П.П.Таммела

К ТЕОРИИ ПРИВЕДЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

§ I. Введение

Работа посвящена теории приведения положительных квадратичных форм по Эрмиту и по Минковскому. Говорят, что форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{I}$$

приведена по Минковскому, если для любого набора целых чисел $(l_1, \ldots, l_n)$ из условия о.н.д. $(l_i, \ldots, l_n) = 1$ следует, что

$$f(l_1, \ldots, l_n) \geqslant a_{ii}. \tag{2}$$

Близким к приведению по Минковскому является приведение по Эрмиту. Говорят, что форма f приведена по Эрмиту, если при $\delta \to +\infty$ функция

$$h(f, \delta) = a_{11}\delta^{n-1} + a_{22}\delta^{n-2} + \ldots + a_{nn} \tag{3}$$

является наименьшей среди функций, определенных таким же образом для всех форм, эквивалентных форме f. Из определения следует, что соответствующие диагональные коэффициенты двух эквивалентных приведенных по Эрмиту форм одинаковы.

Форме f сопоставляем точку $(a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n})$ пространства коэффициентов R^N, $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Совокупность приведенных по Эрмиту (соответственно Минковскому) форм f, рассматриваемая в R^N, назовем областью приведения Эрмита $\mathcal{H}$ (соответственно областью приведения Минковского $\mathcal{M}$).

Области $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ выпуклые гоноэдры с конечным числом граней; $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$, причем внутренние точки $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ совпадают [I0]. При этом $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ для $n \leqslant 6$ (см. [5], [7]); $\mathcal{H} \neq \mathcal{M}$ для $n > 6$ (см.[6]) (т.е. часть границы $\mathcal{M}$ может не принадлежать $\mathcal{H}$).

Минковский сформулировал ряд утверждений, позволяющих вычислять его область приведения для $n \leqslant 6$. Однако доказательство этих предложений было опубликовано им лишь для $n \leqslant 4$ [9]. В случае $n=5$ утверждения Минковского были недавно доказаны С.С.Рыщковым [4], [5]. В работе [7] мы доказали утверждения Минковского в полном объеме, а именно, было доказано следующее предложение.

Теорема I. Пусть $n \leqslant 6$. Для того, чтобы положительно определенная квадратическая форма f была приведена по Минковскому, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям

$$a_{ii} \leqslant a_{i+1,i+1} \qquad (i=1,\ldots,n-1) \tag{4}$$

и условиям

$$f(l_1,\ldots,l_n) \geqslant a_{kk}, \tag{5}$$

где $k=1,\ldots,n$, а значения l_i берутся из следующей таблицы I.

Таблица I.

l_k	$\pm l_{k'}$	$\pm l_{k''}$	$\pm l_{k'''}$	$\pm l_{k^{IV}}$	$\pm l_{k^{V}}$
I	I				
I	I	I			
I	I	I	I		
I	I	I	I	I	
I	I	I	I	2	
I	I	I	I	I	I
I	I	I	I	I	2
I	I	I	I	2	2
I	I	I	I	2	3

Здесь $(k, k', \ldots, k^{(n-1)})$ пробегают все перестановки индексов $(1,\ldots,n)$ при этом из таблицы берутся лишь строки, не превосходящие по длине n, причем пустые места заполняются нулями.

Условия (5) в дальнейшем будем называть условиями Минковского. Как следует из работ [5], [7] область, определяемая условиями Минковского является областью приведения Венкова [I] V_φ, где $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ для $n \leqslant 6$. Области приведения Минковского и Эрмита для $n \leqslant 6$ являются областями приведения Венкова V_{φ_1}, где $\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

Предлагаемая работа продолжает исследование [7]. Она является небольшой переработкой кандидатской диссертации. Основные результаты работы сформулированы в заметке [8].

В § 2 сформулированы и доказаны вспомогательные предложения ("редукционные леммы"), используемые в дальнейшем. Они являются некоторыми обобщениями соответствующих лемм статьи [7] .

В § 3 изучаются векторы смежности области Дирихле $\mathfrak{D}(f)$ формы f , приведенной по Минковскому. Областью Дирихле формы f называется [2] множество точек x , для которых

$$f(x) \leqslant f(x-l) \tag{6}$$

для всех целых векторов $l=(l_1,\ldots,l_n)$. Доказано следующее предложение.

Теорема 2. Пусть $n \leqslant 6$ и пусть f – положительно определенная форма, удовлетворяющая условиям Минковского. Тогда область Дирихле формы f полностью определяется неравенствами (6), когда векторы $l=(l_1,\ldots,l_n)$ берутся из таблиц I, 2 и 3, за вычетом последней строки таблицы 2.

Таблица 2.

$\pm l_k$	$\pm l_{k'}$	$\pm l_{k''}$	$\pm l_{k'''}$	$\pm l_k^{IV}$	$\pm l_k^{V}$
I					
I	I	I	2		
I	I	I	2	2	
I	I	I	I	I	3
I	I	I	2	2	2
I	I	I	2	2	3
I	I	I	2	2	4
I	I	2	2	2	3
I	I	I	I	2	m

Таблица 3.

$\pm l_k$	$\pm l_{k'}$	$\pm l_{k''}$	$\pm l_{k'''}$	$\pm l_k^{IV}$	$\pm l_k^{V}$
I	I	I	2	3	
I	I	I	2	3	3
I	I	I	2	3	4
I	I	2	2	3	4
I	2	2	2	3	3

Здесь $(k, k', \ldots, k^{(n-1)})$ пробегают все перестановки индексов $(1, \ldots, n)$. При этом из таблиц берутся лишь строки, не превосходящие по длине n, причем пустые места заполняются нулями.

В § 4 доказывается предложение о приведенных по Минковскому квадратичных формах, являющееся основой, как доказательства теоремы об области приведения Минковского для $n \leqslant 6$, так и для исследования вопроса об эквивалентности приведенных форм.

Теорема 3. Пусть f – положительно определенная квадратичная форма от $n \leqslant 6$ переменных. Пусть f удовлетворяет условиям Минковского. Тогда множество целых векторов $l = (l_1, \ldots, l_n)$, для которых может выполняться неравенство

$$f(l_1, \ldots, l_n) \leqslant \max_{l_i \neq 0} f(e_i)$$

содержится в таблицах I и 2. Здесь $(k, k', \ldots, k^{(n-1)})$ пробегают все перестановки индексов $(1, \ldots, n)$. При этом из таблиц берутся лишь строки, не превосходящие по длине n, причем пустые места заполняются нулями; m – целое число, не меньше 4.

В § 5 дано следующее уточнение теоремы I об области приведения Минковского для $n \leqslant 6$.

Теорема 4. Пусть $n \leqslant 6$. Для того, чтобы положительно определенная форма f была приведена по Минковскому, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям (4) и (5) теоремы I, за вычетом условий (7), определяемых последней строкой таблицы I.

$$\left.\begin{array}{l} f(l_1, \ldots, l_6) \geqslant a_{55}, \quad |l_6| \geqslant 2, \quad |l_1| \neq 3; \\ f(l_1, \ldots, l_6) \geqslant a_{66}, \quad |l_6| = 1, \quad |l_1| \neq 3; \end{array}\right\} \qquad (7)$$

каждое из оставшихся условий является необходимым для определения области приведения Минковско-

го (т.е. задает ее истинную $(N-1)$ - мерную грань).

В § 6 для $n \leqslant 6$ вычисляется однократная область Минковского - часть области $\mathcal{M}$, удовлетворяющая дополнительным условиям

$$a_{i,i+1} \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,n-1) \tag{8}$$

(т.е. область, удовлетворяющая тому свойству, что внутренние ее точки не эквивалентны). Точную формулировку см. в § 6 (теорема 5) Там же доказано (теорема 6), что для $n \geqslant 3$ разбиение на области, эквивалентные однократной области приведения Минковского, не является нормальным.

