МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ОБ УСЛОВИЯХ ЗАМКНУТОСТИ ЛОМАНЫХ ЛИНИЙ И МНОГОГРАННИКОВ В E^3

Ю. А. Аминов

Задача определения необходимых и достаточных условий замкнутости пространственной кривой, выраженных через ее кривизну $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$, ставилась Н. В. Ефимовым, В. Фенхелем, С. С. Черн и другими геометрами. При этом предполагалось, что эти условия будут эффективны.

Мы рассмотрим аналог этой задачи для n-звенной ломаной в трехмерном евклидовом пространстве и укажем алгоритм получения условий замкнутости, выраженных через аналоги кривизны и кручения. Условия замкнутости n-звенной ломаной могут быть полезны как в геометрии, так и в теории механизмов и машин.

Рассмотрим ломаную линию $P_0, P_1, \ldots, P_n$, составленную из прямолинейных отрезков $a_{i+1} = P_iP_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Вместо кривизны и кручения регулярной кривой для ломаной линии мы определяем две последовательности углов φ_i, $i = 1, \ldots, n-1$ и θ_j $(j = 1, \ldots, n-2)$. Возьмем два последовательных отрезка a_i и a_{i+1}. Будем считать отрезки a_i направленными векторами с началом в P_{i-1} и концом в P_i. Можем также считать, что два взятых друг за другом отрезка не лежат на одной прямой. Следовательно, они определяют плоскость и ориентацию в ней. Угол φ_i определим как угол между векторами a_i и a_{i+1}, отсчитываемый от a_i к a_{i+1} в положительном направлении согласно ориентации в этой плоскости. Ориентированная плоскость, проходящая через векторы a_i и a_{i+1} определяет единичную нормаль β_i. Опреде-

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки». 1985

лим угол θ_i как угол между β_i и β_{i+1}, при этом ориентацию в плоскости векторов β_i, β_{i+1} будем задавать ортогональным ей вектором a_{i+1}. Угол θ_i будем отсчитывать в положительном направлении согласно этой ориентации. Будем называть φ_i углами кривизны, а θ_i — углами кручения.

Нетрудно установить утверждение, аналогичное теореме об однозначной определенности регулярной кривой ее кривизной и кручением.

Пусть заданы три последовательности чисел: $s_1, \ldots, s_n, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}, \overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-2}$ такие, что $s_i > 0$ и $\overline{\varphi}_i \neq \pi k$. Пусть в пространстве заданы точка P_0, проходящая через нее ориентированная плоскость α и направление отрезка a_1. Тогда в пространстве существует единственная ломаная с длинами отрезков a_i, равными s_i, и углами кривизны $\varphi_i = \overline{\varphi}_i$ и кручения $\theta_i = \overline{\theta}_i$.

Действительно, искомая кривая строится последовательным добавлением звеньев. В заданном направлении отрезка a_1 от точки P_0 отложим отрезок длины s_1. Конец его обозначим через P_1 и от этой точки под углом $\overline{\varphi}_1$ к отрезку a_1 в плоскости α отложим отрезок a_2 длины s_2. Конец этого отрезка обозначим через P_2. Так как плоскость, проходящая через отрезки a_1 и a_2, определена, то определен вектор β_1. В плоскости с нормалью a_2 вектор β_1 повернем на угол $\overline{\theta}_1$. Получим вектор β_2, а значит, и плоскость, в которой должен лежать следующий отрезок a_3. Продолжаем это построение для следующих звеньев. Единичный вектор, идущий по направлению вектора a_i, обозначим через e_i. Тогда для каждого i мы определяем два вектора

$$e_{i+1} = \cos \overline{\varphi}_i e_i + \sin \overline{\varphi}_i \, [\beta_i e_i],$$
$$\beta_{i+1} = \cos \overline{\theta}_i \beta_i + \sin \overline{\theta}_i \, [e_{i+1} \beta_i].$$

Таким образом, в пространстве определится ломаная, имеющая заданные s_i, φ_i, θ_i.

