С. Г. Басалаев, С. К. Водопьянов, Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathcal{P}$-дифференцируемость соболевских отображений, *Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 4, 700–719

DOI: 10.33048/smzh.2023.64.404

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 517.518.23+517.548.2

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ГЁЛЬДЕРУ СЛЕДОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА СОБОЛЕВА НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ГРУПП КАРНО И $\mathscr{P}$–ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СОБОЛЕВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Г. Басалаев, С. К. Водопьянов

Аннотация. Изучается поведение функций и отображений класса Соболева на группах Карно с левоинвариантной субримановой метрикой. Получены достаточные условия на функцию класса Соболева, при которых она локально гёльдерова (в метрике Карно — Каратеодори) на почти всех гиперплоскостях заданного слоения. Как приложение этих результатов показано, что квазимонотонные контактные отображения групп Карно класса $W^{1,\nu}$ непрерывны, $\mathscr{P}$-дифференцируемы почти всюду и обладают $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.404

Ключевые слова: пространство Соболева, квазиконформный анализ, группа Карно.

По хорошо известному неравенству Морри — Соболева функция $f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, $p > n$, непрерывна по Гёльдеру (возможно после переопределения на множестве меры 0) и

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla f\|_{L_p}$$

для некоторой универсальной постоянной $C = C(n,p) > 0$. Если дано слоение $\mathbb{R}^n$ гладкими гиперповерхностями, то, поскольку гиперповерхность локально имеет структуру $\mathbb{R}^{n-1}$, из неравенства следует, что след функции $f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, $p > n-1$, локально гёльдеров с показателем $1 - \frac{n-1}{p}$ на почти всех гиперповерхностях слоения. Прямолинейное переложение этих рассуждений на функции класса Соболева на группах Карно с метрикой Карно — Каратеодори сопряжено с трудностями. Поскольку метрика имеет существенно анизотропный характер, площади различных сечений шаров Карно — Каратеодори ведут себя как различные степени радиуса. Вследствие этого поверхностная мера, как правило, не обладает условием удвоения. Чтобы получить регулярность по Гёльдеру мы используем некоторые идеи статьи [1] и некоторые результаты из [2]. Прежде всего в разд. 1 мы исследуем, имеет ли место оценка

$$\mathscr{H}^{N-1}(S \cap B(x,r)) \geq \gamma r^{\nu-1} \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

для гиперповерхности S в группе Карно топологической размерности N и хаусдорфовой размерности ν. Оказывается, что это выполнено не всегда. Мы отмечаем два случая, когда оценка (1) выполняется локально:

1) когда поверхность $\mathscr{C}^1$-гладкая и горизонтальная проекция единичной нормали отделена от нуля (т. е. поверхность не имеет характеристических точек);

2) когда группа двухступенчатая и поверхность $\mathscr{C}^{1,1}$-гладкая.

Первый случай доказан в [3] для $\mathscr{C}^\infty$-гладких поверхностей. В лемме 2 приведено независимое короткое доказательство этой оценки для $\mathscr{C}^1$-гладких поверхностей. Второй случай доказан в [4] для $\mathscr{C}^2$-гладких поверхностей и в [5] для $\mathscr{C}^{1,1}$-гладких. Короткое доказательство приведено в лемме 3.

Используя оценку (1), в разд. 2 мы доказываем регулярность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на некоторых классах гиперповерхностей (см. теоремы 2 и 3). Наши рассуждения также дают новое и более короткое доказательство (см. теорему 1) теоремы вложения из статьи [6]. В [6] Хайлаш ввел некоторое обобщение пространств Соболева $M^{1,p}(X)$ на метрическом пространстве X с мерой μ, удовлетворяющей нижней оценке на рост меры $\mu(B(x,r)) \geq \gamma r^s$ для $r \in (0, r_0)$, и доказал включение $M^{1,p}(X) \subset C^{0,1-\frac{s}{p}}(X)$ для $p > s$.

Наш интерес к теоремам вложения мотивирован их приложениями к доказательству некоторых свойств соболевских отображений на группах Карно. Отметим здесь $\mathscr{P}$-дифференцируемость почти всюду отображений класса Соболева (предложение 3), $\mathscr{N}$-свойство Лузина (теорема 4) и непрерывность квазимонотонных контактных отображений класса $W^{1,\nu}$ (предложение 2).

1. Рост площади на группах Карно

Напомним, что *стратифицированная градуированная нильпотентная группа*, или *группа Карно* (см., например, [7–9]), это связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств V_k таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$, $k = 1, \dots, m-1$, и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Группа двухступенчатая, если $m = 2$. Обозначим $n_i = \dim V_i$, $N = n_1 + \ldots + n_m = \dim \mathfrak{g}$. Кортеж $(n_1, \dots, n_m)$ — *флаг* группы.

Набор линейно независимых левоинвариантных векторных полей $X_1, \dots, X_N$ называют *градуированным базисом* $\mathfrak{g}$, если для каждого $k = 1, \dots, m$ некоторый поднабор этих полей — базис V_k. Каждому X_i сопоставим формальный вес $\sigma_i = k$, если $X_i \in V_k$. Экспоненциальное отображение $g = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\right)(e)$ (где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) — глобальный диффеоморфизм, поэтому отождествляем точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Растяжения δ_λ, определенные как $\delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N)$, являются автоморфизмами группы для всех $\lambda > 0$.

Фиксируем скалярное произведение в $\mathfrak{g}$ такое, что подпространства $V_1, \dots, V_m$ ортогональны. Оно индуцирует левоинвариантный метрический тензор $\mathscr{G}$ на $T\mathbb{G}$. Подпространство $V_1 = H\mathbb{G}$ — *горизонтальное пространство*, его элементы — *горизонтальные векторные поля*. Абсолютно непрерывная кривая γ *горизонтальная*, если $\dot\gamma \in H\mathbb{G}$ п. в. *Расстояние Карно — Каратеодори* $d(x,y)$ между точками $x, y \in \mathbb{G}$ определяется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых с концами в x и y. Шары в метрике d обозначаются через B_d. Топология, задаваемая метрикой Карно — Каратеодори, совпадает с евклидовой, но сама метрика не эквивалентна римановой метрике.

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$ и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{k=1}^{m} kn_k = \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Если $S \subset \mathbb{G}$ — $\mathscr{C}^1$-гладкая $(N-1)$-мерная поверхность, через $\mathscr{H}^{N-1}$ обозначаем риманову меру площади на S (измеряемую относительно риманова тензора $\mathscr{G}$).

Градуированной ортонормированной системой координат $(x_1, \dots, x_N)$ на $\mathbb{G}$ называем экспоненциальную систему координат $g = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(e)$, построенную по градуированному ортонормированному реперу $X_1, \dots, X_N$. В градуированной ортонормированной системе координат $(x_1, \dots, x_N)$ определяем ящик

$$\operatorname{Box}(r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < r^{\sigma_i},\ i = 1, \dots, N\}.$$

Определение ящика зависит от фиксированного репера, однако его размер можно оценить независимо от репера.

Лемма 1 (Ball–Box теорема). *Существуют постоянные* $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$ *такие, что в любой градуированной ортонормированной системе координат*

$$\operatorname{Box}(C_1 r) \subset B_d(0, r) \subset \operatorname{Box}(C_2 r).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим фиксированную градуированную ортонормированную систему координат $x = (x_1, \dots, x_N)$ и разобьем координаты по весам $x = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Определим

$$D(r) = \{(y_1, \dots, y_m) : |y_k| < r^k, k = 1, \dots, m\},$$

где $|y_k| = \sqrt{(y_k)_1^2 + \ldots + (y_k)_{n_k}^2}$. Найдутся $0 < a \leq b < +\infty$ такие, что $\operatorname{Box}(a) \subset D(1) \subset \operatorname{Box}(b)$. Поскольку $D(r) = \delta_r D(1)$ и $\operatorname{Box}(r) = \delta_r \operatorname{Box}(1)$, также выполнено

$$\operatorname{Box}(ar) \subset D(r) \subset \operatorname{Box}(br)$$

для всех $r > 0$. Заметим, что множество $D(r)$ инвариантно относительно вращений в подпространствах $\mathbb{R}^{n_k}$, соответствующих координатам y_k одного веса. Следовательно, постоянные a и b одни и те же для всех ортонормированных систем. Наконец, поскольку также выполнено $B_d(0, r) = \delta_r B_d(0, 1)$, те же рассуждения показывают, что найдутся $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ такие, что

$$D(\alpha r) \subset B_d(0, r) \subset D(\beta r)$$

для всех $r > 0$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Через $\nabla_H \varphi$ обозначаем *горизонтальный градиент* функции φ, который для $\mathscr{C}^1$-гладкой функции представляет собой ортогональную проекцию полного градиента $\nabla\varphi$ на горизонтальное подпространство $H\mathbb{G}$. Если $X_1, \dots, X_{n_1}$ — ортонормированный базис $H\mathbb{G}$, то $\nabla_H \varphi = (X_1\varphi, \dots, X_{n_1}\varphi)$.

