛЮЦИЯ СТУПЕНЬКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМЕНА–БОНЫ–МАХОНИ–БЮРГЕРСА

© 1997 г. П. И. Наумкин

Представлено академиком В.А. Ильиным 15.02.95 г.

Поступило 22.02.95 г.

Настоящая работа посвящена изучению поведения при больших временах решения начально-краевой задачи для уравнения Бенджамена–Боны–Махони–Бюргерса (ББМБ), т.е. регуляризованного уравнения длинных волн с вязкостью [1–5]:

$$f_t + cf_x + \omega ff_x - \sigma f_{xx} - \delta f_{xxt} = 0, \quad x \in R_1, \quad t > 0,$$

$$f(x, 0) = \bar{f}(x), \quad x \in R_1,$$

$$f(x, t) \to \Lambda_{\pm} \text{ при } x \to \pm\infty, \quad t \geq 0,$$

где $f(x, t)$ – вещественная функция, $x \in R_1$ и $t \geq 0$, c, ω, σ, δ – положительные константы, $\Lambda_+ < \Lambda_-$. С физической точки зрения эта задача может описывать, например, такие явления, как распространение боры в слабонелинейной среде в приближении длинных волн.

Сделав замену переменных

$$f(x, t) = lu\left(\frac{l\omega}{\sigma}(x - Ct); \frac{l^2\omega^2 t}{\sigma}\right) + d,$$

где

$$d = \frac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-), \quad l = \frac{1}{2}(\Lambda_- - \Lambda_+), \quad C = c + \omega d,$$

получим задачу

$$\begin{gathered} u_t + uu_x - u_{xx} + bu_{xxx} - a^2 u_{xxt} = 0, \\ u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad x \in R_1; \quad u(x, t) \to \mp 1 \\ \text{при} \quad x \to \pm\infty, \quad t \geq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$a = \frac{l\omega\sqrt{\delta}}{\sigma} > 0, \quad b = \frac{l\omega\delta C}{\sigma^2} \in R_1.$$

Рассмотрим решения (1) типа бегущей волны $u(x, t) = s(x - c_0 t)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$s \to \pm 1; \quad s_x, s_{xx} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \mp\infty. \tag{2}$$

Тогда волна s удовлетворяет уравнению

$$c_1 - c_0 s + \frac{1}{2}s^2 - s' + bs'' + a^2 c_0 s'' = 0,$$

где c_1 – постоянная интегрирования. Из условий (2) следует, что $c_0 = 0$ и $c_1 = -\frac{1}{2}$, так что функция s удовлетворяет уравнению

$$s^2 - 1 - 2s' + 2bs'' = 0. \tag{3}$$

При $b = 0$ уравнение (3) имеет явное решение

$$s(x) = -\operatorname{th}\frac{x}{2}.$$

При $|b| \leq \frac{1}{4}$ уравнение (3) изучалось в работе [6], а при любых $b \in R_1$ исследовано в работе [7], где показано, что существует единственное (с точностью до сдвига аргумента, фиксируем этот сдвиг условием $s(0) = 0$) решение уравнения (3) с граничными условиями (2). Причем при $|b| \leq \frac{1}{4}$ стоячая волна $s(x)$ оказывается монотонной:

$$s'(x) < 0, \quad x \in R_1, \tag{4}$$

а при $|b| > \frac{1}{4}$ решение $s(x)$ осциллирует при $x < x_0$, где x_0 – положение максимума функции $s(x)$. Всюду далее мы будем предполагать, что начальные данные $\bar{u}(x)$ задачи (1) достаточно близки к стоячей волне $s(x)$ в том смысле, что при некотором сдвиге $\chi \in R_1$ функция $\bar{v}(x) = \int_{-\infty}^{x}(u(x + \chi) - s(x))dx$ стремится к нулю при $x \to \infty$. Из (1) и (3) для новой функции $v(x, t) = \int_{-\infty}^{x}(u(x + \chi, t) - s(x))dx$ получим задачу Коши

