



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284, номер 1, 16–21

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

25 января 2025 г., 22:03:23



равномерная относительно  $(t^0, x^0) \in Q_T^0$ , то  $u \in C^\lambda(Q_T^0)$  (соответственно  $u \in C^{1+\lambda}(Q_T^0)$ ).

Авторы выражают благодарность В.А. Ильину, Е.М. Ландису и Н.Н. Уральцевой за полезное обсуждение результатов.

Институт математики и механики  
Академии наук АзербССР  
Баку

Поступило  
19 VII 1984

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ладъженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Talenti G. — Ann. Mat. Pura ed Appl., 1965, vol. 69, № 4.
3. Gardes H.O. — Math. Ann., 1956, vol. 131.
4. Кружков С.Н. — ДАН, 1966, т. 170, № 3.
5. Fiorito G. — Matematiche, 1980, vol. 35.
6. Ильин В.А. — УМН, 1960, т. 15, вып. 2.
7. Pucci C. Equazioni ellittiche estremali. In corso di stampe, 1966.

УДК 511

МАТЕМАТИКА

Г.И. АРХИПОВ, В.Н. ЧУБАРИКОВ

### ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 9 VII 1984)

В настоящей работе рассматривается задача, сформулированная в [1]. Мы продолжаем исследования по  $p$ -адическому методу А.А. Карацубы. Здесь даны условия разрешимости в натуральных числах системы уравнений

$$(1) \quad \sum_{j=1}^k x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2} \dots x_{r,j}^{t_r} = N(t_1, t_2, \dots, t_r),$$
$$0 \leq t_1 \leq n_1, \quad 0 \leq t_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r,$$

и родственных ей систем.

Имеется два типа таких условий: условия порядка и арифметические условия. При этом арифметические условия эквивалентны разрешимости систем сравнений вида

$$(2) \quad \sum_{j=1}^k x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv N(t_1, t_2, \dots, t_r) \pmod{q},$$
$$0 \leq t_1 \leq n_1, \quad 0 \leq t_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r,$$

для всех модулей  $q$ , не превосходящих  $T$ , где  $T = T(n_1, n_2, \dots, n_r)$  — некоторая положительная постоянная. Связь между разрешимостью систем сравнений (2) и некоторой системой линейных уравнений в целых числах устанавливается в теореме 2. Разрешимость этой линейной системы уравнений в целых числах и будет арифметическим условием.

Отметим также, что условия порядка состоят в том, что найдется решение системы уравнений (1) в действительных числах и такое, что матрица Якоби, соответствующая этому решению, имеет максимальный ранг.

Как условия порядка, так и арифметические условия, приведенные в настоящей статье, являются обобщением соответствующих условий работы [4], стр. 26 (см. также [2, 3]).

Рассмотрим систему диофантовых уравнений

$$(3) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_s &= M_0, \\ \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \dots + \epsilon_s x_s &= M_1, \\ \dots & \\ \epsilon_1 x_1^n + \epsilon_2 x_2^n + \dots + \epsilon_s x_s^n &= M_n, \end{aligned}$$

где  $M_0, M_1, \dots, M_n$  — фиксированные натуральные числа; неизвестными системы являются величины  $x_1, x_2, \dots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$ , причем  $x_1, x_2, \dots, x_s$  принимают неотрицательные целые значения, а неизвестные  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$  принимают значения  $\pm 1$ . Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n &= M_0, \\ t_1 + 2t_2 + \dots + nt_n &= M_1, \\ \dots & \\ t + 2^n t_2 + \dots + n^n t_n &= M_n. \end{aligned}$$

*Л е м м а 1. Из разрешимости системы (3) следует разрешимость системы (4); и наоборот, из разрешимости системы уравнений (4) следует, что найдется такое  $s$ , при котором система (3) имеет решение.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Сначала для любого целого  $x$  найдем решение в целых числах  $T_0, T_1, \dots, T_n$  системы уравнений

$$(5) \quad \sum_{i=0}^n T_i i^s = x^s, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Величины  $T_i = T_i(x)$  как функции от  $x$  являются многочленами степени  $n$ , причем

$$T_i = T_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{x(x-1)\dots(x-i-1)(x-i+1)\dots(x-n)}{i!(n-i)!}.$$

Отсюда следует, что  $T_i$  — целые числа. Пусть теперь система (3) разрешима и  $x_1, x_2, \dots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$  является ее решением. Положим в системе уравнений (5)  $x = x_\nu, \nu = 1, 2, \dots, s$ . Вместо  $1, x_\nu, \dots, x_\nu^n$  в (3) подставим левые части уравнений из (5). Приводя подобные члены при  $1, i, \dots, i^n, i = 0, 1, \dots, n$ , получим решение системы уравнений (4):

$$t_i = \sum_{\nu=1}^s T_i(x_\nu), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Первая часть утверждения леммы доказана.