Поскольку большинство наших рассуждений локальны, будем работать с гиперповерхностью как с поверхностью уровня $\varphi^{-1}(0)$ некоторой $\mathscr{C}^1$-гладкой функции φ с условием $\nabla\varphi \neq 0$. Точка $x \in \varphi^{-1}(0)$ *характеристическая*, если горизонтальная проекция нормали равна нулю, т. е. $\nabla_H \varphi(x) = 0$.

В следующей лемме показано, что вдали от характеристических точек площадь шара на поверхности растет как $r^{\nu-1}$. Это доказано для $\mathscr{C}^\infty$-гладких $(N-1)$-мерных поверхностей в [3, следствие 1]. В [10, теорема 3.11] получены оценки для $\mathscr{C}^1$-гладких поверхностей различных размерностей. Здесь приведено короткое доказательство, независимое от доказательств в упомянутых статьях.

Лемма 2 (рост площади на горизонтально регулярных поверхностях). *Пусть $U \subseteq \mathbb{G}$ открыто, $\varphi \in \mathscr{C}^1(U)$ и $S \subset \varphi^{-1}(0)$ — компакт. Если $\nabla_H\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in S$, то найдутся $r_0 > 0$ и $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ такие, что*

$$\gamma_1 r^{\nu-1} \leq \mathscr{H}^{N-1}(B_d(x,r) \cap \varphi^{-1}(0)) \leq \gamma_2 r^{\nu-1}$$

для всех $x \in S$, $r \in (0, r_0)$.

Доказательство. Пусть $r_1 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(S, \partial U)$ (или любое положительное число в случае $U = \mathbb{G}$) и $m = \min\limits_{x\in S} |\nabla_H\varphi(x)|$. Поскольку $\nabla\varphi$ равномерно непрерывно в r_1-окрестности множества S, найдется $r_2 \in (0, r_1)$ такое, что $|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)| \leq \frac{m}{2}$ для всех $x \in S$, $y \in U$ таких, что $|x - y| \leq r_2$.

Пусть $p \in S$. Поскольку метрика d и мера $\mathscr{H}^{N-1}$ инвариантны относительно левого сдвига, вместо φ можно рассмотреть функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(p^{-1}x)$. Иными словами, без ограничения общности можно считать $p = 0$.

Выберем градуированную ортонормированную систему координат $(x_1, \dots, x_N)$ такую, что $\nabla_H\varphi(0) = a\partial_{x_1}$ и $a > 0$. Заметим, что $a \geq m$. Поскольку для всех $x \in B(0, r_2)$ выполнено $|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(0)| \leq \frac{m}{2}$, по теореме Лагранжа

$$|\varphi(x) - \varphi(0) - \nabla\varphi(0)\cdot x| = \left|\varphi(x) - ax_1 - \sum_{\sigma_i > 1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)x_i\right| \leq \frac{m}{2}|x|. \tag{2}$$

Рассмотрим ящик $\operatorname{Box}(r) = \{|x_i| < r^{\sigma_i} : i = 1, \dots, N\}$. По лемме 1 найдутся постоянные $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$ такие, что

$$\operatorname{Box}(C_1 r) \subseteq B_d(r) \subseteq \operatorname{Box}(C_2 r).$$

Пусть $M = \max\limits_{p\in S} |\nabla\varphi(p)|$. Положим

$$r_3 = \min\left\{1, \frac{r_2}{C_1}, \frac{m}{3MN}\right\}.$$

Тогда по (2) для всех $r \in (0, r_3)$ на грани $x_1 = r$ ящика $\operatorname{Box}(r)$ имеем

$$\varphi(r, x_2, \dots, x_N) \geq ar - \sum_{\sigma_k > 1} Mr^{\sigma_k} - \frac{mr}{2} \geq \frac{mr}{2} - NMr^2 > 0,$$

и по тем же причинам $\varphi(-r, x_2, \dots, x_N) < 0$. Более того, поскольку $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \geq \frac{m}{2} > 0$ в $\operatorname{Box}(r)$, каждому $(x_2, \dots, x_N)$ в ящике соответствует единственное $x_1 \in (-r, r)$ такое, что $\varphi(x_1, \dots, x_N) = 0$. Другими словами, поверхность в ящике есть график функции $x_1 = f(x_2, \dots, x_N) = f(x')$. Евклидова $(N-1)$-мерная мера $\mathscr{E}^{N-1}$ поверхности вычисляется как

$$\mathscr{E}^{N-1}(\operatorname{Box}(r) \cap \varphi^{-1}(0)) = \int\limits_{\operatorname{Box}'(r)} \sqrt{1 + |\nabla f(x')|}\, dx' = \int\limits_{\operatorname{Box}'(r)} \frac{|\nabla\varphi(f(x'), x')|}{|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(f(x'), x')|}\, dx',$$

где $x' = (x_2, \dots, x_N)$ и $\mathrm{Box}'(r) = \{|x_i| < r^{\sigma_i} : i = 2, \dots, N\}$. Поскольку в $\mathrm{Box}(r)$ выполнена оценка $1 \le \frac{|\nabla\varphi|}{|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}|} \le \frac{M}{m/2}$, имеем

$$r^{\nu-1} \le \mathscr{E}^{N-1}(\mathrm{Box}(r) \cap \varphi^{-1}(0)) \le \frac{2M}{m} r^{\nu-1}.$$

В шаре $B(0, r_2)$ риманов тензор $\mathscr{G}$ билипшицево эквивалентен евклидову, в частности, существуют $0 < \alpha \le \beta < +\infty$ такие, что $\alpha\, d\mathscr{E}^{N-1} \le d\mathscr{H}^{N-1} \le \beta\, d\mathscr{E}^{N-1}$. Таким образом,

$$\alpha C_1^{\nu-1} r^{\nu-1} \le \mathscr{H}^{N-1}(B_d(r) \cap \varphi^{-1}(0)) \le \frac{2M\beta}{m} C_2^{\nu-1} r^{\nu-1}$$

для всех $r \in \left(0, \frac{r_3}{C_1}\right)$. $\square$

В общем случае оценка леммы 2 нарушается в характеристических точках поверхности (см. примеры 1 и 2 ниже). Однако для двухступенчатых групп в характеристических точках по-прежнему выполнена оценка снизу. Это доказано в [4] для $\mathscr{C}^2$-гладких поверхностей и в [5] для $\mathscr{C}^{1,1}$-гладких поверхностей. Мы приводим короткое независимое доказательство этой оценки.

Лемма 3 (рост площади гиперповерхности на двухступенчатых группах). *Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа, $U \subseteq \mathbb{G}$ открыто, $\varphi \in \mathscr{C}^{1,1}(U)$ и $S \subset \varphi^{-1}(0)$ — компакт. Если $|\nabla\varphi(x)| \ne 0$ для всех $x \in S$, то существуют $r_0 > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что*

$$\mathscr{H}^{N-1}(B_d(x, r) \cap \varphi^{-1}(0)) \ge \gamma r^{\nu-1}$$

для всех $x \in S$, $r \in (0, r_0)$.

Доказательство. Положим $m = \min\limits_{p \in S} |\nabla\varphi(p)|$ и рассмотрим

$$S_1 = \left\{p \in S : |\nabla_H\varphi(p)| \ge \frac{m}{\sqrt{2}}\right\}, \quad S_2 = \left\{p \in S : |\nabla_H\varphi(p)| \le \frac{m}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Оценка на множестве S_1 получена в лемме 2, и нам остается лишь вывести ее на множестве S_2.

Пусть $r_1 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(S_2, \partial U)$ (или любое положительное число в случае $U = \mathbb{G}$). Найдется $L > 0$ такое, что

$$|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)| \le L|x - y|$$

для всех $x \in S_2$, $y \in B(x, r_1)$. По теореме Лагранжа

$$|\varphi(y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot (y - x)| \le L|x - y|^2 \tag{3}$$

для всех $x \in S_2$, $y \in B(x, r_1)$.