$$\begin{gathered} v_t + \frac{1}{2}(v_x)^2 + sv_x - v_{xx} - a^2 v_{xxt} + bv_{xxx} = 0, \\ v|_{t=0} = \bar{v}(x). \end{gathered} \tag{5}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Методами, развитыми в работе [2] (см. также [8, 9]), можно доказать существование единственного решения $v(x, t)$ задачи Коши (5) из класса $C^\infty([0, \infty); H^2(R_1))$, если начальное условие $\bar{v}(x) \in H^2(R_1)$. Нашей целью является получение оценок скорости убывания по времени функции $v(x, t)$. Так как стоячая волна $s(x)$ монотонна при $|b| \le \frac{1}{4}$ и непрерывно зависит от параметра b, то при $|b| > \frac{1}{4}$ и близких к $\frac{1}{4}$ можно утверждать, что немонотонный профиль $s(x)$ все-таки близок к монотонному в том смысле, что

$$s'(x) \le c_1, \tag{6}$$

где $c_1 > 0$ достаточно мало. Идеи, развитые в работах [10, 11], лежат в основе доказательства следующего результата.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *выполнено условие* (6); 2) $0 < a \le c_2$, *где* $c_2 > 0$ *достаточно мало*, 3) *начальное условие* $\bar{v}(x) \in H^2(R_1)$ *достаточно мало в том смысле, что при некоторых* $c_3 > 0$ *и* $n \ge 2$ *справедливо неравенство*

$$\|(1 + x^{2n})\bar{v}(x)\|_{H^2(R_1)} \le c_3. \tag{7}$$

Тогда при $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in R_1$ *имеет место асимптотическая формула*

$$u(x, t) = s(x - \chi) + O\left(t^{-\frac{n-1}{2\mu}}\right), \tag{8}$$

где $\mu > 1$.

Итак, мы видим, что если начальное условие $\bar{v}(x)$ задачи Коши (5) достаточно быстро убывает на бесконечности, то остаточный член в асимптотической формуле (8) также убывает достаточно быстро по времени. Отметим, что похожее требование экспоненциального убывания начальных данных $\bar{v}(x)$ для получения экспоненциальной оценки убывания по времени погрешности $v(x, t)$ появляется в работе [12]. Чтобы пояснить природу такого поведения решения, приведем наводящие эвристические соображения. Рассмотрим достаточно большие $|x| > X > 0$, тогда нелинейным членом в уравнении (5) можно пренебречь, а функции $s(x)$ заменить предельными значениями ∓ 1 при $\pm x > X > 0$. Вместо (5) получим два следующих линейных уравнения:

$$v_t \mp v_x - v_{xx} - a^2 v_{xxt} + b v_{xxx} = 0,$$

решения которых представляются интегралами

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\hat{\bar{v}}(p)\exp\left(ipx - \frac{\mp ip - ibp^3 + p^2}{1 + a^2p^2}t\right)$$

$$\text{при} \quad \pm x > X > 0.$$

Если параметры $a > 0$ и $|b|$ достаточно малы, то поведение таких интегралов при $t \to \infty$ аналогично характеру убывания при $t \to \infty$ интегралов вида $W_\pm \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp\hat{\bar{v}}(p)e^{ipx \pm ipt - p^2t}$, $\pm x > 0$. Скорость убывания интегралов $W_\pm$ целиком определяется гладкостью функции $\hat{\bar{v}}(p)$ (или в терминах фурье-преобразования $\bar{v}(p)$ – достаточно быстрым убыванием при $x \to \infty$, т.е. существованием моментов функции $\bar{v}(x)$). Также заметим, что для вычисления асимптотики при $t \to \infty$ интегралов $W_\pm$ по методу перевала необходимо потребовать аналитичность функции $\hat{\bar{v}}(p)$ в некоторой полосе (что соответствует экспоненциальному убыванию фурье-прообраза $\bar{v}(x)$). Эти рассуждения, однако, оставляют непроясненной "большую" переходную область от $-X$ до X, в которой по-прежнему можно пренебречь нелинейным членом в уравнении (5), но линейное слагаемое sv_x сильно изменяется и не может быть отброшено. Ниже мы уберем это слагаемое с помощью замены переменных и покажем, что приведенные выше эвристические рассуждения оправданы.