В § 7 изучается вопрос об эквивалентности приведенных по Эрмиту квадратичных форм. Помимо классической области Эрмита $\mathcal{H}$ здесь рассматривается и однократная область Эрмита $\mathcal{H}_0$, т.е. часть области удовлетворяющая неравенствам (8). Важную роль здесь играет понятие грани Γ данной размерности области приведения.

Пусть $\mathcal{D}$ - одна из следующих областей приведения - область приведения Эрмита, Минковского (классические или однократные). Определим грани различных размерностей гоноэдра $\mathcal{D}$. Единственной гранью размерности N мы будем считать внутренность гоноэдра $\mathcal{D}$. Пусть $1 \leqslant k \leqslant N-1$ и грани размерностей N, $N-1$, $\ldots$, $N-(k-1)$ гоноэдра $\mathcal{D}$ уже определены. Определим грани размерности $(N-k)$. Гранью размерности $(N-k)$ мы будем называть всякое непустое множество Γ точек области $\mathcal{D}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

I) Γ лежит в некоторой $(N-k)$-мерной плоскости;

2) Γ открыто в этой плоскости;

3) Γ не содержит точек граней размерностей $N,\ldots,N-k+1$;

4) Γ максимально: если $\Gamma \subset \Gamma' \subset \mathcal{D}$ и Γ' удовлетворяет условиям I), 2), 3), то $\Gamma' = \Gamma$.

Так как для $n \leqslant 6$ области приведения Минковского и Эрмита совпадают, то в этом случае совпадают и их грани.

Рассмотрим форму f из области приведения Эрмита; обозначим через $\mathcal{Z}_1(f)$ набор всех целочисленных векторов

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} \\ \vdots \\ l_n^{(i_1)} \end{pmatrix},$$

для которых

$$f(l_1^{(i_1)},\ldots,l_n^{(i_1)}) = a_{11}; \tag{9}$$

пусть k - индекс, $2 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через $\mathcal{Z}_k(f)$ набор всех

целочисленных примитивных *) матриц

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} & \dots & l_1^{(i_{k-1})} & l_1^{(i_k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n^{(i_1)} & \dots & l_n^{(i_{k-1})} & l_n^{(i_k)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} & \dots & l_1^{(i_{k-1})} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n^{(i_1)} & \dots & l_n^{(i_{k-1})} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z}_{k-1}(f)$$

и

$$f(l_1^{(i_k)}, \dots, l_n^{(i_k)}) = a_{kk}. \qquad (10)$$

$\mathfrak{Z}_n(f)$ обозначим через $\mathfrak{Z}(f)$. В силу определения области приведения Эрмита $\mathfrak{Z}(f)$ – совокупность всех преобразований формы f в формы, приведенные по Эрмиту.

<u>Теорема 7</u>. Пусть Γ – грань области приведения Эрмита размерности d $(1 \leqslant d \leqslant N)$ и $f, g \in \Gamma$.

Тогда

$$\mathfrak{Z}_k(f) = \mathfrak{Z}_k(g) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Пусть Γ – грань области приведения Эрмита размерности d $(1 \leqslant d \leqslant N)$ и $f \in \Gamma$. По теореме 7 множество $\mathfrak{Z}_k(f)$ зависит только от Γ и не зависит от выбора $f \in \Gamma$. Поэтому далее обозначаем

$$\mathfrak{Z}_k(\Gamma) = \mathfrak{Z}_k(f) \, (k = 1, \dots, n), \quad \mathfrak{Z}(\Gamma) = \mathfrak{Z}(f).$$

По теореме Минковского [9] $|l_{ik}| < c$, так что множество $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ конечно.

По определению $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ следующее предложение очевидно.

<u>Теорема 8</u>. Пусть Γ – грань области приведения Эрмита размерности d $(1 \leqslant d \leqslant N)$ и $f \in \Gamma$. Для того, чтобы целочисленная унимодулярная матрица $S = (s_{ij})$ преобразовывала форму f в приведенную по Эрмиту форму, необходимо и достаточно, чтобы $S \in \mathfrak{Z}(\Gamma)$.

Для $n \leqslant 6$ построение $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ облегчается теоремой 3. А именно

---

*) Матрица примитивна, если общий наибольший делитель миноров k-го порядка этой матрицы равен 1.

Теорема 9. Пусть $n \leqslant 6$. Пусть Γ – грань области приведения Эрмита-Минковского. Пусть k – индекс, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда все векторы $(l_1^{(i_k)}, \ldots, l_n^{(i_k)})$, для которых

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} & \ldots & l_1^{(i_k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_n^{(i_1)} & \ldots & l_n^{(i_k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}_k(\Gamma),$$

являются строками таблиц I и 2, за вычетом последней строки таблицы 2.

Остальная часть § 7 посвящена задаче построения фундаментальной области на базе однократной области приведения Эрмита.

В §§ 8-9 для $n=2$ и $n=3$ вычисляется фундаментальная область ("точная" область приведения), содержащаяся в однократной области приведения Эрмита-Минковского. Для $n=2$ это давно известный результат. В случае $n=3$ независимо от нашего исследования фундаментальную область, содержащуюся в области приведения Минковского нашел Штогрин [3]. Заметим при этом, что его фундаментальная область отличается от нашей.

Автор приносит глубокую благодарность А.В.Малышеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Основные обозначения и редукционные леммы

При доказательстве основных утверждений работы нам понадобяться леммы, которые мы будем называть редукционными. В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

I) e_i – вектор, у которого i-тая координата равна 1, а все остальные равны 0 $(i=1,\ldots,n)$;

2) если $i,j,\ldots,k$ суть индексы (возможно, совпадающие) из набора $(1,\ldots,n)$, то

$$e_{i,j,\ldots,k} = e_i + e_j + \ldots + e_k .$$

Как обычно, $f(x;y)$ – билинейная форма

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j ,$$

отвечающая квадратичной форме f.

В формулировках лемм I-6 этого параграфа мы предполагаем, что форма f удовлетворяет условиям Минковского (см.§ I); $\tau \geqslant 0$ – целое число; $l=(l_1,\ldots,l_n)$, где $l_1,\ldots,l_n$ целые числа с условиями

$$0 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n . \qquad (I)$$

Условимся при $v<u$ сумму $\sum_{j=u}^{v}$ считать равной нулю, $l_m = l_n$ при $m>n$. $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера.

Лемма I. Пусть k – целое число, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Пусть

$$2l_{n-k} > \sum_{i=1}^{n-k-1} l_i + r, \tag{2}$$

причем если $k \geqslant 3$, то

$$2l_{n-k} > \sum_{i=1}^{n-k-1} l_i + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(l_{n-i} - l_{n-i-1}) - (l_{n-k+1} - l_{n-k}) + r, \tag{3}$$

а если $k \geqslant 4$, то сверх того

$$2l_{n-k} > \sum_{i=1}^{n-k-1} l_i + 2(l_n - l_{n-k+2}) - 2(l_{n-k+1} - l_{n-k}) + r. \tag{4}$$

Тогда

$$f(l) \geqslant f(l - e_{n-k,\dots,n}) + r f(e_{n-k,\dots,n}). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $A_i = 0$, $B_{i+2} = 0$, если $i \leqslant 0$.

$$A_i = \min\left(\frac{l_{n-k+1} - l_{n-k} - \sum_{j=0}^{i-1} jA_j}{i}, l_{n-i+1} - l_{n-i}\right), \quad \text{если } 1 \leqslant i \leqslant k-2$$

$$B_i = \min\left(\frac{l_n - l_{n-1} - A_1 - \sum_{j=2}^{i-1} B_j(j-2)}{i-2}, l_{n-i+1} - l_{n-i} - A_i\right), \text{если } 3 \leqslant i \leqslant k-2.$$