Пусть $p \in S_2$. Как и в лемме 2, без ограничения общности можно считать $p = 0$. Обозначим точки $\mathbb{G}$ через $(x, z) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Вращениями в горизонтальном и вертикальном подпространствах перейдем в такую ортонормированную систему координат (x, z), что $\nabla\varphi(0) = a\partial_{x_1} + b\partial_{z_1}$ и $b > 0$. Заметим, что $|a| \le \frac{m}{\sqrt{2}}$ и $|b| \ge \frac{m}{\sqrt{2}}$. Положим

$$r_2 = \min\left\{r_1, \left(\frac{m(\sqrt{2} - 1)}{2L}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

и рассмотрим $\mathrm{Box}(r) = \{|x_i| < r, |z_j| < r^2 : i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2\}$, $r \in (0, r_2)$. По (3) на грани $z_1 = r^2$ ящика имеем

$$\varphi(x,z) \geq ax_1 + br^2 - L|x|^2 - L|z|^2 \geq -\frac{m}{\sqrt{2}}|x_1| + \frac{m}{\sqrt{2}}r^2 - L|x|^2 - Lr^4$$
$$= r^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}} - Lr^2\right) - \frac{m}{\sqrt{2}}|x_1| - L|x|^2 \geq \frac{m}{2}r^2 - m|x_1| - L|x|^2.$$

Аналогичную оценку можно сделать на грани $z_1 = -r^2$. Следовательно, при $|x_1| \leq \frac{r^2}{4}$ и $|x| \leq \left(\frac{m}{4L}\right)^{\frac{1}{2}} r$ выполнено

$$\varphi(x,z)|_{z_1=r^2} > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x,z)|_{z_1=-r^2} < 0.$$

Стало быть, найдется $z_1 \in (-r^2, r^2)$ такое, что $\varphi(x,z) = 0$. Мы доказали, что поверхность находится внутри $\mathrm{Box}(r)$ по крайней мере пока $|x_1| \leq \frac{r^2}{4}$, $|x_i| \leq Cr$, $i = 2, \dots, n_1$, $|z_j| \leq Cr^2$, $j = 2, \dots, n_2$, где $C = \min\left\{\frac{1}{n_1}\left(\frac{m}{4L}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{n_2}\right\}$. Это позволяет оценить площадь проекции поверхности на гиперплоскость $z_1 = 0$. Поскольку евклидова площадь поверхности не меньше площади ее ортогональной проекции, имеем

$$\mathscr{E}^{N-1}(\mathrm{Box}(r) \cap \varphi^{-1}(0)) \geq \frac{r^2}{4}(Cr)^{n_1-1}(Cr^2)^{n_2-1} = C'r^{n_1+2n_2-1} = C'r^{\nu-1}$$

для всех $r \in (0, r_2)$. Отсюда следует желаемая оценка, поскольку, как упомянуто в доказательстве леммы 2, шары и ящики соизмеримы и меры $\mathscr{E}^{N-1}$, $\mathscr{H}^{N-1}$ билипшицево эквивалентны в окрестности начала координат. $\square$

Два примера ниже показывают, что условия последней леммы не могут быть ослаблены в общем случае, т. е. она нарушается для некоторых трехступенчатых групп и для некоторых $\mathscr{C}^{1,\alpha}$-гладких отображений, $0 < \alpha < 1$. Однако эксперименты указывают на то, что на отдельных группах оценка возможна и при более слабых условиях.

Пример 1 (лемма 3 неверна для трехступенчатых групп). Рассмотрим трехступенчатую группу $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^8, \cdot)$ с флагом $(6,1,1)$ (например, $\mathbb{E} \times \mathbb{R}^4$, где $\mathbb{E}$ — группа Энгеля). Равномерная размерность группы $\nu = 11$. Обозначим точки в $\mathbb{G}$ через (x,y,z), $x \in \mathbb{R}^6$, $y, z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим гладкую поверхность $S = \{z = |x|^2\}$. Тогда в $\mathrm{Box}(r) = \{|x| < r, |y| < r^2, |z| < r^3\}$, $r \leq 1$, имеем

$$S \cap \mathrm{Box}(r) = \{z = |x|^2 : |x| < r^{\frac{3}{2}}, |y| < r^2\}.$$

Следовательно, для малых r площадь пересечения асимптотически ведет себя как $r^{\frac{3}{2}\cdot 6+2} = r^{11}$ и не может быть ограничена через $r^{\nu-1} = r^{10}$ снизу.

Пример 2 (лемма 3 неверна для $\mathscr{C}^{1,\alpha}$-гладких поверхностей). Рассмотрим двухступенчатую группу $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{n+1}, \cdot)$ с флагом $(n,1)$ (например, $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}^{n-2}$, где $\mathbb{H}^1$ — группа Гейзенберга). Однородная размерность группы $\nu = n+2$. Обозначим точки в $\mathbb{G}$ через (x,z), $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим при $\alpha \in (0,1)$ поверхность $S = \{z = |x|^{1+\alpha}\}$. Тогда в $\mathrm{Box}(r) = \{|x| < r, |z| < r^2\}$, $r < 1$, имеем

$$S \cap \mathrm{Box}(r) = \{z = |x|^{1+\alpha} : |x| < r^{\frac{2}{1+\alpha}}\}.$$

Следовательно, для малых r площадь пересечения асимптотически ведет себя как $r^{\frac{2n}{1+\alpha}}$. В частности, $\frac{2n}{1+\alpha} > \nu - 1$ при $\alpha < \frac{n-1}{n+1}$.

Класс поверхностей, представляющий для нас особый интерес, это сферы. Напомним, что *однородная норма* на $\mathbb{G}$ — это непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ такая, что

(a) $\rho(0) = 0$, $\rho(x) > 0$ при $x \neq 0$;

(b) $\rho(\delta_t x) = t\rho(x)$ при $t > 0$;

(c) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$;

(d) существует постоянная $q > 0$ такая, что выполнено обобщенное неравенство треугольника

$$\rho(xy) \leq q(\rho(x) + \rho(y)) \tag{4}$$

для всех $x, y \in \mathbb{G}$.

Ясно, что однородная норма определена неоднозначно. Однако любые две однородные нормы эквивалентны [8, предложение 1.6]. Расстояние Карно — Каратеодори $\rho(x) = d(0, x)$ служит примером такой нормы. Но известно, что сферы Карно — Каратеодори имеют точки недифференцируемости. Поэтому чтобы применить наши результаты рассмотрим гладкую (кроме начала координат) однородную норму. К примеру, фиксируем однородную норму ρ на группе Карно такую, что $\rho|_{V_1}$ определяется скалярным произведением, по отношению к которому значения $X_i(0)$ векторных полей X_i в единице группы ортонормированы и $\rho(X_i(0)) = 1$, $1 \leq i \leq N$. Для определенности возьмем в качестве нормы элемента $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m), x_k \in V_k$, величину

$$\rho(x) = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^{2m!/k} \right)^{1/2m!},$$

где $|x_i|$ — евклидова норма на V_i. Однородная норма определяет однородную (квази)метрику: для точек $x, y \in \mathbb{G}$ полагаем $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x)$.

Лемма 4. *Пусть $\rho \in \mathscr{C}^1(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ — однородная норма на $\mathbb{G}$. Определим на каждой сфере $S(r) = \{x \in \mathbb{G} : \rho(x) = r\}$, $r > 0$, меру Радона $\mathscr{S}^{N-1}$, полагая*

$$d\mathscr{S}^{N-1}(y) = \frac{d\mathscr{H}^{N-1}(y)}{|\nabla\rho(y)|}, \quad y \in S(r).$$

Тогда

(1) $d\mathscr{S}^{N-1}(\delta_t y) = t^{\nu-1}\, d\mathscr{S}^{N-1}(y)$ для всех $t > 0$, $y \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$;

(2) если $u \in L_1(\mathbb{G})$, то $u \in L_1(S(r); \mathscr{S}^{N-1})$ для почти всех $r > 0$ и выполнена следующая формула коплощади:

$$\int_{\mathbb{G}} u(x)\, dx = \int_0^{+\infty} dr \int_{S(r)} u(y)\, d\mathscr{S}^{N-1}(y). \tag{5}$$

Заметим, что формула коплощади такого рода доказана в [8] другим методом. В нашем случае доказательство элементарно, поскольку известна плотность меры.

Доказательство. (1) Заметим, что, дифференцируя $t\rho(x) = \rho(\delta_t x)$ по t в точке $t = 1$, получаем тождество

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i x_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i}(x).$$

Следовательно, $\nabla\rho(x) \neq 0$ для всех $x \neq 0$, и определение $\mathscr{S}^{N-1}$ корректно. $(N-1)$-форма площади ω на $\mathscr{C}^1$-гладкой поверхности $S(r)$ определяется внутренним произведением $\omega = \imath(\vec{n})\,dx$ формы объема $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$ с единичной нормалью $\vec{n} = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$, или, эквивалентно,

$$dx = \frac{d\rho}{|\nabla\rho|} \wedge \omega = d\rho \wedge \frac{\omega}{|\nabla\rho|}.$$

Обозначим через $\eta = \frac{\omega}{|\nabla\rho|}$ форму площади, соответствующую мере $\mathscr{S}^{N-1}$. Поскольку $\delta_r^* dx = r^\nu dx$ и $\delta_r^* d\rho = d(\rho \circ \delta_r) = d(r\rho) = r\,d\rho$ для всех $r > 0$, делаем вывод, что

$$r^\nu d\rho \wedge \eta = r^\nu dx = \delta_r^* dx = \delta_r^*(d\rho \wedge \eta) = r\,d\rho \wedge \delta_r^*\eta.$$

Применяя $\imath(\nabla\rho)$ к обеим частям тождества, получаем

$$r^\nu |\nabla\rho|^2 \eta = r|\nabla\rho|^2 \delta_r^* \eta,$$

что дает искомое свойство $\delta_r^*\eta = r^{\nu-1}\eta$.