Рассмотрим теперь замкнутую n-звенную ломаную. Последнее звено замкнутой ломаной полностью определяется через положение предыдущих звеньев. Поэтому n-звенная замкнутая ломаная с точностью до движения определяется следующими параметрами:

$$s_1, \ldots, s_{n-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \theta_1, \ldots, \theta_{n-3},$$

число которых равно $3n - 6$. Задачу теперь можно сформулировать так: какими должны быть длины s_i и углы φ_i и θ_i, чтобы соответствующая им ломаная была замкну-

та? Ответ на этот вопрос можно дать двумя способами: 1) можно найти выражения s_i, φ_i и θ_i через некоторые другие параметры, независимые или зависимые, но удовлетворяющие некоторым уравнениям; 2) можно найти систему из 6 уравнений вида

$$F_p(s_i, \varphi_i, \theta_i) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, 6)$$

на $3n$ параметров: длины s_i и углы φ_i, θ_i.

Ответ первым способом получается довольно просто. Запишем векторное уравнение замкнутости кривой

$$s_1e_1 + s_2e_2 + \ldots + s_ne_n = 0. \tag{1}$$

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве введена декартова система координат x, y, z и пусть координаты единичных векторов e_i будут x_i, y_i, z_i. Тогда векторное уравнение (1) можно записать как три скалярных уравнения на величины x_i, y_i, z_i

$$\begin{gathered} s_1x_1 + \ldots + s_nx_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1z_1 + \ldots + s_nz_n = 0. \end{gathered}$$

Так как e_i — единичные векторы, то имеем n уравнений

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \ldots, x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1.$$

Углы кривизны и кручения определяются через x_i, y_i и z_i по формулам

$$\cos\varphi_i = (e_ie_{i+1}) = x_ix_{i+1} + y_iy_{i+1} + z_iz_{i+1},$$

$$\cos\theta_i = (\beta_i\beta_{i+1}) = \frac{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1} - (x_ix_{i+2} + y_iy_{i+2} + z_iz_{i+2})}{\sin\varphi_i\sin\varphi_{i+1}}.$$

Если заданы величины $x_1, \ldots, z_n$, причем так, чтобы один какой-либо минор третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}$$

был отличен от нуля, например минор первых трех столбцов, то можем выразить s_1, s_2, s_3 через $s_4, \ldots, s_n$ и величины $x_1, \ldots, z_n$. Так как величины x_i, y_i, z_i удовлетворяют системе n уравнений, то имеем $3n - 3$ независимых параметра. При этом положение векторов e_1 и β_1 не фиксировано. Если их зафиксировать, положив $e_1 = (1, 0, 0)$,

$e_2 = (x_2, y_2, 0)$, то число независимых параметров будет равно $3n - 6$.

Итак, *система уравнений*

$$s_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + \ldots + s_nx_n = 0,$$
$$s_2y_2 + s_3y_3 + \ldots + s_ny_n = 0,$$
$$s_3z_3 + \ldots + s_nz_n = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 = 1,\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1, \ldots, x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1$$

может рассматриваться как система необходимых и достаточных условий замкнутости кривой на параметры, через которые выражаются все длины s_i и углы φ_i, θ_i.

Однако больший интерес представляют условия, выраженные только через s_i, φ_i и θ_i. Обозначим $a_{ij} = (e_ie_j)$. Будем предполагать, что рассматриваемая ломаная не плоская и три вектора e_1, e_2 и e_3 составляют базис пространства E^3. Умножим векторное уравнение замкнутости кривой скалярно на e_1, e_2 и e_3. Получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} s_1 &+ s_2a_{12} + s_3a_{13} + \ldots + s_na_{1n} = 0,\\ s_1a_{12} &+ s_2 + s_3a_{23} + \ldots + s_na_{2n} = 0,\\ s_1a_{13} &+ s_2a_{23} + s_3 + \ldots + s_na_{3n} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Наоборот, если выполнена эта система, то выполнено векторное уравнение (1) и кривая замкнута.