Имеем

$$f(l) - f(l - e_{n-k,\dots,n}) = 2f(l; e_{n-k},\dots,n) - f(e_{n-k,\dots,n}).$$

Разлагая билинейную форму $f(l; e_{n-k,\dots,n})$ по первому аргументу в соответствии с представлением

$$l = \sum_{i=1}^{n-k-1} l_i e_i + l_{n-k} e_{n-k,\dots,n} + \left(l_{n-k+1} - l_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-2} jA_j\right) e_{n-k+1,\dots,n} +$$

$$+ (l_{n-k+2} - l_{n-k+1}) e_{n-k+2,\dots,n} + \sum_{j=0}^{k-2} A_j \sum_{i=n-j+1}^{n} e_{n-k+1,\dots,i,i,\dots,n} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{k-2} B_i \sum_{j=n-i+1}^{n-1} e_{j,n} + \sum_{i=2}^{k-2} (l_{n-i+1} - l_{n-i} - A_i - B_i) \sum_{j=n-i+1}^{n} e_j +$$

$$+ \left[\prod_{j=0}^{2} (1 - \delta_{k,j})\right] \left(l_n - l_{n-1} - A_1 - \sum_{i=2}^{k-2} (i-2) B_i\right) e_n,$$

получаем

$$f(\ell)-f(\ell-e_{n-k,\dots,n})-\tau f(e_{n-k,\dots,n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i\left\{f(e_{i,n-k,\dots,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+\left(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-2}jA_j\right)\left\{f(e_{n-k,\dots,n})-f(e_{n-k})\right\}+$$

$$+\left(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-2}jA_j\right)f(e_{n-k+1,\dots,n})+$$

$$+\left(\ell_{n-k+2}-\ell_{n-k+1}\right)\sum_{j=n-k}^{n-k+1}\left\{f(e_{i,n-k+2,\dots,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-2}A_j\sum_{i=n-j+1}^{n}\left\{\left\{f(e_{n-k,n-k+1,\dots,i,i,\dots,n})-f(e_{n-k})\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-k+1,\dots,n})-f(e_i)\right\}\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{k-2}B_i\sum_{j=n-i+1}^{n-1}\left\{\left\{f(e_{n-k,\dots,j,j,\dots,n})-f(e_n)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-k,\dots,j,\dots,n,n})-f(e_j)\right\}\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{k-2}\left(\ell_{n-i+1}-\ell_{n-i}-A_i-B_i\right)\left\{\sum_{j=n-i+1}^{n-1}\left\{f(e_{n-k,\dots,j,j,\dots,n})-f(e_{j+1})\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-k,\dots,n,n})-f(e_{n-i+1})\right\}\right\}+$$

$$+\delta_{k,3}\left(\ell_n-\ell_{n-1}-A_1-\sum_{i=2}^{k-2}(i-2)B_i\right)\left\{\sum_{i=n-k}^{n-1}\left\{f(e_{i,n})-f(e_i)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-3,n-2,n-1,n})-f(e_n)\right\}\right\}+$$

$$+\left[\prod_{j=0}^{3}(1-\delta_{k,j})\right]\left(\ell_n-\ell_{n-1}-A_1-\sum_{i=2}^{k-2}(i-2)B_i\right)\left\{f(e_{n-k,\dots,n})-f(e_n)\right\}+$$

$$+\left[\prod_{j=0}^{3}(1-\delta_{k,j})\right]\left(l_n-l_{n-1}-A_1-\sum_{i=2}^{k-2}(i-2)B_i\right)f(e_{n-k,\dots,n,n})+$$

$$+\Big(2l_{n-k}-\sum_{i=1}^{n-k-1}l_i-1-r-2\sum_{i=2}^{k-2}(i-1)B_i-\sum_{i=2}^{k-2}i(l_{n-i+1}-l_{n-i}-A_i-B_i)-$$

$$-\Big(2\prod_{j=0}^{3}(1-\delta_{k,j})+\delta_{k,3}\Big)\Big(l_n-l_{n-1}-A_1-\sum_{i=2}^{k-2}(i-2)B_i\Big)\Big)f(e_{n-k,\dots,n}).$$

Поэтому имеет место неравенство (5), ибо в силу условий Минковского каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно, так что в силу (I), (2), (3) и (4) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $k=3$ или $k=4$. Пусть

$$2l_{n-k}>\sum_{i=1}^{n-k-1}l_i+r,\quad l_{n-k}+l_n-l_{n-1}>\sum_{i=1}^{n-k-1}l_i+r, \tag{6}$$

причем если $k=4$, то

$$l_{n-4}+l_{n-3}+l_{n-2}>\sum_{i=1}^{n-5}l_i+l_{n-1}+r. \tag{7}$$

Тогда

$$f(l)\geqslant f(l-e_{n-k,\dots,n-1,n,n})+rf(e_{n-k,\dots,n-1,n,n}). \tag{8}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$A=\min\{l_{n-k};l_n-l_{n-1}\},\quad B=\min\{l_{n-k}-A,\ l_{n-1}-l_{n-2}\},$$
$$C=\min\{l_{n-k+1}-l_{n-k},\ l_{n-1}-l_{n-2}-B\}.$$

Имеем

$$f(l)-f(l-e_{n-k,\dots,n-1,n,n})=2f(l;e_{n-k,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-k,\dots,n-1,n,n}).$$

Разлагая билинейную форму $f(l;e_{n-k,\dots,n-1,n,n})$ в соответствии с представлением

$$l=\sum_{i=1}^{n-k-1}l_ie_i+Ae_{n-k,\dots,n-1,n,n}+Be_{n-k,\dots,n-1,n-1,n,n}+$$

$$+(l_{n-1}-A-B)e_{n-k,\dots,n-1,n}+Ce_{n-k+1,\dots,n-1,n-1,n,n}+$$

$$+(l_{n-k+1}-l_{n-k}-C)e_{n-k+1,\dots,n-1,n}+(l_{n-2}-l_{n-3})\delta_{k,4}e_{n-2,\dots,n}+$$

$$+(l_{n-1}-l_{n-2}-B-C)e_{n-1,n}+(l_n-l_{n-1}-A)e_n,$$

получаем

$$f(\ell)-f(\ell-e_{n-k,\dots,n-1,n,n})-\tau f(e_{n-k,\dots,n-1,n,n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i\left\{f(e_{i,n-k,\dots,n-1,n,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+(\ell_{n-k}-A-B)\left\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n})-f(e_n)\right\}+$$

$$+B\left\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n})-f(e_{n-1})\right\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\left\{f(e_{n-k,\dots,n-1,n})-f(e_{n-k})\right\}+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\left\{f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n})-f(e_n)\right\}+$$

$$+C\left\{f(e_{n-k+1,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\right\}+$$

$$+C\left\{f(e_{n-k,n-k+1,\dots,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-k})\right\}+$$

$$+\delta_{k,4}(\ell_{n-2}-\ell_{n-3})\sum_{j=n-2}^{n-1}\left\{f(e_{j,n})-f(e_j)\right\}+$$

$$+\delta_{k,4}(\ell_{n-2}-\ell_{n-3})\sum_{i=n-4}^{n-3}\left\{f(e_{i,n-2,n-1,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\sum_{i=n-3}^{n-2}\left\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\left\{f(e_{n-1,n})-f(e_{n-1})\right\}+$$

$$+(\ell_n-\ell_{n-1}-A)\sum_{i=n-3}^{n-1}\left\{f(e_{i,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+B\sum_{i=n-k}^{n-2}\left\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\right\}+B\,\delta_{3,k}\,f(e_{n-1,n})+$$

$$+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\sum_{i=n-k+1}^{n-1}\left\{f(e_{i,n})-f(e_i)\right\}+(\ell_{n-k+1}-\ell_{n-k}-C)\,\delta_{3,k}\,f(e_n)+$$

$$+(\ell_n-\ell_{n-1}-A)\delta_{4,k}\{f(e_{n-4,n})-f(e_{n-4})\}+(\ell_n-\ell_{n-1}-A)\delta_{3,k}f(e_n)+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\delta_{4,k}\{f(e_{n-4,n})-f(e_{n-4})\}+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\delta_{3,k}f(e_n)+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\delta_{4,k}\{f(e_{n-4,\dots,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\}+$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C)\delta_{4,k}\{f(e_{n-4,n-1})-f(e_{n-4})\}+$$

$$+(2A-1-\sum_{i=1}^{n-k-1}\ell_i-\tau+\ell_{n-k}-A-\delta_{4,k}(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-B-C))f(e_{n-k,\dots,n-1,n,n}).$$