(2) Напомним, что по формуле коплощади если $v \cdot |\nabla\rho| \in L_1(\mathbb{G})$, то $v \in L_1(S(r); \mathscr{H}^{N-1})$ для почти всех $r > 0$ и

$$\int\limits_{\mathbb{G}} v(x)|\nabla\rho(x)|\,dx = \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{S(r)} v(y)\,d\mathscr{H}^{N-1}(y).$$

Так как $\nabla\rho(x) \neq 0$ для всех $x \neq 0$, достаточно рассмотреть $u(x) = \frac{v(x)}{|\nabla\rho(x)|}$ и получить

$$\int\limits_{\mathbb{G}} u(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{S(r)} u(y)\frac{d\mathscr{H}^{N-1}(y)}{|\nabla\rho(y)|} = \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{S(r)} u(y)\,d\mathscr{S}^{N-1}(y).$$

Лемма доказана. □

Лемма 5 (рост площади на сферах в двухступенчатой группе). *Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно, $\rho \in \mathscr{C}^{1,1}(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ — однородная норма. Тогда найдется постоянная $\gamma > 0$ такая, что*

$$\mathscr{S}^{N-1}(S(r) \cap B_d(x,t)) \geq \gamma t^{\nu-1}$$

для всех $r > 0$, $x \in S(r)$ и $t \in (0, \operatorname{diam}_d S(r)]$.

Доказательство. Поскольку $S(1)$ компактно, по лемме 3 найдутся $t_0 > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\mathscr{H}^{N-1}(S(1) \cap B_d(x,t)) \geq \gamma t^{\nu-1}$$

для всех $x \in S(1)$, $t \in (0, t_0)$. Поскольку площадь поверхности меняется непрерывно относительно x и t, можно расширить эту оценку до шаров, покрывающих всю сферу, т. е.

$$\mathscr{H}^{N-1}(S(1) \cap B_d(x,t)) \geq \min\{\gamma, \gamma'\} t^{\nu-1}$$

для всех $x \in S(1)$, $t \in (0, \operatorname{diam}_d S(1))$, где

$$\gamma' = \min_{\substack{t \in [t_0, \operatorname{diam}_d S(1)],\\ x \in S(1)}} \frac{\mathscr{H}^{N-1}(S(1) \cap B_d(x,t))}{t^{\nu-1}}.$$

Поскольку $\mathscr{S}^{N-1}$ и $\mathscr{H}^{N-1}$ билипшицево эквивалентны на $S(1)$, та же оценка верна для $\mathscr{S}^{N-1}$ с некоторой $\gamma'' > 0$. Наконец, из однородности d и $\mathscr{S}^{N-1}$ следует равномерная оценка

$$\mathscr{S}^{N-1}(S(r) \cap B_d(x,t)) = r^{\nu-1}\mathscr{S}^{N-1}(S(1) \cap B_d(x,t/r)) \geq \gamma'' t^{\nu-1}$$

для всех $r > 0$, $x \in S(r)$, $t \in (0, \operatorname{diam}_d S(r))$. $\square$

2. Теоремы вложения

Пусть X — метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ. Один из способов определить пространство Соболева на метрическом пространстве — применить поточечные оценки. Будем говорить, что f *принадлежит* $M^1_p(X)$, если $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(X)$ и существует неотрицательная функция $g \in L_p(X)$ такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)) \tag{6}$$

для всех $x, y \in X \setminus S$, где $\mu(S) = 0$. Это определение на произвольном метрическом пространстве предложено Хайлашем в [11]. Ранее оценка, аналогичная (6), для функций классов Соболева функции применялась на группах Карно (см. [2]).

В [6] доказаны различные теоремы вложения на метрических пространствах в предположении, что мера имеет нижнюю границу роста, а именно, если $B_0 = B(x_0, r_0)$ — фиксированный шар, то найдутся $s > 0$, $\gamma > 0$ и $\sigma > 1$ такие, что

$$\gamma r^s \leq \mu(B(x,r)) < +\infty \tag{7}$$

для всех шаров $B(x,r) \subseteq \sigma B_0$.

Приведем короткое альтернативное доказательство теоремы вложения в случае непрерывности по Гёльдеру, использующее некоторые идеи из [1] (см. [6, теорема 8.7], где рассматриваются все случаи теорем вложения).

Теорема 1. *Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой μ, удовлетворяющей условию (7) на B_0. Пусть f, g удовлетворяют (6) на σB_0 при $p > s \geq 1$. Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от σ, s и p, такая, что*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\gamma^{-\frac{1}{p}} d(x,y)^{1-\frac{s}{p}} \biggl(\int\limits_{\sigma B_0} g^p \, d\mu\biggr)^{\frac{1}{p}}$$

для почти всех $x, y \in B_0$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $y \in B_0$, $B = B(y,r) \subseteq B_0$ и $x \in \sigma B = B(y, \sigma r)$. Из (6), (7) и неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned}|f(x) - f_B| &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(x) - f(z)| \, d\mu(z) \leq (1+\sigma) r \biggl(g(x) + \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B g(z) \, d\mu(z)\biggr) \\ &\leq (1+\sigma) r \biggl(g(x) + \frac{\|g\|_{p,B}}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}\biggr) \leq (1+\sigma)(r g(x) + \gamma^{-\frac{1}{p}} r^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,B}).\end{aligned}$$

В частности, поскольку функция $g(x)$ конечна п. в., $f_{B(x,r)} \to f(x)$ при $r \to 0$ для почти всех $x \in B_0$.

Шаг 2. Пусть $x \in B_0$, $B = B(x, cr_0)$, где $c = \min\left\{\sigma-1, \frac{1}{2}\right\}$. Тогда $\sigma B \subset \sigma B_0$ и в силу шага 1 имеем

$$\begin{aligned}|f_B - f_{B_0}| &\le \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(x) - f_{B_0}|\, d\mu(x) \\ &\le \frac{(1+\sigma)r_0}{\mu(B)} \int\limits_B g(x)\, dx + (1+\sigma)\gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,B_0} \\ &\le \left(\frac{2}{c}\right)^{\frac{1}{p}} (1+\sigma)\gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,B} + (1+\sigma)\gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,B_0} \\ &\le C_1 \gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0},\end{aligned}$$

где C_1 зависит только от σ.

Шаг 3. Пусть точка $x \in B_0$ такова, что $f_{B(x,r)} \to f(x)$ при $r \to 0$, и рассмотрим последовательность шаров $B_n = B(x, c^n r_0)$. Применяя шаг 2 к каждому B_n, получаем

$$\begin{aligned}|f(x) - f_{B_0}| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |f_{B_{n+1}} - f_{B_n}| \le C_1 \gamma^{-\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} (c^n r_0)^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_n} \\ &\le C_1 \gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (c^{1-\frac{s}{p}})^n = C_2 \gamma^{-\frac{1}{p}} r_0^{1-\frac{s}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0},\end{aligned}$$

где C_2 зависит только от σ, s и p.

Шаг 4. В силу шага 1 имеем $f_{B(x,r)} \to f(x)$ при $r \to 0$ для почти всех $x \in B_0$. Пусть таковыми являются $x, y \in B_0$. Если $d(x,y) < \frac{\sigma-1}{2} r_0$, то применение шага 3 к шару $B = B(x, 2d(x,y))$ дает

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_B| + |f_B - f(y)| \\ &\le 2^{2-\frac{c}{p}} C_2 \gamma^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\sigma B}\, d(x,y)^{1-\frac{s}{p}} \le C_3 \gamma^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0}\, d(x,y)^{1-\frac{s}{p}}.\end{aligned}$$

В случае $d(x,y) \ge \frac{\sigma-1}{2} r_0$ достаточно применить шаг 3 к самому шару B_0 и получить

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_{B_0}| + |f_{B_0} - f(y)| \\ &\le 2C_2 \gamma^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0}\, r_0^{1-\frac{s}{p}} \le C_4 \gamma^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\sigma B_0}\, d(x,y)^{1-\frac{s}{p}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Вернемся к случаю групп Карно. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ открыто. Пространство $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-й степени. Норма на $L_p(\Omega)$ определяется формулой

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Когда $\Omega = \mathbb{G}$, пишем $\|u\|_p = \|u\|_{p,\mathbb{G}}$. Будем говорить, что u *принадлежит* $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если $u \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, \dots, X_n$ образуют базис горизонтального подпространства $H\mathbb{G}$. Пространство Соболева $L^1_p(\Omega)$ — это пространство функций $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $X_j u \in L_p(\Omega)$ вдоль векторных полей X_j, $j = 1, \dots, n_1$, т. е. такие функции g_j, что

$$\int\limits_\Omega g_j(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u(x)X_j\varphi(x)\,dx, \quad j = 1, \dots, n,$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Полунорма на L^1_p равна $\|u \mid L^1_p(\Omega)\| = \|\,|\nabla_H u|\,\|_{p,\Omega}$, где $\nabla_H u = (X_1 u, \dots, X_n u)$. Пространство Соболева $W^1_p(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega)\cap L^1_p(\Omega)$, имеющих конечную норму $\|u \mid W^1_p(\Omega)\| = \|u\|_{p,\Omega} + \|u \mid L^1_p(\Omega)\|$.