Рассмотрим симметрическую n-мерную матрицу $A = \| a_{ij} \|$. Мы покажем ниже, что имеет место

ЛЕММА. *Все элементы матрицы A выражаются через углы φ_i и θ_i.*

Поэтому уравнения (2) являются условиями на s_i, φ_i и θ_i. К полной системе условий надо добавить еще три независимых уравнения. Запишем выражения косинусов углов φ_i и θ_i

$$\cos\varphi_i = a_{ii+1}, \qquad \cos\theta_i = (\beta_i\beta_{i+1}) =$$
$$= \frac{([e_ie_{i+1}]\ [e_{i+1}e_{i+2}])}{\sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1}} = \frac{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1} - a_{ii+2}}{\sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1}}. \tag{3}$$

По этим формулам элементы матрицы A, стоящие на первой линии, параллельной главной диагонали, и a_{1n} выражаются через $\cos\varphi_i$, а элементы второй линии и a_{1n-1}, a_{2n} выражаются через φ_i и θ_i.

Рассмотрим 4-звенную замкнутую ломаную. В системе (2) положим $n = 4$. В этом случае имеем

$$a_{12} = \cos\varphi_1, \quad a_{23} = \cos\varphi_2, \quad a_{34} = \cos\varphi_3, \quad a_{14} = \cos\varphi_4,$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - a_{13}}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - a_{24}}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3},$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\cos\varphi_3\cos\varphi_4 - a_{13}}{\sin\varphi_3\sin\varphi_4}, \qquad \cos\theta_4 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_4 - a_{24}}{\sin\varphi_1\sin\varphi_4}.$$

Из этих уравнений можем найти a_{13} и a_{24}. Так как элементы a_{13} и a_{24} каждый входят в два уравнения, то получим следующие два уравнения на углы φ_i и θ_i:

$$\cos\theta_1\sin\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \cos\theta_3\sin\varphi_4\sin\varphi_3 - \cos\varphi_4\cos\varphi_3, \tag{4}$$

$$\cos\theta_2\sin\varphi_3\sin\varphi_2 - \cos\varphi_3\cos\varphi_2 = \cos\theta_4\sin\varphi_1\sin\varphi_4 - \cos\varphi_1\cos\varphi_4.$$

Третье уравнение на углы φ_i и θ_i получим как условие принадлежности четырех векторов e_1, e_2, e_3, e_4 одному трехмерному пространству — равенство нулю соответствующего им определителя Грама

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & 1 & a_{23} & a_{24} \\ * & & 1 & a_{34} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где звездочка обозначает симметричную часть матрицы. Для того чтобы получить это условие, векторное уравнение (1) умножим скалярно на четыре вектора $e_1, \ldots, e_4$, и так как полученная при этом система 4-х уравнений для s_i имеет нетривиальное решение, то определитель этой системы равен нулю, т. е. имеет место (5). Укажем выражение этого определителя в виде многочлена. Для простоты записи обозначим элементы определителя через x_i. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & x_4 & x_5 \\ * & & 1 & x_6 \\ & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + 2(x_1x_2x_4 + x_2x_3x_6 + x_1x_3x_5 + x_4x_5x_6) - 2(x_1x_6x_2x_5 + x_1x_6x_4x_3 + x_2x_5x_4x_3) + (x_1x_6)^2 + (x_4x_3)^2 + (x_2x_5)^2. \tag{6}$$

Так как все величины a_{ij} выражены через углы φ_i, θ_i, то уравнение (5) является условием на φ_i и θ_i. *Таким образом, 4-звенная ломаная будет замкнута тогда и только тогда, когда выполнены уравнения* (2), (4), (5).

Рассмотрим 5-звенную ломаную. Запишем симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ * & & 1 & a_{34} & a_{35} \\ & & & 1 & a_{45} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы первой линии, параллельной главной диагонали, и a_{15} выражаются через углы φ_i. Элементы второй и третьей линий выражаются через φ_i и θ_i. Именно

$$a_{12} = \cos\varphi_1,\ a_{23} = \cos\varphi_2,\ a_{34} = \cos\varphi_3,\ a_{45} = \cos\varphi_4,$$

$$a_{15} = \cos\varphi_5,$$

$$a_{13} = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\theta_1\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$
$$a_{24} = \cos\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\theta_2\sin\varphi_2\sin\varphi_3,$$
$$a_{35} = \cos\varphi_3\cos\varphi_4 - \cos\theta_3\sin\varphi_3\sin\varphi_4,$$
$$a_{14} = \cos\varphi_4\cos\varphi_5 - \cos\theta_4\sin\varphi_4\sin\varphi_5,$$
$$a_{25} = \cos\varphi_5\cos\varphi_1 - \cos\theta_5\sin\varphi_5\sin\varphi_1.$$