Поэтому имеет место неравенство (8), ибо в силу условий Минковского каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно, так что в силу (I), (6) и (7) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

<u>Лемма 3</u>. П у с т ь

$$\left.\begin{aligned} &2\ell_{n-5}>\sum_{i=1}^{n-6}\ell_i+\tau\\ &\ell_{n-5}+\ell_{n-1}+\ell_n>\sum_{i=1}^{n-6}\ell_i+\ell_{n-4}+\ell_{n-3}+\ell_{n-2}+\tau\\ &\ell_{n-5}+\ell_{n-4}+\ell_{n-3}+\ell_{n-1}>\sum_{i=1}^{n-6}\ell_i+\ell_{n-2}+\ell_n+\tau \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Т о г д а

$$f(\ell)\geqslant f(\ell-e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})+\tau f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}).\qquad(10)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$A=\min(\ell_{n-5},\ell_{n-1}-\ell_{n-2}),\quad B=\min(\ell_{n-5}-A,\ell_n-\ell_{n-1}),$$

$$C=\min(\ell_{n-5}-A-B,\ell_{n-2}-\ell_{n-3}),\ D=\min(\ell_{n-4}-\ell_{n-5},\ell_{n-2}-\ell_{n-3}-C),$$

$$E=\min(\ell_{n-4}-\ell_{n-5}-D,\ell_n-\ell_{n-1}-B),F=\min(\ell_{n-4}-\ell_{n-5}-D-E,\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-A),$$

$$G=\min(F,\ell_{n-4}-\ell_{n-5}-D-E-F).$$

Имеем

$$f(\ell)-f(\ell-e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})=2f(\ell;e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}).$$

57 2

Разлагая билинейную форму $f(\ell; e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})$ в соответствии с представлением

$$\ell = \sum_{i=1}^{n-6} \ell_i e_i + A e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n} + B e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n,n} +$$

$$+ C e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-2,n-1,n-1,n,n} + (\ell_{n-5} - A - B - C) e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n} +$$

$$+ D e_{n-4,n-3,n-2,n-2,n-1,n-1,n,n} + E e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n} + F e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n} +$$

$$+ (\ell_{n-4} - \ell_{n-5} - D - E - F) e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n} + (\ell_{n-3} - \ell_{n-4}) e_{n-3,n-2,n-1,n} +$$

$$+ (\ell_{n-2} - \ell_{n-3} - C - D) e_{n-2,n-1,n} + (\ell_{n-1} - \ell_{n-2} - A - F) e_{n-1,n} + (\ell_n - \ell_{n-1} - B - E) e_n,$$

получаем

$$f(\ell) - f(\ell - e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) - \tau f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-6} \ell_i \{ f(e_{i,n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) - f(e_i) \} +$$

$$+ (\ell_{n-5} - A - B - C) \{ \{ f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) - f(e_{n-1}) \} +$$

$$+ \{ f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n}) - f(e_n) \} \} +$$

$$+ D \{ \{ f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n}) - f(e_{n-5}) \} + \sum_{i=n-5}^{n-3} \{ f(e_{i,n-2,n-1,n}) - f(e_i) \} +$$

$$+ \sum_{i=n-4}^{n-2} \{ f(e_{i,n-1,n}) - f(e_i) \} + \{ f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n}) - f(e_{n-2}) \} \} +$$

$$+ E \{ \{ f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) - f(e_{n-5}) \} +$$

$$+ \{ f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n}) - f(e_{n-1}) \} + \sum_{i=n-4}^{n-2} \{ f(e_{i,n-1,n}) - f(e_i) \} \} +$$

$$+ (\ell_{n-3} - \ell_{n-4}) \{ \sum_{i=n-5}^{n-4} \{ f(e_{i,n-3,n-2,n-1,n}) - f(e_i) \} +$$

$$+ \sum_{i=n-3}^{n-2} \{ f(e_{i,n-1,n}) - f(e_i) \} \} +$$

$$+(l_{n-1}-l_{n-2}-A-F)\sum_{i=n-5}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}+$$

$$+B\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\}+$$

$$+C\{\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-2})\}+\sum_{i=n-5}^{n-3}\{f(e_{i,n-2,n-1,n})-f(e_i)\}\}+$$

$$+F\{\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-5})\}+\sum_{i=n-4}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}\}+$$

$$+(F-G)f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})+G\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-4})\}+$$

$$+(l_{n-4}-l_{n-5}-D-E-F)\{\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-5})\}+\sum_{i=n-1}^{n}\{f(e_{n-4,i})-f(e_i)\}+$$

$$+\sum_{i=n-3}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}+\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-4})\}\}+$$

$$+(l_{n-4}-l_{n-5}-D-E-F-G)\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-4})\}+$$

$$+(l_{n-2}-l_{n-3}-C-D)\{\sum_{i=n-4}^{n-3}\{f(e_{i,n-2,n-1,n})-f(e_i)\}+\{f(e_{n-2,n-1,n})-f(e_{n-2})\}+$$

$$+\{f(e_{n-5,n-1,n})-f(e_{n-5})\}+\{f(e_{n-5,n-2})-f(e_{n-5})\}\}+$$

$$+(l_{n-2}-l_{n-3}-C-D)\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-f(e_{n-2})\}+$$

$$+(l_n-l_{n-1}-B-E)\{\{f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\}+\sum_{i=n-5}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}\}+$$

$$+(2A+B+C-\tau-1-\sum_{i=1}^{n-6}l_i-(l_{n-4}-l_{n-5}-D-E-F-G)-(l_{n-2}-l_{n-3}-C-D)-$$

$$-(l_n-l_{n-1}-B-E))f(e_{n-5,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}).$$

Поэтому имеет место неравенство (I0), ибо в силу условий Минковского каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно; так что в силу (I) и (9) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. Пусть

$$\left.\begin{aligned}
&2l_{n-4} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + r\\
&l_{n-4} + l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + l_{n-2} + r\\
&l_{n-3} + 2l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + l_{n-4} + l_n + r\\
&l_{n-3} + l_{n-2} + l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + l_n + r\\
&l_n + l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + l_{n-4} + l_{n-2} + r.
\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Тогда

$$f(l) \geqslant f(l - e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) + r f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}). \qquad (I2)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$A = \min(l_{n-4}, l_{n-1} - l_{n-2}), \qquad B = \min(l_{n-4} - A,\ l_n - l_{n-1}),$$

$$C = \min(l_{n-4} - A - B, l_{n-2} - l_{n-3}),\ D = \min(l_{n-4} - A - B - C, l_{n-3} - l_{n-4}),$$

$$E = \min(l_{n-3} - l_{n-4} - D, l_n - l_{n-1} - B),\ F = \min(l_{n-1} - l_{n-2} - A, l_n - l_{n-1} - B - E),$$

$$G = \min(l_n - l_{n-1} - B - E - F, l_{n-2} - l_{n-3} - C),\ H = \min(E, l_n - l_{n-1} - B - E - F - G).$$

Имеем

$$f(l) - f(l - e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) = 2f(l; e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}) - f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}).$$