Пусть теперь  $t_0, t_1, \dots, t_n$  — решение системы уравнений (4). Положим

$$s = |t_0| + |t_1| + \dots + |t_n|,$$

$$x_1 = \dots = x_{|t_0|} = 0, \quad \epsilon_1 = \dots = \epsilon_{|t_0|} = \operatorname{sgn} t_0,$$

$$x_{|t_0|+1} = \dots = x_{|t_0|+|t_1|} = 1, \quad \epsilon_{|t_0|+1} = \dots = \epsilon_{|t_0|+|t_1|} = \operatorname{sgn} t_1, \dots,$$

$$x_{|t_0|+\dots+|t_{n-1}|+1} = \dots = x_s = n, \quad \epsilon_{|t_0|+\dots+|t_{n-1}|+1} = \dots = \epsilon_s = \operatorname{sgn} t_n.$$





**Доказательство.** Этот результат вытекает из теоремы 1 при  $f_1(x) = x^l, \dots, f_{k-1}(x) = x^m, f_k(x) = x^n$ . Рассмотрим систему уравнений

$$(10) \quad \sum_{j=1}^s \epsilon_j x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2} \dots x_{r,j}^{t_r} = M(t_1, t_2, \dots, t_r), \\ 0 \leq t_1 \leq n_1, \quad 0 \leq t_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r,$$

где неизвестные  $x_{\nu,j}, \nu = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s$ , принимают неотрицательные целые значения, а  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$  принимают два значения  $\pm 1$ . Рассмотрим систему линейных уравнений в целых числах  $c(i_1, i_2, \dots, i_r), 0 \leq i_1 \leq n_1, 0 \leq i_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq i_r \leq n_r$ :

$$(11) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_r=0}^{n_r} c(i_1, i_2, \dots, i_r) i_1^{t_1} i_2^{t_2} \dots i_r^{t_r} = M(t_1, t_2, \dots, t_r), \\ 0 \leq t_1 \leq n_1, \quad 0 \leq t_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r.$$

**Теорема 2.** Из разрешимости системы (11) следует разрешимость (10); и наоборот, из разрешимости системы (10) следует, что найдется такое  $s$ , при котором система (11) имеет решение.

**Доказательство.** Очевидно, из разрешимости (11) следует разрешимость (10). Покажем теперь, что разрешима система уравнений в целых числах  $c_{i_1, \dots, i_r} = c_{i_1, \dots, i_r}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ :

$$(12) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_r=0}^{n_r} c_{i_1, \dots, i_r} i_1^{t_1} i_2^{t_2} \dots i_r^{t_r} = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_r^{t_r}, \\ 0 \leq t_1 \leq n_1, \quad 0 \leq t_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r.$$

В качестве решения (12) возьмем

$$c_{i_1, \dots, i_r} = T_{i_1}(x_1) T_{i_2}(x_2) \dots T_{i_r}(x_r),$$

где  $T_i(x)$  — решение системы (5). Получим

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_r=0}^{n_r} c_{i_1, \dots, i_r} i_1^{t_1} i_2^{t_2} \dots i_r^{t_r} = \\ = \left( \sum_{i_1=0}^{n_1} T_{i_1}(x_1) i_1^{t_1} \right) \left( \sum_{i_2=0}^{n_2} T_{i_2}(x_2) i_2^{t_2} \right) \dots \left( \sum_{i_r=0}^{n_r} T_{i_r}(x_r) i_r^{t_r} \right) = \\ = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_r^{t_r}.$$

Далее аналогично доказательству леммы 1, подставляя решение (12) в (10), получим решение системы (11).

Пусть  $N_1, N_2, \dots, N_k, k$  — натуральные числа,  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_r)$  — многочлены с целыми коэффициентами,  $n_i$  — максимум степеней многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_k$  по переменной  $x_i, i = 1, 2, \dots, r$ . Рассмотрим систему уравнений

$$(13) \quad \sum_{j=1}^s \epsilon_j f_t(x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{r,j}) = N_t, \quad 1 \leq t \leq k,$$

где неизвестные  $x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{r,j}, j = 1, 2, \dots, s$ , принимают целые неотрицательные значения, а  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$  — значения  $\pm 1$ .

Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах  $c(i_1, i_2, \dots, i_r)$ ,  $0 \leq i_1 \leq n_1, 0 \leq i_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq i_r \leq n_r$ :

$$(14) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_r=0}^{n_r} c(i_1, i_2, \dots, i_r) f_t(i_1, i_2, \dots, i_r) = N_t, \quad 1 \leq t \leq k.$$

**Т е о р е м а 3.** Из разрешимости (13) следует разрешимость (14); и наоборот, из разрешимости системы (14) следует, что найдется такое  $s$ , при котором система (13) имеет решение.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вывод теоремы 3 аналогичен выводу теоремы 1, но вместо леммы 1 используется теорема 2.