Таким образом для 5-звенной ломаной между десятью элементами матрицы A и десятью углами φ_i и θ_i можно установить взаимно однозначное соответствие. Запишем три независимых уравнения на углы φ_i и θ_i, которые выражают условие принадлежности одному трехмерному пространству соответствующей четверки единичных векторов

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & 1 & a_{23} & a_{24} \\ * & & 1 & a_{34} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & 1 & a_{34} & a_{35} \\ * & & 1 & a_{45} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & 1 & a_{34} & a_{35} \\ * & & 1 & a_{45} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

В эти уравнения надо подставить выражения a_{ij} через φ_i и θ_i. По формуле (6) входящие в эти уравнения определители можно записать в виде многочленов от коэффициентов a_{ij}. Уравнения (7) независимы, так как a_{12} входит только в первое уравнение, a_{15} входит только во второе и a_{25} входит только в третье уравнение. Итак, *система алгебраических уравнений, определяющих условия замкнуто-*

сти 5-звенной ломаной, состоит из уравнений (2) *и* (7).

Для 6-звенной ломаной через углы φ_i и θ_i по формулам (3) можно найти все элементы матрицы A, кроме a_{14}, a_{25} и a_{36}, стоящие на третьей линии. Чтобы определить эти оставшиеся элементы, используем равенство нулю трех определителей Грама соответствующих четверок векторов

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ * & 1 & a_{23} & a_{24} \\ & & 1 & a_{34} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & 1 & a_{34} & a_{35} \\ * & & 1 & a_{45} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & 1 & a_{45} & a_{46} \\ * & & 1 & a_{56} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Относительно искомых величин a_{14} , a_{25} и a_{36} это квадратные уравнения, которые при выполнении определенных неравенств будут иметь действительные решения. Таким образом, все элементы матрицы A можно выразить через φ_i и θ_i. Заметим, что в выписанные определители не вошли элементы a_{15}, a_{16}, a_{26}. После того как a_{14}, a_{25}, a_{36} найдены, запишем три уравнения на углы φ_i и θ_i

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ & 1 & a_{23} & a_{25} \\ * & & 1 & a_{35} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{13} & a_{14} & a_{16} \\ & 1 & a_{34} & a_{36} \\ * & & 1 & a_{46} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ & 1 & a_{34} & a_{36} \\ * & & 1 & a_{46} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Опять замечаем, что эти уравнения независимы, так как a_{15} входит только в первое уравнение, a_{16} — во второе, a_{26} только в третье.

Изложенный метод получения условий применим и для n-звенной ломаной. Установим сформулированную выше лемму. Мы уже отмечали, что элементы первой и второй линий матрицы A, а также элементы a_{1n}, a_{1n-1} и a_{2n} выражаются через углы φ_i и θ_i. Затем определяем элементы третьей линии через углы φ_i и θ_i, используя обращение в нуль соответствующих определителей Грама 4-го порядка. Например, для определения a_{14} используем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & 1 & a_{23} & a_{24} \\ * & & 1 & a_{34} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Затем аналогичным способом определяем элементы четвертой линии и т. д., при этом берем определители,

содержащие только один неизвестный элемент так, чтобы он стоял в правом верхнем углу. Во все эти определители не войдут элементы a_{1n}, a_{1n-1} и a_{2n}. После того как все элементы матрицы A найдены, запишем три уравнения — условия принадлежности E^3 соответствующих четверок векторов e_i

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{1n-1} \\ & 1 & a_{23} & a_{2n-1} \\ * & & 1 & a_{3n-1} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{13} & a_{14} & a_{1n} \\ & 1 & a_{34} & a_{3n} \\ * & & 1 & a_{4n} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} & a_{2n} \\ & 1 & a_{34} & a_{3n} \\ * & & 1 & a_{4n} \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Эти уравнения независимы, так как a_{1n-1} входит только в первое уравнение, a_{1n} только во второе, a_{2n} только в третье уравнение. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Условия замкнутости n-звенной пространственной ломаной заключаются в выполнении системы уравнений* (2), (8), *в которых элементы* a_{ij} *выражаются через углы* φ_i *и* θ_i *с помощью указанного алгоритма.*

Условия замкнутости кривой позволяют дать (хотя бы теоретически) условия замкнутости для некоторых многогранников. В качестве, вообще говоря, зависимых параметров, определяющих многогранник, берем длины ребер s_i, углы ψ_i в плоскостях граней между ребрами, выходящими из одной вершины, и углы θ_i между гранями. Ставится вопрос: каким условиям должны удовлетворять s_i, ψ_i и θ_i для замкнутого многогранника?