Разлагая билинейную форму $f(l; e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})$ по первому аргументу в соответствии с представлением

$$l = \sum_{i=1}^{n-5} l_i e_i + A e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n} + B e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n} +$$

$$+ C e_{n-4,n-3,n-2,n-2,n-1,n-1,n,n} + D e_{n-4,n-3,n-3,n-2,n-2,n-1,n-1,n,n} +$$

$$+ (l_{n-4} - A - B - C - D) e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n} + E e_{n-3,n-2,n-1,n,n} +$$

$$+ (l_{n-3} - l_{n-4} - D - E) e_{n-3,n-2,n-1,n} + (l_{n-2} - l_{n-3} - C) e_{n-2,n-1,n} +$$

$$+(\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-A)e_{n-1,n}+(\ell_n-\ell_{n-1}-B-E)e_n,$$

получаем

$$f(\ell)-f(\ell-e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-\tau f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-5}\ell_i\left\{f(e_{i,n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n})-f(e_i)\right\}+$$

$$+B\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\right\}+Cf(e_{n-2,n-1,n})+$$

$$+C\left\{\sum_{i=n-4}^{n-3}\left\{f(e_{i,n-2,n-1,n})-f(e_i)\right\}+\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-2})\right\}\right\}+$$

$$+D\left\{\sum_{i=n-4}^{n-3}\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_i)\right\}+\left\{f(e_{n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-3})\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-2,n-1,n})-f(e_{n-2})\right\}+\sum_{i=n-1}^{n}\left\{f(e_{n-3,i})-f(e_i)\right\}\right\}+$$

$$+(\ell_{n-4}-A-B-C-D)\left\{\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n})-f(e_{n-1})\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n})-f(e_n)\right\}\right\}+$$

$$+E\left\{\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n})-f(e_{n-4})\right\}+\left\{f(e_{n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-1})\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n-3}^{n-2}\left\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\right\}+\left\{f(e_{n-1,n})-f(e_n)\right\}\right\}+(E-H)f(e_n)+$$

$$+(\ell_{n-3}-\ell_{n-4}-D-E)\left\{\left\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_{n-4})\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n-3}^{n-2}\left\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\right\}\right\}+(\ell_{n-3}-\ell_{n-4}-D-E)f(e_{n-3,n-2,n-1,n})+$$

$$+(\ell_{n-2}-\ell_{n-3}-C)\left\{\sum_{i=n-4}^{n-3}\left\{f(e_{i,n-2,n-1,n})-f(e_i)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{\left(f(e_{n-2,n-1,n})-f(e_{n-2})\right\}+\left\{f(e_{n-1,n})-f(e_n)\right\}\right\}+\right.$$

$$+(\ell_{n-2}-\ell_{n-3}-C-G)f(e_n)+$$

$$+(l_{n-1}-l_{n-2}-A)\Big\{\sum_{i=n-4}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}+\{f(e_{n-1,n})-f(e_n)\}\Big\}+$$

$$+(l_{n-1}-l_{n-2}-A-F)f(e_n)+$$

$$+(F+G+H)\Big\{\sum_{i=n-4}^{n-1}\{f(e_{i,n})-f(e_i)\}+\{f(e_{n-1,n})-f(e_{n-1})\}\Big\}+$$

$$+(l_n-l_{n-1}-B-E-F-G-H)\Big\{\{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n})-f(e_n)\}+$$

$$+\sum_{i=n-4}^{n-2}\{f(e_{i,n-1,n})-f(e_i)\}+\sum_{i=n-4}^{n-1}\{f(e_{i,n})-f(e_i)\}+$$

$$+\{f(e_{n-1,n})-f(e_{n-1})\}\Big\}+$$

$$+\Big(2A+B+C+D-1-r-\sum_{i=1}^{n-5}l_i-(l_n-l_{n-1}-B-E-F-G-H)\Big)f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n}).$$

Поэтому имеет место неравенство (I2), ибо, в силу условий Минковского выражения в фигурных скобках неотрицательны; так что в силу (I) и (I1) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

<u>Лемма 5</u>. Пусть $n=6$ и пусть

$$\begin{aligned}
&l_2>1\\
&l_2+l_3+l_4\leqslant l_1+l_5+1\\
&2l_j\leqslant\sum_{i=1}^{j-1}l_i+1 \quad j=4,5,6\\
&l_2+l_5\leqslant l_6\\
&l_2+l_3\leqslant l_5\\
&l_1+1<l_2+l_5-l_4
\end{aligned}\tag{I3}$$

Тогда

$$f(l)\geqslant f(l-e_{2,3,4,5,5,6,6,6})+f(e_{2,3,4,5,5,6,6,6}).\tag{I4}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$A=\min(l_2,l_5-l_4).$$

Имеем

$$f(l)-f(l-e_{2,3,4,5,5,6,6,6})=2f(l;e_{2,3,4,5,5,6,6,6})-f(e_{2,3,4,5,5,6,6,6}).$$

Разлагая билинейную форму $f(\ell; e_{2,3,4,5,5,6,6,6})$ по первому аргументу в соответствии с представлением

$$\ell = \ell_1 e_1 + A e_{2,3,4,5,5,6,6,6} + (\ell_2 - A) e_{2,3,4,4,5,5,6,6,6} + (\ell_3 - \ell_2) e_{3,4,5,6} +$$

$$+ (\ell_4 - \ell_3 - \ell_2 + A) e_{4,5,6} + (\ell_5 - \ell_4 - A) e_{5,6} + (\ell_6 - \ell_5 - \ell_2) e_6 ,$$

получаем

$$f(\ell) - f(\ell - e_{2,3,4,5,5,6,6,6}) - f(e_{2,3,4,5,5,6,6,6}) =$$

$$= \ell_1 \{ f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) - f(e_1) \} +$$

$$+ (\ell_2 - A) \{ \{ f(e_{2,3,4,5,6,6}) - f(e_4) \} + \sum_{i=4}^{5} \{ f(e_{i,6}) - f(e_i) \} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{3} \{ f(e_{i,4,5,6}) - f(e_i) \} \} + (\ell_2 - A) f(e_{4,5,6}) +$$

$$+ (\ell_3 - \ell_2) \{ \{ f(e_{2,3,4,5,6}) - f(e_2) \} + \sum_{i=3}^{4} \{ f(e_{i,5,6}) - f(e_i) \} +$$

$$+ \{ f(e_{3,4,5,6}) - f(e_6) \} + \sum_{i=3}^{5} \{ f(e_{i,6}) - f(e_i) \} \} +$$

$$+ (\ell_4 - \ell_3 - \ell_2 + A) \{ \sum_{i=2}^{3} \{ f(e_{i,4,5,6}) - f(e_i) \} + \sum_{i=4}^{5} \{ f(e_{i,6}) - f(e_i) \} +$$

$$+ \{ f(e_{4,5,6}) - f(e_4) \} \} + (\ell_4 - \ell_3 - \ell_2 + A) f(e_{5,6}) +$$

$$+ (\ell_5 - \ell_4 - A) \{ \sum_{i=2}^{4} \{ f(e_{i,5,6}) - f(e_i) \} + \{ f(e_{5,6}) - f(e_5) \} \} +$$

$$+ (\ell_5 - \ell_4 - A)(f(e_{5,6}) + f(e_6)) +$$

$$+ (\ell_6 - \ell_5 - \ell_2) \{ \sum_{i=2}^{5} \{ f(e_{i,6}) - f(e_i) \} + \{ f(e_{5,6}) - f(e_5) \} \} +$$

$$+ (\ell_6 - \ell_5 - \ell_2) f(e_6) + (\ell_2 + A - \ell_1 - 2) f(e_{2,3,4,5,5,6,6,6}).$$

Поэтому имеет место неравенство (I4), ибо в силу условий Минковского каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно; так что в силу (I) и (I3) в правой части последнего равенства каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $n=6$ и пусть $l=(l_1,\dots,l_6)$ один из векторов

$$(2,2,2,2,3,6),\ (2,2,2,3,4,6),\ (2,2,2,3,4,7).$$

Тогда

$$f(l)\geqslant f(l-e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})+f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}). \tag{I5}$$

Доказательство. Имеем

$$f(2e_{1,2,3,4}+3e_5+6e_6)-f(e_{1,2,3,4,5,6,6,6})-f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})=$$

$$=\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\}+\sum_{i=1}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\}+f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6});$$

$$f(2e_{1,2,3}+3e_4+4e_5+6e_6)-f(e_{1,2,3,4,4,5,5,6,6,6})-f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})=$$

$$=\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})-f(e_4)\}+f(e_{1,2,3}+2e_{4,5}+3e_6);$$

$$f(2e_{1,2,3}+3e_4+4e_5+7e_6)-f(e_{1,2,3}+2e_{4,5}+4e_6)-f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})=$$

$$=f(e_{1,2,3}+2e_{4,5}+3e_6)+\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})-f(e_4)\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\}+\{f(e_{5,6})-f(e_5)\}.$$

Поэтому имеет место неравенство (I5), ибо в силу условий Минковского каждое из слагаемых в фигурных скобках неотрицательно; так что в правой части последних равенств каждое из слагаемых неотрицательно.