Пусть  $f(x) = f(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  — многочлен с целыми коэффициентами. Рассмотрим уравнение в многочленах

$$(15) \quad g(x) = \epsilon_1 f_1^k(x) + \epsilon_2 f_2^k(x) + \dots + \epsilon_s f_s^k(x),$$

где  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$  — неизвестные многочлены, степени которых не превосходят  $n$ , а величины  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$  принимают значения  $\pm 1$ . Рассмотрим также линейное уравнение с целыми коэффициентами  $t(i_0, i_1, \dots, i_n)$ ,  $0 \leq i_0, \dots, i_n \leq k$ :

$$(16) \quad g(x) = \sum_{i_0=0}^k \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k t(i_0, i_1, \dots, i_n) f^k(x; i_0, i_1, \dots, i_n).$$

**Т е о р е м а 4.** Из разрешимости уравнения (15) следует разрешимость (16); и наоборот, из разрешимости (16) следует, что найдется такое  $s$ , при котором уравнение (15) имеет решение.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Очевидно, из разрешимости (16) следует разрешимость уравнения (15). Покажем прежде всего, что разрешимо в целых числах  $c(i_0, i_1, \dots, i_n)$ ,  $0 \leq i_0, \dots, i_n \leq k$ , уравнение

$$(17) \quad \sum_{i_0=0}^k \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k c(i_0, i_1, \dots, i_n) f^k(x; i_0, i_1, \dots, i_n) = f^k(x; a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему уравнений, эквивалентную предыдущему уравнению:

$$(18) \quad \sum_{i_0=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k c(i_0, i_1, \dots, i_n) \sum_{t_0=0}^k \dots \sum_{t_n=0}^k i_0^{t_0} \dots i_n^{t_n} = \\ = \sum_{t_0=0}^k \dots \sum_{t_n=0}^k a_0^{t_0} \dots a_n^{t_n}, \quad \begin{matrix} t_0 + \dots + t_n = k \\ t_1 + \dots + t_n = s \end{matrix} \quad 0 \leq s \leq k.$$

В силу теоремы 2 разрешима система уравнений в целых числах  $c(i_0, i_1, \dots, i_n)$ :

$$(19) \quad \sum_{i_0=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k c(i_0, i_1, \dots, i_n) i_0^{t_0} \dots i_n^{t_n} = a_0^{t_0} a_1^{t_1} \dots a_n^{t_n}, \\ 0 \leq t_0, t_1, \dots, t_n \leq k.$$

Из разрешимости (19) следует разрешимость (18), а следовательно, разрешимость (13). Подставляя полученные решения в (15), найдем решение (16). Теорема доказана.

Таким образом, выполнение условий порядка и арифметических условий является необходимым для разрешимости системы уравнений (1). Можно показать по аналогии с одномерным случаем (проблема Гильберта — Камке), что при большом числе слагаемых  $k$  системы (1) эти условия будут и достаточными. В последующих работах мы предполагаем найти точный порядок числа  $k$ , начиная с которого эти условия будут необходимыми и достаточными.

Мы выражаем глубокую благодарность проф. А.А. Карацубе за внимание к работе.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступило  
13 VII 1984

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Тр. МИАН, 1980, с. 151. 2. *Виноградов И.М.* Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 3. *Марджанишвили К.К.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1937, т. 1, с. 609–631. 4. *Архипов Г.И.* — Там же, 1984, т. 48, № 1, с. 3–52.

УДК 517.947

МАТЕМАТИКА

А.Л. БУХГЕЙМ

### МНОГОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 9 VII 1984)

В шаре  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$  рассматривается задача на собственные значения для уравнения Шредингера

$$(1) \quad Lu \equiv -\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad x \in \Omega;$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

с достаточно гладким вещественным потенциалом  $q$  и функцией  $\sigma \geq 0$ . Здесь  $\nu$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ . Для простоты формулировок будем считать, что все встречающиеся далее функции бесконечно дифференцируемы, в частности,  $q \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $\sigma \in C^\infty(\partial\Omega)$ , причем

$$(3) \quad \text{supp } q \subseteq \{x \mid |x| \leq s\} = \Omega_s, \quad s < 1,$$

где  $\text{supp } q$  — носитель функции  $q$ . Пусть  $\lambda_k$  — собственные значения краевой задачи (1), (2), занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности, а  $u_k(x)$  — соответствующие им ортонормированные в  $L_2(\Omega)$  собственные функции. Спрашивается, когда спектральные данные, т.е. некоторый набор функционалов от  $\lambda_k$ ,  $u_k$ , однозначно определяют оператор  $L$  или, другими словами, функции  $q$  и  $\sigma$ ? В одномерном случае  $\Omega = (-1, 1)$  теорема В.А. Марченко [1] утверждает, что спектральные данные  $\{\lambda_k, u_k(-1)\}$  однозначно определяют оператор  $L$ . Можно показать, что в этом случае оператор  $L$  однозначно определяется спектральными данными вида  $\{\lambda_k, \langle u_k, f \rangle u_k(-1)\}$ , где  $f$  — заданная функция класса  $C_0^\infty(\Omega)$ ,  $f(x) \neq 0$  при  $x \in \Omega_s$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ . Обобщению этого утверждения на