Рассмотрим многогранники с сетью ребер правильного многогранника. Построим путь Γ, составленный из ребер многогранника, который назовем путем однозначного определения плоскостей граней. Возьмем какую-нибудь вершину O_1 грани Π_1. Проведем два ребра грани Π_1, идущие друг за другом O_1O_2 и O_2O_3. Ребро O_2O_3 принадлежит кроме Π_1 и другой грани Π_2. Продолжим путь ребром грани Π_2, выходящим из точки O_3. Получим ребро O_3O_4, которое кроме Π_2 принадлежит еще грани Π_3. Этот процесс построения ребер и граней продолжим до тех пор, пока в последовательности граней $\{\Pi_k\}$ не будет повторяющихся. Путь Γ по заданному начальному ребру O_1O_2 и грани Π_1 строится однозначно. Так как этот путь содержит по два ребра от каждой грани Π_k, то он определяет плоскости этих граней. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *На многограннике с сетью ребер правильного многогранника существует замкнутый путь Г одно-*

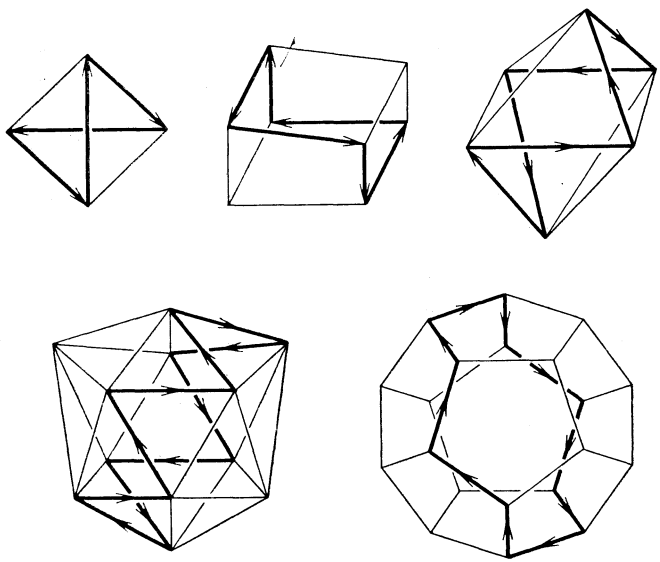
значного определения плоскостей граней. Если сеть ребер является сетью

1) *тетраэдра, то* Γ — 4-*звенная ломаная, произвол в задании многогранника* — 6 *параметров,*

2) *куба или* 3) *октаэдра, то* Γ — 6-*звенная ломаная, произвол* — 12 *параметров,*

4) *икосаэдра или* 5) *додекаэдра, то* Γ — 10-*звенная ломаная, произвол* — 30 *параметров.*

В существовании замкнутого пути Γ можно убедиться непосредственно, см. рис. в случаях 1), 2) и 3) путь Γ



полностью определяет многогранник, так как либо в последовательность граней $\{\Pi_k\}$ войдут все грани многогранника, либо в путь Γ войдут все его вершины. В случаях 4) и 5) это не так. В случае 4) путь Γ не содержит двух точек, которые могут быть взяты произвольно. Произвол в задании одной точки по отношению к Γ определяется тремя параметрами: двугранным углом, углом между двумя ребрами и длиной ребра. Поэтому произвол в задании многогранника с сетью ребер икосаэдра состоит в произволе задания 10-звенной ломаной + 6 параметров, т. е. 30 параметров. Аналогичное рассмотрение проводится в случае 5).

Так как углы ψ_i между ребрами многогранника являются дополнительными к углам кривизны φ_i пути Γ, а углы между гранями θ_i являются углами кручения этой ломаной, то, записывая условия замкнутости кривой Γ, мы получим условия на параметры, определяющие сам многогранник.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступило
12.07.84