Лемма доказана.

§ 3. О неравенствах, определяющих область Дирихле для форм, удовлетворяющих условиям Минковского

Доказательство теоремы 2. Не нарушая общности, можно считать, что $l_i\geqslant 0$ $(i=1,\dots,n)$, ибо иначе форму f можно заменить на форму $f_1=f(\pm x_1,\dots,\pm x_n)$, где знаки выбраны так, чтобы

$$f_1(|l_1|,\dots,|l_n|)=f(l_1,\dots,l_n).$$

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7. Пусть $n \leqslant 6$ и пусть f удовлетворяет условиям Минковского. Пусть целый вектор $l=(l_1,\ldots,l_n)$ отличен от векторов таблиц I - 3 $l_i \geqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$, причем имеется ровно s ненулевых координат l_i; $(1 \leqslant s \leqslant n \leqslant 6)$. Тогда существует целый вектор $l'=(l'_1,\ldots,l'_n)$ с условиями:

1) $0 \leqslant l'_i \leqslant l_i$ $(i=1,\ldots,n)$;
2) $l'_i > 0$, если $l_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$;
3) $l'_i + \ldots + l'_n < l_1 + \ldots + l_n$;
4) $f(l) \geqslant f(l') + f(l-l')$.

Доказательство. Не нарушая общности, мы предполагаем, что для $l=(l_1,\ldots,l_n)$ выполняются условия (2.I). Ибо иначе мы можем форму f заменить на форму $f'=f(x_{k_1},\ldots,x_{k_n})$ так, чтобы $l_{k_1} \leqslant \ldots \leqslant l_{k_n}$. Доказав же лемму 7 для форму f', мы ее докажем тем самым и для формы f.

В следующей таблице (таблица 4) дается построение вектора l' по вектору l (для разных s, и при различных условиях, налагаемых на координаты вектора l'). В примечании указано основание (ссылка на различные случаи лемм I-6), в силу которого для вновь построенного вектора l' выполнены условия I)-4).

Таблица 4.

s	Условие на l_i	Построение вектора l'	Примечание
1	$l_n > 1$	$l'=l-e_n$	Л.1, $k=0$
2	$l_n > 1$	$l'=l-e_n$	Л.1, $k=0$
3	$l_{n-1} > 1$	$l'=l-e_{n-1,n}$	Л.1, $k=1$
	$l_{n-2}=l_{n-1}=1$ $l_n > 1$	$l'=l-e_n$	Л.1, $k=0$
4	$l_{n-2} > 1$	$l'=l-e_{n-2,n-1,n}$	Л.1, $k=2$

	$l_{n-3}=l_{n-2}=1$ $l_{n-1}>1$	$l'=l-e_{n-1,n}$	$\Lambda.1,\ k=1$
	$l_{n-3}=l_{n-2}=l_{n-1}=1$ $l_n\geqslant 3$	$l'=l-e_n$	$\Lambda.1,\ k=0$
5	$l_{n-3}>1$ $l_{n-3}+l_{n-2}+l_{n-1}>\sum_{i=1}^{n-4}l_i+$ $+l_n+1$	$l'=l-e_{n-3,n-2,n-1,n}$	$\Lambda.1,\ k=3$
	$l_{n-3}>1$ $l_{n-3}+l_{n-2}+l_{n-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n-4}l_i+$ $+l_n+1$ $l_{n-3}+l_n>\sum_{i=1}^{n-4}l_i+l_{n-1}+1$	$l'=l-e_{n-3,n-2,n-1,n,n}$	$\Lambda.2,\ k=3$
	$l_{n-3}>1$ $l_{n-3}+l_{n-2}+l_{n-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n-4}l_i+$ $+l_n+1$ $l_{n-3}+l_n\leqslant\sum_{i=1}^{n-4}l_i+l_{n-1}+1$ $2l_{n-1}>\sum_{i=1}^{n-2}l_i+1$	$l'=l-e_{n-1,n}$	$\Lambda.1,\ k=1$
	$l_{n-1}>1$ $l_{n-3}+l_{n-2}+l_{n-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n-4}l_i+$ $+l_n+1$ $l_{n-3}+l_n\leqslant\sum_{i=1}^{n-4}l_i+l_{n-1}+1$ $2l_{n-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n-3}l_i+1$	$l'=l-e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}$	$\Lambda.2,\ k=4$
	$l_{n-4}=l_{n-3}=1$ $l_{n-2}>1$	$l'=l-e_{n-2,n-1,n}$	$\Lambda.2,\ k=2$
	$l_{n-4}=l_{n-3}=l_{n-2}=1$ $l_{n-1}\geqslant 3$	$l'=l-e_{n-1,n}$	$\Lambda.1,\ k=1$

	$\ell_{n-4}=\ell_{n-3}=\ell_{n-2}=1$ $\ell_{n-1}\leqslant 2$ $2\ell_n > 4+\ell_{n-1}$	$\ell'=\ell-e_n$	$\Lambda.1,\ k=0$
$s=n=6$	$2\ell_6 > \sum_{i=1}^{5}\ell_i+1$	$\ell'=\ell-e_6$	$\Lambda.1,\ k=0$
	$2\ell_6 \leqslant \sum_{i=1}^{5}\ell_i+1$ $2\ell_5 > \sum_{i=1}^{4}\ell_i+1$	$\ell'=\ell-e_{4,5,6}$	$\Lambda.1,\ k=2$
	$2\ell_i \leqslant \sum_{i=1}^{j-1}\ell_i+1,\ j=5,6$ $2\ell_4 > \sum_{i=1}^{3}\ell_i+1$	$\ell'=\ell-e_{2,3,4,5,6,6}$	$\Lambda.2,\ k=4$
	$2\ell_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1}\ell_i+1,\ j=4,5,6$ $\ell_2>1$ $\ell_2+\ell_6-\ell_5>\ell_1+1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4>\ell_1+\ell_5+1$	$\ell'=\ell-e_{2,3,4,5,6,6}$	$\Lambda.2,\ k=4$
	$2\ell_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1}\ell_i+1,\ j=4,5,6$ $\ell_2>1$ $\ell_2+\ell_6-\ell_5\leqslant\ell_1+1$ $\ell_1>1$ $\ell_1+\ell_5+\ell_6>\ell_2+\ell_3+\ell_4+1$ $\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_5>\ell_4+\ell_6+1$	$\ell'=\ell-e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$	$\Lambda.3$
	$2\ell_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1}\ell_i+1,\ j=4,5,6$ $\ell_2>1$ $\ell_2+\ell_6-\ell_5\leqslant\ell_1+1$ $\ell_1>1$ $\ell_1+\ell_5+\ell_6\leqslant\ell_2+\ell_3+\ell_4+1$ $\ell_1+\ell_2+3\ell_3>\ell_4+\ell_5+\ell_6+1$ $2\ell_2+2\ell_3>2\ell_6+1$	$\ell'=\ell-e_{1,2,3,4,5,6}$	$\Lambda.1,\ k=5$