Следующая оценка установлена при доказательстве теоремы 1 в [2].

Лемма 6 [2]. *Если $f \in L^1_p(\mathbb{G})$, $p \in (1, +\infty]$, то существует множество Z меры нуль такое, что*

$$|f(x) - f(y)| \le Cd(x,y)(M_{3d(x,y)}(\nabla_H f)(x) + M_{3d(x,y)}(\nabla_H f)(y))$$

для всех $x, y \in \mathbb{G} \setminus Z$, где $C \ge 0$ не зависит от выбора f, а

$$M_t(h)(z) = \sup_{0<s\le t} \frac{1}{|B(z,s)|} \int\limits_{B(z,s)} |h(y)|\,dy$$

— усеченная максимальная функция Харди — Литтлвуда.

По теореме о максимальной функции (см. [8, гл. 2] для случая однородных групп) $M_t(\nabla_H f) \in L_p(\mathbb{G})$, так что мы имеем все условия для применения теоремы 1 на гиперповерхностях групп Карно.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^1_p(\mathbb{G})$, $p > \nu - 1$, $\varphi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, и выполняется одно из следующих условий:*

- *$\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{G})$, $|\nabla_H\varphi| > 0$ на $\varphi^{-1}(t)$ для почти каждого $t \in \mathbb{R}$;*
- *группа $\mathbb{G}$ двухступенчатая, $\varphi \in \mathscr{C}^{1,1}(\mathbb{G})$ и $|\nabla\varphi| > 0$ на $\varphi^{-1}(t)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$.*

Тогда можно переопределить f на множестве меры нуль так, что для почти всех $t \in \mathbb{R}$ она будет локально непрерывной по Гёльдеру на $\varphi^{-1}(t)$. В частности, если $x_0 \in \varphi^{-1}(t)$ для такого t, то существуют $r_0 > 0$ и $C > 0$, зависящие только от x_0 и p, такие, что

$$|f(x) - f(y)| \le Cd(x,y)^{1-\frac{\nu-1}{p}} \Biggl(\int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap B_d(x_0,2r_0)} M_{3r_0}(\nabla_H f)^p \, d\mathscr{H}^{N-1} \Biggr)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $x, y \in \varphi^{-1}(t) \cap B_d(x_0, r_0)$.

Доказательство. Напомним, что по формуле коплощади если $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ такова, что $u \cdot |\nabla\varphi| \in L_1(\mathbb{G})$, то $u \in L_1(\varphi^{-1}(t); \mathscr{H}^{N-1})$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$\int\limits_{\mathbb{G}} u(x)\,|\nabla\varphi(x)|\;dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} u(y)\,d\mathscr{H}^{N-1}(y).$$

Пусть $Z' = \{x \in \mathbb{G} : \nabla\varphi(x) = 0\}$. Заметим, что по условию теоремы $\varphi(Z')$ имеет меру нуль. Если $v \in L_1(\mathbb{G})$, то $\frac{v}{|\nabla\varphi|} \in L_1(\varphi^{-1}(t); \mathscr{H}^{N-1})$ для почти всех $t \in \mathbb{R} \setminus \varphi(Z')$ и

$$\int\limits_{\mathbb{G}\setminus Z'} v(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\varphi(Z')} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} \frac{v(y)}{|\nabla\varphi(y)|}\, d\mathscr{H}^{N-1}(y).$$

Обозначим $g_\tau(x) = M_\tau(\nabla_H f)(x)$, $\tau > 0$. Тогда есть множество нулевой меры $\Sigma_\tau \subset \mathbb{R}$ такое, что $\frac{g_\tau}{|\nabla\varphi|^{1/p}} \in L_p(\varphi^{-1}(t); \mathscr{H}^{N-1})$ для всех $t \in \mathbb{R} \setminus (\varphi(Z') \cup \Sigma_\tau)$. По определению максимальной функции $0 \le g_\tau \le g_n$ для всех $\tau \in (0, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Если положим $\Sigma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$, то $\frac{g_\tau}{|\nabla\varphi|^{1/p}} \in L_p(\varphi^{-1}(t); \mathscr{H}^{N-1})$ для всех $t \in \mathbb{R} \setminus (\varphi(Z') \cup \Sigma)$ и для всех $\tau > 0$.

Пусть Z — множество меры нуль из леммы 6. Тогда $\mathscr{H}^{N-1}(Z \cap \varphi^{-1}(t)) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma \cup \varphi(Z'))$. Зафиксируем такое t и точку $x_0 \in \varphi^{-1}(t)$.

Существует $r_1 > 0$ такое, что $|\nabla\varphi(x)|$ ограничен сверху и снизу на $B_1 = B_d(x_0, r_1)$. Применяя или лемму 2, или лемму 3, находим такие $r_2 > 0$ и $\gamma > 0$, что

$$\mathscr{H}^{N-1}(\varphi^{-1}(t) \cap B_d(x, r)) \ge \gamma r^{\nu-1}$$

для всех $x \in \overline{B_1}$, $r \in (0, r_2]$. Возьмем $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$ и $B_0 = B_d(x_0, r_0)$. Рассмотрим $\varphi^{-1}(t)$ как метрическое пространство с метрикой d и мерой $\mathscr{H}^{N-1}$. Тогда можно применить теорему 1 для пары функций f, g_{3r_0} и получить неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le C d(x, y)^{1-\frac{\nu-1}{p}} \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap 2B_0} g_{3r_0}(z)^p\, d\mathscr{H}^{N-1}(z) \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

для $\mathscr{H}^{N-1}$-почти всех $x, y \in \varphi^{-1}(t) \cap B_0$. $\square$

С помощью меры $\mathscr{S}^{N-1}$, введенной в лемме 4, можно доказать гёльдерову непрерывность L^1_p-функций на почти всех сферах. Близкие результаты о гёльдеровой непрерывности на сферах получены ранее в [2, теорема 1], где модуль непрерывности выражается через меру шара $\mathscr{S}^{N-1}(S(r) \cap B(x, d(x, y)))$ вместо самой метрики, и в [12, теорема 7.1], где в правой части верхний градиент интегрируется по шару вместо сферы.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно, $\rho \in \mathscr{C}^{1,1}(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ — однородная норма на $\mathbb{G}$, $f \in L^1_p(\mathbb{G})$, $p > \nu - 1$. Тогда функцию f можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы для почти всех $r > 0$ она была непрерывной по Гёльдеру на сфере $S(r) = \{x \in \mathbb{G} : \rho(x) = r\}$ и*

$$|f(x) - f(y)| \le C d(x, y)^{1-\frac{\nu-1}{p}} \Bigg(\int\limits_{S(r)} M_{6r}(\nabla_H f)(y)^p\, d\mathscr{S}^{N-1}(y) \Bigg)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

для всех $x, y \in S(r)$, где постоянная $C > 0$ не зависит от выбора f и r.

Доказательство. Рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 2. По формуле коплощади (5) имеем $M_\tau(\nabla_H f) \in L_p(S(r); \mathscr{S}^{N-1})$ для почти всех $r > 0$ и всех $\tau > 0$. Лемма 5 дает универсальную оценку роста $\mathscr{S}^{N-1}$ на сферах. Лемма 6 дает поточечную оценку функции f на $S(r)$

через величину $M_{6r}(\nabla_H f)$. Наконец, теорема 1 для $(S(r), d, \mathscr{S}^{N-1})$ и для пары функций $f, M_{6r}(\nabla_H f)$ дают искомую оценку. $\square$

Сформулируем утверждение, описывающее поведение функций $f \in L^1_p(\mathbb{G})$, $p > \nu - 1$, на общих группах Карно. Для этого в условиях [12, теорема 7.1] полагаем $C_b = 1$, $s = \nu$, $\sigma = 1.2$ и $C_d = 2^\nu$. Обозначим символом C_P постоянную в p-неравенстве Пуанкаре.