Таким образом, для вычисления второго члена асимптотического разложения (8) нам придется потребовать еще большей близости начальных данных $\bar{u}(x)$ задачи (1) и стоячей волны $s(x)$ так, чтобы начальное условие $\bar{v}(x)$ экспоненциально убывало при $x \to \pm\infty$. При вычислении второго члена в асимптотике (8) мы ограничимся рассмотрением только случая $b = 0$. Более общий случай $b \ne 0$, по-видимому, может быть рассмотрен аналогичным методом, однако он гораздо сложнее технически. Чтобы избавиться от сильно изменяющегося члена с первой производной по x, в уравнении (5) сделаем подстановку

$$v(x, t) = w(x, t)e^{-\beta t + \nu(x)},$$

где $\nu(x)$ – некоторая дифференцируемая функция, положительное число β пока произвольно. Получим

$$e^{-\nu}\left(1 - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(e^\nu w_t) + \frac{1}{2}e^{-\beta t + \nu}(w_x + \nu' w)^2 +$$

$$+\left(-\beta + s\nu' - \frac{\nu'^2}{\alpha} - \frac{\nu''}{\alpha}\right)w + \left(s - \frac{2\nu'}{\alpha}\right)w_x - \frac{1}{\alpha}w_{xx} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = (1 - a^2\beta)^{-1}$. Для исключения члена с производной w_x выберем функцию $\nu(x)$ равной

$$\nu(x) = \frac{\alpha}{2}\int_0^x s(x)dx = -\ln\left(\frac{z(x)}{2}\right),$$

где $z(x) = 2\mathrm{ch}^{\alpha}\frac{x}{2}$, поскольку стоячая волна $s(x)$ имеет явный вид $s(x) = -\mathrm{th}\frac{x}{2}$ в рассматриваемом нами случае. Уравнение (9) запишем теперь следующим образом:

$$z\left(1 - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{w_t}{z} + \frac{e^{-\beta t}}{z}\left(\frac{\alpha}{2}sw + w_x\right)^2 + \frac{1}{\alpha}Lw = 0, \qquad (10)$$
$$w|_{t=0} = \bar{w}(x),$$

где $\bar{w}(x) = \bar{v}(x)\frac{z(x)}{2}$, оператор L равен

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \lambda_0, \quad \lambda_0 = \left(\frac{\alpha}{4} - \beta\right)\alpha,$$
$$q(x) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{4\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}.$$

К счастью, спектральная задача для оператора L на прямой с конкретным потенциалом $q(x)$ хорошо изучена [13, 14] и в книге [14] приведены формулы разложения по собственным функциям. Чтобы минимальное собственное значение было равно нулю, выберем теперь β так, чтобы $\lambda_0 = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2$, получим

$$\beta = \frac{1}{4-a^2} > \frac{1}{4}, \quad \alpha = \frac{4-a^2}{4-2a^2} > 1.$$

Далее воспользуемся известными формулами разложения по спектру оператора L и представим решение w задачи Коши (10) в виде "испорченного" фурье-преобразования. Отметим, что нелинейный член в уравнении (10) имеет дополнительное убывание по времени, так что если потребовать малости начального условия $\bar{w}(x)$, то можно ожидать, что нелинейность в уравнении (10) будет оставаться малой при всех $t \geq 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть*: 1) $0 < a < c_1$, *где* $c_1 > 0$ *достаточно мало*, 2) *начальные данные* $u(x)$ *близки к стоячей волне* $s(x)$, *так что* $\|\bar{w}(x)\|_{H^2(R_1)} \leq c_2$ *при некоторой достаточно малой* $c_2 > 0$.

Тогда при $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in R_1$ *справедлива асимптотика для решения* $u(x, t)$ *задачи* (1)

$$u(x+\chi, t) = s(x) + Ae^{-\beta t}g(x) + O(e^{-\beta t - \gamma t}), \qquad (11)$$

где $\gamma > 0$ *– некоторая постоянная,*

$$g(x) = \frac{\sqrt{\xi}}{z}\frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\mathrm{sh}^2\frac{x}{2}\right),$$
$$\xi = \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-1)},$$

F – гипергеометрическая функция, Γ – гамма-функция Эйлера, постоянная A вычисляется через начальные данные $\bar{u}(x)$.