$2\ell_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2 + \ell_6 - \ell_5 \leqslant \ell_1 + 1$ $\ell_1 > 1$ $\ell_1 + \ell_5 + \ell_6 \leqslant \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + 1$ $\ell_1 + \ell_2 + 3\ell_3 \leqslant \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 + 1$ $\ell_2 + \ell_3 + 2\ell_4 > \ell_1 + \ell_5 + \ell_6 + 1$ $2\ell_3 + 2\ell_4 > \ell_1 + 2\ell_6 + 1$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,6}$	$\Lambda.1,\ k=4$
$2\ell_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 \leqslant \ell_1 + \ell_5 + 1$ $\ell_1 > 1$ $\ell_1 + \ell_5 + \ell_6 > \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + 1$ $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_5 > \ell_4 + \ell_6 + 1$	$\ell' = \ell - e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$	$\Lambda.3$
$2\ell_i \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 \leqslant \ell_1 + \ell_5 + 1$ $\ell_1 > 1$ $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_5 \leqslant \ell_4 + \ell_6 + 1$ $\ell_5 \geqslant \ell_2 + \ell_3$ $\ell_2 + \ell_5 - \ell_4 > \ell_1 + 1$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,5,6,6,6}$	$\Lambda.5$
$2\ell_i \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 \leqslant \ell_1 + \ell_5 + 1$ $\ell_1 > 1$ $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_5 \leqslant \ell_4 + \ell_6 + 1$ $\ell_5 \geqslant \ell_2 + \ell_3$ $\ell_2 + \ell_5 - \ell_4 \leqslant \ell_1 + 1$	$\ell' = \ell - e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}$	$\Lambda.6$

$2\ell_i \leq \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4 \leq \ell_1+\ell_5+1$ $\ell_1 > 1$ $\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_5 \leq \ell_4+\ell_6+1$ $\ell_5 < \ell_2+\ell_3$	$\ell' = \ell - e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}$	$\Lambda.6$
$2\ell_j \leq \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2+\ell_6-\ell_5 \leq \ell_1+1$ $\ell_1 = 1$ $\ell_2+\ell_3+2\ell_4 > \ell_1+\ell_5+\ell_6+1$ $2\ell_3+2\ell_4 > \ell_1+2\ell_6+1$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,6}$	$\Lambda.1,\ k=4$
$2\ell_j \leq \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2+\ell_6-\ell_5 \leq \ell_1+1$ $\ell_1 = 1$ $\ell_2+\ell_3+2\ell_4 \leq \ell_1+\ell_5+\ell_6+1$ $\ell_2+\ell_5 > \ell_1+\ell_4+1$ $\ell_3+2\ell_5 > \ell_1+\ell_2+\ell_6+1$ $\ell_3+\ell_4+\ell_5 > \ell_1+\ell_6+1$ $\ell_5+\ell_6 > \ell_1+\ell_2+\ell_4+1$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,5,6,6}$	$\Lambda.4$
$2\ell_j \leq \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4 \leq \ell_1+\ell_5+1$ $\ell_1 = 1$ $\ell_6 \leq 5$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,5,6,6,6}$	$\Lambda.4$
$2\ell_j \leq \sum_{i=1}^{j-1} \ell_i + 1,\ j=4,5,6$ $\ell_2 > 1$ $\ell_2+\ell_3+\ell_4 \leq \ell_1+\ell_5+1$ $\ell_1 = 1$ $\ell_6 = 6$	$\ell' = \ell - e_{2,3,4,5,5,6,6,6}$	$\Lambda.5$

	$2l_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} l_i + 1,\ j=4,5,6$ $l_2=1,\ l_3 \geqslant 2$ $l_3+l_4+l_5 > 3+l_6$	$l'=l-e_{3,4,5,6}$	Л.1, $k=3$
	$2l_j \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} l_i + 1,\ j=4,5,6$ $l_2=1,\ l_3 \geqslant 2$ $l_3+l_4+l_5 \leqslant 3+l_6$ $l_3+l_6-l_5 > 3$	$l'=l-e_{3,4,5,6,6}$	Л.2, $k=3$

Простыми рассуждениями убеждаемся, что условия, налагаемые на координаты l_i векторов l в этой таблице, исчерпывают все возможные векторы, не входящие в таблицы I–3.

Лемма доказана.

Заметим, что если для некоторого вектора l'

$$f(l') + f(l-l') \leqslant f(l),$$

то неравенство

$$f(x) \leqslant f(x-l)$$

является следствием неравенств

$$f(x) \leqslant f(x-l'), \quad f(x) \leqslant f(x-(l-l')).$$

Поэтому теорема 2 является прямым следствием леммы 7.

§ 4. Свойство форм, удовлетворяющих условиям Минковского

Доказательство теоремы 3. Не уменьшая общности, мы можем считать, как и при доказательстве теоремы 2, что все $l_i \geqslant 0$ и что $l_i \leqslant l_{i+1}$ $(i=1,\dots,n-1)$. Прежде всего докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 8. Пусть $n \leqslant 6$. Пусть положительно определенная форма удовлетворяет условиям Минковского. Пусть

$$l^{(1)} = e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n,n}, \quad l^{(2)} = e_{1,2,3} + 2e_4 + 3e_{5,6},$$

$$l^{(3)} = e_{1,2,3} + 2e_4 + 3e_5 + 4e_6, \quad l^{(4)} = e_{1,2} + 2e_{3,4} + 3e_5 + 4e_6.$$

Тогда

$$f(l^{(i)}) > \max_{l_k \neq 0} f(e_k) \qquad (i=1,\dots,4).$$

Доказательство. Имеем

$$f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n,n}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) + f(e_n) +$$

$$+ \sum_{i=n-4}^{n-2} \{f(e_{i,n-1,n}) - f(e_i)\} + \{f(e_{n-1,n}) - f(e_{n-1})\};$$

$$f(e_{1,2,3}+2e_4+3e_{5,6})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+f(e_{5,6})+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\{f(e_{i,4,5,6})-f(e_i)\}+\{f(e_{4,5,6})-f(e_4)\};$$

$$f(e_{1,2,3}+2e_4+3e_5+4e_6)=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})+f(e_{5,6})+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\{f(e_{i,4,5,6})-f(e_i)\}+\{f(e_{4,5,6})-f(e_4)\}+\sum_{i=4}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\};$$

$$f(e_{1,2}+2e_{3,4}+3e_5+4e_6)=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+f(e_{3,4,5,6})+\{f(e_{5,6})-f(e_5)\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\{f(e_{i,3,4,5,6,6})-f(e_i)\}+\sum_{i=3}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\}.$$

В силу условий Минковского выражения в фигурных скобках неотрицательны; сумма других слагаемых больше, чем $\max\limits_{l_k\neq 0} f(e_k)$.

Лемма доказана.