С фиксированной точкой $a \in \Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{G}$ группы Карно $\mathbb{G}$ ассоциируем число $R_0 = \frac{1}{10}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ и последовательность $R_i = R_0/2^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Предложение 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на группе Карно $\mathbb{G}$, $f \in L^1_p(\Omega)$, $p > \nu - 1$, ρ — гладкая однородная норма на $\mathbb{G}$ и $\psi(x) = \rho(a^{-1}x)$, где $a \in \Omega$. Тогда можно переопределить f на множестве нулевой меры так, чтобы ее ограничение на $S(a, r)$ было непрерывно по Гёльдеру с показателем $1 - (\nu - 1)/p$ для почти всех $r \in (0, R_0)$. В частности, существуют постоянная $C > 0$ и радиус $R_i < r_i < R_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что*

$$|f(x) - f(y)|^p \leq C\rho(x, y)^{p-(\nu-1)} R_{i-1}^{\nu-1} \fint_{B(a, 6R_{i-1})} M^p_{9R_{i-1}}(\nabla_H f)(x)\, dx \qquad (9)$$

для любых $x, y \in S(a, r_i)$. Постоянная C зависит только от p, ν, C_P и C_d.

3. Применения

3.1. Непрерывность квазимонотонных отображений класса W^1_ν. Возьмем некоторую область Ω в $\mathbb{G}$ и отображение $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где $\widetilde{\mathbb{G}}$ — еще одна группа Карно. Говорят, что отображение $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, $\nu - 1 < p \leq \nu$ (см. [13, гл. 4]), если выполняются следующие условия.

(A) Для любой точки $z \in \mathbb{G}$ функция $[\varphi]_z : x \in \Omega \mapsto d(\varphi(x), z)$ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(B) Семейство функций $(\nabla_{\mathscr{L}}[\varphi]_z)_{z \in \widetilde{\mathbb{G}}}$ имеет мажоранту, принадлежащую классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}}[\varphi]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Напомним, что все координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\widetilde{N}}$ отображения φ принадлежат $W^1_p(\Omega; \mathbb{R})$ (см. [13, предложение 4.2; 20, предложение 1]). Далее удалим из Ω множество нулевой меры, чтобы получить общую область определения $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ всех координатных функций, для которых каждая точка $\widetilde{\Omega}$ будет точкой Лебега всех координатных функций. Известно (см. [14–16]), что множество $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ имеет нулевую $(1, p)$-емкость.

Согласно [17, предложение 5] ограничение любой координатной функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\widetilde{N}}$ на сферу $S(x, r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x, y) = r\}$ непрерывно для почти всех $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$[1)].

Можно считать, что заданное отображение $\varphi \in W^1_p(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$ также непрерывно на сфере $S(x, r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x, y) = r\}$ для почти всех $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$.

Отображение $\varphi \in W^1_p(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, называется *K-квазимонотонным*, где $K \in [1, \infty)$ — некоторая константа, если φ удовлетворяет следующему

[1)] Согласно свойствам множеств нулевой емкости (см. [17, предложение 5]) имеем совпадение $S(x, r) = \{y \in \Omega : \rho(x, y) = r\} = \{y \in \widetilde{\Omega} : \rho(x, y) = r\}$ для всех $x \in \Omega$ и для почти всех $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$.

условию: для каждой точки $a \in \Omega$ существует $r_a > 0$ такое, что для почти всех $r \in (0, r_a)$

$$\operatorname*{osc}_{B(a,r)\cap\widetilde{\Omega}} \varphi = \operatorname{diam}(\varphi(B(a,r)\cap\widetilde{\Omega})) \leq K \operatorname{diam}(\varphi(S(a,r)))$$

на шаре $B(a,r) \subset \Omega$, где $B(a,r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(a,y) < r\}$. (Здесь диаметр множества $A \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ равен $\sup\limits_{x,y\in A} \widetilde{\rho}(x,y)$.)

В следующей лемме установим свойство, используемое в дальнейших рассуждениях. Будем использовать те же обозначения, что и в предложении 1.

Лемма 7. *Пусть $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — непрерывное K-квазимонотонное отображение класса Соболева $W_p^1(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$, $\nu - 1 < p \leq \nu$. Тогда для всякой точки $a \in \Omega$ и почти всякого числа $r \in (R_{i+1}, R_i]$, $i \in \mathbb{N}$, диаметр $\varphi(S(a,r))$ удовлетворяет следующему неравенству:*

$$(\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r))))^p \leq r^p 4^p K^p C' \fint_{B(a,6R_{i-1})} M^p_{9R_0}(D_H\varphi)(x)\,dx, \tag{10}$$

в котором постоянная C' не зависит от данного отображения и радиуса r.

Доказательство. Для оценки осцилляции отображения $\varphi \in W_p^1(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$ применим предложение 1 с теми же обозначениями. Фиксируем $a \in \Omega$ и $r \in (R_{i+1}, R_i]$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r_i))) = \widetilde{d}(\varphi(x_0),\varphi(y_0))$, $x_0, y_0 \in S(a,r_i)$, где $r_i \in (R_i, R_{i-1}]$ из предложения 1. Очевидно, (9) применяется к функции $\Omega \ni x \mapsto f(x) = \widetilde{d}(\varphi(x_0),\varphi(x))$. Используя справедливое почти всюду в Ω неравенство $|\nabla_H f|(x) \leq c|D_H\varphi|(x)$ (вытекающее из липшицевой непрерывности функции $\widetilde{\mathbb{G}} \ni y \mapsto \widetilde{d}(\varphi(x_0), y)$), подставляем f в (9), чтобы получить

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r_i)))^p &= |f(y_0) - f(x_0)|^p \\ &\leq C\rho(x_0,y_0)^{p-(\nu-1)} R_{i-1}^{\nu-1} \fint_{B(a,6R_{i-1})} M^p_{9R_{i-1}}(D_H\varphi)(x)\,dx,\end{aligned} \tag{11}$$

в котором $r_i \in (R_i, R_{i-1})$, $x_0, y_0 \in S(a,r_i)$, а константа C не зависит от рассматриваемого отображения и радиуса r_i.

Поэтому для $r \in (R_{i+1}, R_i]$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r)))^p &\leq \operatorname{diam}(\varphi(B(a,r_i)))^p \leq K^p \operatorname{diam}(\varphi(S(a,r_i)))^p \\ &\leq K^p C' R_{i-1}^{p-(\nu-1)} R_{i-1}^{\nu-1} \fint_{B(a,6R_{i-1})} M^p_{9R_{i-1}}(D_H\varphi)(x)\,dx \\ &\leq K^p C' R_{i-1}^p \fint_{B(a,6R_{i-1})} M^p_{9R_{i-1}}(D_H\varphi)(x)\,dx \\ &\leq r^p 4^p K^p C' \fint_{B(a,6R_{i-1})} M^p_{9R_0}(D_H\varphi)(x)\,dx,\end{aligned}$$

поскольку $R_{i-1} < 4r$. Постоянная C' не зависит от данного отображения и радиуса r. $\square$

Полагая $R_i = r$ в (10), приходим к следующей оценке колебания K-квазимонотонного отображения φ на шаре $B(a,r)$:

$$(\operatorname*{osc}_{B(a,r)\cap\widetilde{\Omega}} \varphi)^p \leq K^p(\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r))))^p \leq 4^p K^p C' r^p \fint_{B(a,12r)} M^{\nu}_{18r}(D_H\varphi)(x)\,dx \quad (12)$$

для любой точки $a \in \Omega$ и почти всех $r \in (0, \min(r_a, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)/18))$.

Предложение 2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{G}$, а $\varphi \in W^1_\nu(\Omega, \widetilde{\mathbb{G}})$ — K-квазимонотонное отображение. Тогда*

(1) $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{G}$ *непрерывно в каждой точке* $a \in \widetilde{\Omega}$;

(2) *существует предел* $\lim\limits_{\widetilde{\Omega}\ni x\to a} \varphi(x)$ *в каждой точке* $a \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$;

(3) *продолженное указанным выше образом отображение* $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ *непрерывно и K-квазимонотонно в* Ω.

Доказательство. (1) Непрерывность φ в точках $a \in \widetilde{\Omega}$ является прямым следствием (12) при $p = \nu$.

(2), (3) Пусть a — произвольная точка в $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$. Заметим, что $\operatorname{diam}(\varphi(S(a,r)))$ произвольно мал, когда $r \to 0$. Из-за этого $\{\varphi(x_l)\}$ является последовательностью Коши для любой последовательности $x_l \in \widetilde{\Omega}$, стремящейся к a при $l \to \infty$. Таким образом, существует предел $\lim\limits_{l\to\infty} \varphi(x_l)$, не зависящий от выбора последовательности $\{x_l\}$, $l \in \mathbb{N}$. Их общий предел принимается в качестве значения φ в точке a.