Замечание. В случае $a = 0$ (что отвечает уравнению Бюргерса) имеем $\beta = \frac{1}{4}$, $\alpha = 1$ и уравнение (10) принимает вид

$$w_t + \frac{e^{-t/4}}{2\mathrm{ch}\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}sw + w_x\right)^2 - w_{xx} = 0. \qquad (12)$$

Оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ на прямой не имеет дискретного спектра вообще и разложение по его собственным функциям совпадает с обычным преобразованием Фурье. Подход, развитый в настоящей работе, конечно, может быть применен к уравнению (12), но в этом нет необходимости, поскольку для уравнения Бюргерса известна линеаризующая подстановка Хопфа–Коула [15] и уравнение (5) (при $a = 0$, $b = 0$) с помощью замены $v(x, t) = -2\ln Z$ приводится к линейному уравнению

$$Z_t + sZ_x - Z_{xx} = 0,$$

откуда, обозначив $Z(x, t) = 1 + e^{-t/4}\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{2}Y(x, t)$, получим уравнение теплопроводности $Y_t = Y_{xx}$ с начальным условием $Y|_{t=0} = \bar{Y} \equiv \mathrm{ch}\frac{x}{2}(e^{-\bar{v}(x)/2} - 1)$. Если потребовать, чтобы $(1 + |x|)\bar{Y}(x) \in Z_1(R_1)$, т.е. $\mathrm{ch}\frac{x}{2}(1 + |x|)\bar{v}(x) \in Z_1(R_1)$, то при $t \to \infty$ равномерно по $x \in R_1$ имеем

$$Y(x, t) = \frac{M}{\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t} + O(t^{-1}),$$

где $M = \int_{R_1}\bar{Y}(x)dx$. Таким образом, в случае уравнения Бюргерса справедлива следующая асимптотика при $t \to \infty$ равномерно относительно $x \in R_1$:

$$u(x+\chi, t) = s(x)\left(1 - \frac{Me^{-t/4 - x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}}\right) + O\left(\frac{e^{-t/4}}{t}\right). \quad (13)$$

Формула (11) не переходит при $a \to 0$ в формулу (13). Это обусловлено тем, что второй член асимптотики в (11) возникает из дискретного спектра оператора L, который исчезает в пределе $a \to 0$. Второе слагаемое в асимптотике (13) появляется из непрерывного спектра, чем объясняется его дополнительное убывание по времени как $t^{-1/2}$.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность проф. И.А. Шишмареву и П. Жевандрову за полезные обсуждения, также признателен неизвестному мне рецензенту за важные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benjamin T.B.* // Lect. Appl. Math. 1974. V. 15. P. 3–47.
2. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* // Phylos. Trans. Roy. Soc. London. A. 1972. V. 272. P. 47–78.
3. *Bona J.L.* Proc. Intern. Congr. Math., Helsinki, 1978. Hungary, 1980. P. 887–894.
4. *Broer L.J.F.* // Appl. Sci. Res. 1975. V. 31. P. 377–395.
5. *Peregrine D.H.* // J. Fluid Mech. 1966. V. 25. P. 321–330.
6. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1937. Т. 1. С. 1–26.
7. *Bona J.L., Schonbek M.E.* // Proc. Roy. Soc. Edinburg. A. 1985. V. 101. P. 207–226.
8. *Bona J.L., Smith R.W.* // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1975. V. 278. P. 555–604.
9. *Amick C.J., Bona J.L., Schonbek M.E.* // J. Different. Eqaut. 1989. V. 81. P. 1–49.
10. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* // Функцион. анализ и его прил. 1991. Т. 25. В. 1. С. 21–32.
11. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* // Там же. 1992. Т. 26. В. 2. С. 88–93.
12. *Ильин А.М., Олейник О.А.* // ДАН. 1958. Т. 120. С. 25–28.
13. *Weyl H.* // Gottinger Nachr. 1909. P. 37–64.
14. *Титчмарш Е.С.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: ИЛ, 1960. Т. 1.
15. *Hopf E.* // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.