Более того, продолженное отображение φ K-квазимонотонно, поскольку

$$\operatorname*{osc}_{B(a,r)} \varphi \leq \operatorname*{osc}_{B(a,r)\cap\widetilde{\Omega}} \varphi \leq K \operatorname{diam}(\varphi(S(a,r)))$$

для любого $B(a,r) \subset \Omega$ и почти всех $r \in (0, r_a)$. В силу сказанного в утверждении 1 отображение φ непрерывно в каждой точке $a \in \Omega$. $\square$

Замечание 1. Для вещественнозначной квазимонотонной функции предложение 2 доказано в [17, предложение 8], где ключевое неравенство, аналогичное (10), обосновано другим методом.

3.2. $\mathscr{N}$-свойство Лузина для K-квазимонотонных отображений класса W^1_ν. Будем говорить, что отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, *удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина*, если $\mathscr{H}^\nu(\varphi(E)) = 0$ для измеримого множества $E \subset \Omega$ с $\mathscr{H}^\nu(E) = 0$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, — K-непрерывное квазимонотонное отображение класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ области $\Omega \subset \mathbb{G}$. Тогда отображение φ удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина. В частности, образ измеримого множества $\mathscr{H}^\nu$-измерим в $\mathbb{G}$.*

Замечание 2. Теорема 4 сформулирована в [13, предложение 7.1] и доказана в условиях теоремы 2. Мы модифицируем рассуждения [13, предложение 7.1], чтобы доказать теорему 4 с помощью неравенства (10).

Замечание 3. Другими методами сформулированная теорема была доказана Ю. Г. Решетняком в [18] для отображений с ограниченным искажением в $\mathbb{R}^n$, и Мартио и Мали в [19] для W^1_n-квазимонотонных отображений в $\mathbb{R}^n$.

В доказательстве этой теоремы применим теорему о покрытиях типа Винера.

Лемма 8 [8, лемма 1.67 типа Уитни]. *Предположим, что E — открытое множество конечной меры в $\mathbb{G}$ и $C \geq 1$. Существуют точки $x_1, x_2, \ldots$ в E и положительные числа $r_1, r_2, \ldots$ такие, что*

(a) $E = \bigcup\limits_j B(r_j, x_j)$,

(b) *шары* $B(r_j/4q, x_j)$ *дизъюнктны,*

(c) $B(Cr_j, x_j) \cap E^c = \varnothing$, *но* $B(3qCr_j, x_j) \cap E_j^c \neq \varnothing$,

(d) *ни одна точка E не принадлежит более чем M шарам $B(Cr_j, x_j)$, где M — наибольшее целое число, не превосходящее $[8Cq^3(1+2q)]^\nu$.*

Здесь q — постоянная из обобщенного неравенства треугольника (4).

Доказательство теоремы 4. Пусть $U \Subset \Omega$ — компактно вложенное открытое множество. Хорошо известно, что существует набор шаров $B(x_i, r_i) \subset U$ со свойствами, описанными в лемме 8 при $C = 12$.

Фиксируем области D и Ω' так, чтобы $U \subset D \Subset \Omega' \Subset \Omega$. К каждому шару $B\,(x_i, r_i)$ применим неравенство (10) при $p = \nu$, $i = 1$, $R_1 = r_i$, $R_0 = 2r_i$, $r = R_1$. Тогда диаметр $\varphi(S(x_i, r_i))$ удовлетворяет оценке

$$(\operatorname{diam}(\varphi(S(x_i, r_i))))^\nu \leq K^\nu C'' \int\limits_{B(x_i, 12r_i)} M^\nu_{9R_0}(D_H\varphi)(x)\,dx, \tag{13}$$

где C'' зависит только от ν. Ввиду соотношения

$$\mathscr{H}^\nu_\infty \varphi(B(x_i, r_i)) \leq (\operatorname{diam}\varphi(B(x_i, r_i)))^\nu \leq K^\nu(\operatorname{diam}\varphi(S(x_i, r_i)))^\nu$$

применяем (13) для достижения желаемого неравенства:

$$\mathscr{H}^\nu_\infty \varphi(U) \leq \sum_i \mathscr{H}^\nu_\infty \varphi(B(x_i, r_i)) \leq K^{2\nu} C'' M \int\limits_U M^\nu(|D_H\varphi|)(y)\,dy$$

(здесь $\mathscr{H}^\nu_\infty \varphi(U)$ и $\mathscr{H}^\nu_\infty \varphi(B(x_i, r_i))$ — вместимость Хаусдорфа множеств $\varphi(U)$ и $\varphi(B(x_i, r_i))$ соответственно). Так как мера открытого множества U, содержащего некоторое множество $E \subset D$ меры 0, может быть взята сколь угодно малой, вместимость Хаусдорфа множества $\varphi(E)$ равна 0. Следовательно, мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^\nu(\varphi(E))$ равна 0, если $|E| = 0$. Отсюда следует, что образ $\varphi(A)$ $\mathscr{H}^\nu$-измерим, если множество $A \subset \Omega$ измеримо. $\square$

3.3. $\mathscr{P}$-Дифференцируемость квазимонотонных отображений. Гладкое отображение $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ нильпотентных групп называется *контактным*, если его касательное отображение сохраняет горизонтальную структуру: $D\varphi(x)(V_1) \subset \widetilde{V}_1$ для всех x из области определения отображения φ; здесь $D\varphi(x)$ — обычный дифференциал гладкого отображения в точке x, т. е. линейное отображение касательных пространств, определяемое по правилу

$$D\varphi(x)(v) = \frac{d}{dt}\varphi(x \exp tv)\bigg|_{t=0}, \quad v \in V.$$

Заметим, что если контактное гладкое отображение $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ нильпотентных групп является гомоморфизмом групп Ли, то $\exp^{-1} \circ L \circ \exp : V \to \widetilde{V}$ есть гомоморфизм алгебр Ли такой, что $\exp^{-1} \circ L \circ \exp(V_1) \subset \widetilde{V}_1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на группе Карно $\mathbb{G}$. Контактный гомоморфизм групп Ли $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно называется *$\mathscr{P}$-дифференциалом* отображения $f : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ в точке $a \in \Omega$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\widetilde{\rho}\big(L(a^{-1}x)^{-1} f(a)^{-1} f(x)\big)}{\rho(a^{-1}x)} = 0,$$

а данное отображение $f : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ называется *$\mathscr{P}$-дифференцируемым* в точке $a \in \Omega$.

Непрерывное отображение $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, $p \in (\nu - 1, \infty)$, называется *K-квазимонотонным*, если существует константа $K \geq 1$ такая, что колебание φ на шаре $B(x, r) \Subset \Omega$ контролируется колебаниями φ на сфере $S(x, r)$, т. е.

$$\operatorname{diam}(\varphi(B(x, r))) \leq K \operatorname{diam}(\varphi(S(x, r)))$$

(здесь диаметр множества $A \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ равен $\sup\limits_{x,y \in A} \widetilde{\rho}(x, y)$).

Предложение 3. *Если непрерывное отображение $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, K-квазимонотонно, то φ $\mathscr{P}$-дифференцируемо для п. в. $a \in \Omega$.*

Предложение 3 сформулировано в [13, предложение 4.5] и доказано при выполнении условий теоремы 2. Заметим, что доказательство в [13, предложение 4.5] можно модифицировать так, чтобы получить доказательство предложения 3 в условиях предложения 1.

Замечание 4. $\mathscr{P}$-дифференцируемость произвольного отображения $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, принадлежащего классу Соболева $W^1_p(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, при $\nu < p < \infty$ доказана в [20, следствие 1].

Этот результат для W^1_1-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^2$ доказан Герингом и Лехто в [21], а для W^1_p-гомеоморфизмов при $p > n - 1$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, был установлен Вяйсяля [22].

Доказательство предложения 3. Пусть $a \in \Omega$. Применяя (10), заключаем, что

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{z \to a} \left(\frac{\widetilde{\rho}(\varphi(z), \varphi(a))}{\rho(z, a)} \right)^p &\leq \lim_{r \to 0+} \left(\frac{\sup\{\widetilde{\rho}(\varphi(z), \varphi(y)) : z, y \in B(a, r)\}}{r} \right)^p \\
&\leq K^q \varlimsup_{r \to 0+} \left(\frac{\sup\{\widetilde{\rho}(\varphi(z), \varphi(y)) : z, y \in S(a, r)\}}{r} \right)^p \\
&\leq 4^p K^p C' \varlimsup_{R_{i-1} \to 0+} \fint\limits_{B(a, 6R_{i-1})} M^p_{9R_{i-1}}(D_H \varphi)(x)\, dx \leq 4^p K^p C' M^p_{9R_0}(D_H \varphi)(a)
\end{aligned}$$

по теореме Лебега о дифференцируемости. Поскольку $M^p_{9R_0}(D_H \varphi)$ принадлежит $L_p(9R_0)$, оно почти всюду конечно. Из последних неравенств следует, что φ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{z \to a} \frac{\widetilde{\rho}(\varphi(z), \varphi(a))}{\rho(z, a)} < \infty \quad \text{для почти всех } a \in \Omega.$$

Таким образом, φ удовлетворяет условию теоремы типа Степанова (см. [13, теорема 3.1]) и тем самым $\mathscr{P}$-дифференцируема почти всюду в Ω. $\square$

Теорема 5. *Пусть Ω — область на группе Карно $\mathbb{G}$.*

(1) *Если гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$, $\nu - 1 < p < \infty$, то φ $\mathscr{P}$-дифференцируем в почти каждой точке $a \in \Omega$.*

(2) *Если дополнительно группа Карно $\mathbb{G}$ двухступенчатая и гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$, $\nu - 1 < p < \infty$, имеет конечное искажение, то обратное отображение φ^{-1} $\mathscr{P}$-дифференцируемо в почти каждой точке $b \in \varphi(\Omega)$.*

Доказательство. Дифференцируемость φ является прямым следствием предложения 3, так как каждый гомеоморфизм является квазимонотонным отображением.

Доказательство дифференцируемости φ^{-1} приведено в [23, предложение 40], в котором применяется оценка снизу для емкости конденсатора кольцевой области, формулируемая в следующей лемме. $\square$

Напомним, что *кольцевым конденсатором* на группе $\mathbb{G}$ мы называем пару множеств $\mathscr{E} = (F, U)$, где множество $U \subset \mathbb{G}$ открыто, а $F \subset U$ компактно. Величина

$$\mathrm{cap}_p(\mathscr{E}) = \inf_u \int\limits_U |\nabla_H u|^p \, dx, \quad 1 < p < \infty,$$

где нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(U)$ таким, что $u_F \geq 1$, называется p-емкостью кольца $\mathscr{E} = (F, U)$.

Лемма 9. *Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно, а $\mathscr{E} = (F, U)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{G}$. Если множество F связно, а $U \subset \{x : \rho(x, F) \leq c_0 \operatorname{diam} F\}$, где c_0 — достаточно малое число, зависящее лишь от постоянной q в обобщенном неравенстве треугольника, то*

$$\mathrm{cap}_p^{\nu-1}(\mathscr{E}) \geq c \frac{(\operatorname{diam} F)^p}{|U|^{p-(\nu-1)}}$$

при $\nu - 1 < p < \infty$, где постоянная c зависит только от ν и p.

Доказательство. В евклидовом пространстве аналогичная оценка доказана в работах [24, 25]. Ниже мы существенно модернизируем метод работ [24, 25], чтобы адаптировать его применительно к геометрии групп Карно.

Поскольку левая и правая части доказываемого неравенства инвариантны относительно левых сдвигов и имеют одинаковую степень однородности относительно растяжений, достаточно доказать лемму в том случае, когда $\mathrm{diam} = \rho(0, \sigma) = 1$ для некоторых точек $0, \sigma \in F$. Рассмотрим точку $\sigma^{-1} \in S(0, 1)$. Положим $r_2 = \rho(\sigma^{-1}, \sigma) = \rho(\sigma^2)$. Нетрудно проверить, что $\rho(\sigma^2) \geq \sqrt{2}$ для любой точки $\sigma \in S(0, 1)$. Тогда $\operatorname{diam} F = 1 = c_1(r_2 - 1)$, где $c_1 = (r_2 - 1)^{-1}$. Поэтому $S(\sigma^{-1}, r) \cap (\mathbb{G} \setminus U) \neq \varnothing$ при любом $1 \leq r \leq r_2$.

Фиксируем произвольную точку $x_r \in F \cap S(\sigma^{-1}, r)$ и обозначим символом $P(r)$ множество

$$\{\xi \in S(\sigma^{-1}, r) : \rho(\xi, r) \leq \rho(x_r, (\mathbb{G} \setminus U) \cap S(\sigma^{-1}, r)\}.$$

Всякая функция $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(U) \cap C(U)$, $u \geq 1$ на F, принимает на сфере $S(\sigma^{-1}, r)$, $1 \leq r \leq r_2$, значение 0 (выбор c_0 в условии леммы регламентирован этим требованием). Поэтому для почти всех $r \in (1, r_2)$ из соотношения (8) выводим неравенство

$$\fint_{S(r)\cap U} M_{6r}(\nabla_H u)(y)^p \, d\mathscr{S}^{N-1}(y) \geq c_2 \mathscr{H}^{N-1}(P_r)^{\frac{\nu-1-p}{\nu-1}},$$

где c_2 — некоторая постоянная. Следовательно,

$$\fint_U M_{6r}(\nabla_H u)(x)^p \, dx \geq c_2 \int_1^{r_2} \mathscr{H}^{N-1}(P_r)^{\frac{\nu-1-p}{\nu-1}} \, dr.$$

Отсюда, применяя (5) в последнем переходе, выводим

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam} F)^p &\leq c_1^p \left(\int_1^{r_2} d\tau\right)^p \\ &\leq c_1^p \left(\int_1^{r_2} \mathscr{H}^{N-1}(P_r)\, d\tau\right)^{p-(\nu-1)} \left(\int_1^{r_2} \mathscr{H}^{N-1}(P_r)^{\frac{\nu-1-p}{\nu-1}} \, d\tau\right)^{\nu-1} \\ &\leq \frac{c_1^p}{c_2^{\nu-1}} |U|^{p-(\nu-1)} \left(\int_U M_{6r}(\nabla_H u)^p(x)\, dx\right)^{\nu-1}.\end{aligned}$$

По теореме о максимальной функции [8] получаем неравенство, из которого вытекает утверждение леммы 9:

$$\left(\int_U |\nabla_H u|^p(x)\, dx\right)^{\nu-1} \geq c \frac{(\operatorname{diam} F)^p}{|U|^{p-(\nu-1)}}$$

для любой функции $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p \cap C(U)$, $u \geq 1$ на F. $\square$

Замечание 5. Теорема 5 является новой и для соболевских отображений областей в евклидовых пространствах. В [23, предложение 40] доказано, что в условиях теоремы 5 обратное отображение φ^{-1} принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\varphi(\Omega))$ и имеет конечное искажение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *García-Cuerva J., Gatto A. E.* Lipschitz spaces and Calderón-Zygmund operators associated to non-doubling measures // Publ. Mat. 2005. V. 49, N 2. P. 285–296.
2. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
3. *Monti R., Morbidelli D.* Trace theorems for vector fields // Math. Z. 2002. V. 239. P. 747–776.
4. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.-M.* Non-doubling Ahlfors measures, perimeter measures, and the characterization of the trace spaces of Sobolev functions in Carnot–Carathéodory spaces // Mem. Amer. Math. Soc. 2006. V. 182. P. 3–119.
5. *Capogna L., Garofalo N.* Ahlfors type estimates for perimeter measures in Carnot–Carathéodory spaces // J. Geom. Anal. 2006. V. 16, N 3. P. 455–497.
6. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on metric-measure spaces // Contemp. Math. 2003. V. 338. P. 173–218.
7. *Rotschild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
8. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Princeton Math. Notes; V. 28).
9. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzonni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007. (Springer Monogr. Math.).

10. *Karmanova M., Vodopyanov S.* A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.
11. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5. P. 403–415.
12. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Memoirs Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688.
13. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups // Proceedings on analysis and geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2000. P. 603–670.
14. *Bagby T., Ziemer W. P.* Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 191. P. 129–148.
15. *Calderón C. P., Fabes E. B., Riviere N. M.* Maximal smoothing operators // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 23. P. 889–988.
16. *Meyers N. G.* Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 23. P. 1043–1049.
17. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.
18. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
19. *Martio O., Malý J.* Lusin's condition (N) and mappings of the class W^1_n // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 485. P. 19–36.
20. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–89.
21. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1959. V. 272. P. 1–9.
22. *J. Väisälä* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1965. V. 362, N 12. P. 1–12.
23. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $Q_{q,p}$-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1257–1299.
24. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1960. V. 448, N 12. P. 1–40.
25. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.

Поступила в редакцию 14 апреля 2023 г.
После доработки 14 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Басалаев Сергей Геннадьевич (ORCID 0000-0002-4161-9948),
Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sbasalaev@math.nsc.ru`, `vodopis@math.nsc.ru`