<u>Лемма 9</u>. Пусть $n=6$ и пусть положительно определенная форма f удовлетворяет условиям Минковского. Пусть $l^{(5)}=e_1+2e_{2,3,4}+3e_{5,6}$. Тогда

$$f(l^{(5)})>\max_{i=1,\dots,6} f(e_i).$$

<u>Доказательство</u>. Предположим противное.

$$f(l^{(5)})\leqslant\max_{i=1,\dots,6} f(e_i). \tag{2}$$

Тогда

$$f(l^{(5)})=f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+f(e_{1,2,3,4,5,5,6})-f(e_1)+$$
$$+\sum_{i=5}^{6}\{f(e_{2,3,4,5,6})-f(e_i)\}+\sum_{i=4}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\}; \tag{3}$$

$$f(l^{(5)})=f(e_{1,2,3,4,5,6})+\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\}+$$
$$+\{f(e_{2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\}+\{f(e_{2,3,4,5,5,6})-f(e_6)\}. \tag{4}$$

В силу условий Минковского выражения в фигурных скобках в разложениях (3), (4) неотрицательны; так как сумма других слагаемых не меньше, чем $\max\limits_{k=1,\dots,6} f(e_k)$, то из допущения (2) следует, что

$$f(l^{(5)})=\max_{k=1,\dots,6} f(e_k), \tag{5}$$

что все выражения в фигурных скобках в разложениях (3), (4) равны нулю. Наконец, отсюда и из условий Минковского мы выводим:

$$f(l^{(5)})=a_{11}>a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{55}=a_{66}$$

$$a_{15} = a_{16} = a_{56} = 0$$

$$a_{25} = a_{26} = a_{35} = a_{36} = a_{46} = a_{45} = -\frac{a_{22}}{2}$$

$$a_{23} = a_{24} = a_{34} = \frac{a_{22}}{2}.$$

Но тогда не все выражения в фигурных скобках неотрицательны, ибо $f(e_{2,3,4,5,6}) = 2a_{22}$.

Противоречие доказывает лемму.

<u>Лемма 10</u>. Пусть $n \leqslant 6$ и пусть положительно определенная форма f удовлетворяет условиям Минковского. Пусть

$$l^{(6)} = e_{n-3,n-2,n-1,n,n}, \quad l^{(7)} = e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n-1,n,n},$$

$$l^{(8)} = e_{1,2,3,4,5,6,6,6}, \quad l^{(9)} = e_{1,2,3} + 2e_{4,5,6},$$

$$l^{(10)} = e_{1,2,3} + 2e_{4,5} + 3e_6, \quad l^{(11)} = e_{1,2,3} + 2e_{4,5} + 4e_6,$$

$$l^{(12)} = e_{1,2} + 2e_{3,4,5} + 3e_6.$$

Тогда

$$f(l^{(i)}) \geqslant \max_{l_k \neq 0} f(e_k) \qquad (i = 6,7,8,9,10,11,12).$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$f(l^{(6)}) = f(e_{n-3,n-2,n-1,n}) + \sum_{i=n-3}^{n-1} \{f(e_{i,n}) - f(e_i)\};$$

$$f(l^{(7)}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n}) + \sum_{i=n-4}^{n-2} \{f(e_{i,n-1,n}) - f(e_i)\};$$

$$f(l^{(8)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) + f(e_{5,6}) - f(e_5) + \sum_{i=1}^{4} \{f(e_{i,6}) - f(e_i)\};$$

$$f(l^{(9)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6}) + \sum_{i=1}^{3} \{f(e_{i,4,5,6}) - f(e_i)\};$$

$$f(l^{(10)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) + f(e_{5,6}) - f(e_5) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \{f(e_{i,4,5,6}) - f(e_i)\} + \{f(e_{4,6}) - f(e_4)\};$$

$$f(\ell^{(11)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) + f(e_{5,6}) - f(e_5) +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\{f(e_{i,4,5,6}) - f(e_i)\} + \{f(e_{4,6}) - f(e_4)\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{5}\{f(e_{i,6}) - f(e_i)\} + \sum_{i=4}^{5}\{f(e_{i,6}) - f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(12)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6}) + \sum_{i=1}^{2}\{f(e_{i,3,4,5,6,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+\{f(e_{3,4,5,6}) - f(e_6)\}.$$

В силу условий Минковского выражения в фигурных скобках неотрицательны; сумма других слагаемых не меньше, чем $\max\limits_{\ell_k \neq 0} f(e_k)$

Лемма доказана.

Для того, чтобы сформулировать следующее предложение, условимся называть переходы от ℓ к ℓ', указанные в таблице, содержащейся в доказательстве леммы 7, редукциями леммы 7.

<u>Замечание</u>. Пусть $n \leqslant 6$. Пусть положительно определенная форма f удовлетворяет условиям Минковского. Тогда редукциями леммы 7

I) вектор $\ell^{(13)} = e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}$ может быть получен лишь из следующих векторов:

$$\ell^{(19)} = e_{n-4,n-3,n-2,n-1} + 3e_n, \quad \ell^{(20)} = e_{n-4,n-3} + 2e_{n-2,n-1} + 3e_n,$$

$$\ell^{(21)} = e_{n-4} + 2e_{n-3,n-2,n-1} + 3e_n, \quad \ell^{(22)} = e_{n-4} + 2e_{n-3,n-2,n-1} + 4e_n,$$

$$\ell^{(23)} = 2e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n};$$

2) вектор $\ell^{(14)} = e_{1,2,3,4,5,6,6}$ может быть получен лишь из следующих векторов:

$$\ell^{(24)} = e_1 + 2e_{2,3,4,5} + 4e_6, \quad \ell^{(25)} = 2e_{1,2,3,4} + 3e_5 + 4e_6,$$

$$\ell^{(26)} = 2e_{1,2,3,4,5} + 3e_6, \quad \ell^{(27)} = e_{1,2} + 2e_{3,4,5} + 4e_6;$$

57 3

3) вектор $\ell^{(15)}=e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$ может быть получен лишь из следующих векторов:

$$\ell^{(28)}=e_{1,2,3,4}+3e_{5,6}\ ,\qquad \ell^{(29)}=e_1+2e_{2,3,4}+3e_5+4e_6\ ,$$

$$\ell^{(30)}=2e_{1,2,3,4,5}+4e_6\ ,\qquad \ell^{(31)}=2e_{1,2,3,4}+4e_{5,6}\ ,$$

$$\ell^{(32)}=2e_{1,2,3}+3e_{4,5}+4e_6\ ,\qquad \ell^{(33)}=e_1+2e_{2,3,4}+4e_{5,6}\ ;$$

$$\ell^{(34)}=e_{1,2}+2e_{3,4}+3e_{5,6}\ ;$$

4) вектор $\ell^{(16)}=e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}$ может быть получен лишь из следующих векторов:

$$\ell^{(17)}=e_{1,2,3,4,5,5}+4e_6\ ,\qquad \ell^{(35)}=e_{1,2,3,4}+3e_5+4e_6\ ,$$

$$\ell^{(36)}=e_1+2e_{2,3,4}+3e_5+5e_6\ ,\qquad \ell^{(37)}=2e_{1,2,3,4,5}+5e_6\ ,$$

$$\ell^{(38)}=2e_{1,2,3,4}+4e_5+5e_6\ ,\qquad \ell^{(39)}=e_1+2e_{2,3,4}+4e_5+5e_6$$

$$\ell^{(40)}=e_1+2e_{2,3,4}+4e_5+6e_6\ ,\qquad \ell^{(41)}=e_{1,2}+2e_{3,4}+3e_5+5e_6\ ;$$

5) вектор $\ell^{(17)}=e_{1,2,3,4,5,5}+4e_6$ может быть получен лишь из следующих векторов:

$$\ell^{(42)}=2e_{1,2,3,4}+4e_5+6e_6\ ,\qquad \ell^{(43)}=e_{1,2,3,4}+2e_5+5e_6\ ;$$

6) вектор $\ell^{(18)}=e_{1,2,3,4}+2e_5+me_6$ $m\geqslant 5$ может быть получен лишь из следующего вектора:

$$\ell^{(44)}=e_{1,2,3,4}+2e_5+(m+1)e_6$$

<u>Доказательство.</u> Достаточно рассмотреть редукции леммы 7, отвечающие $s=5$ и $s=n=6$. Эти редукции осуществляются вычислением из ℓ векторов e_i; $e_{i,j}$; $e_{i,j,k}$; $e_{i,j,k,m}$;

$e_{i,j,k,m,m}$; $e_{i,j,k,m,p}$; $e_{i,j,k,m,p,p}$; $e_{i,j,k,m,m,p,p}$; $e_{i,j,k,m,m,p,p,p}$;

$e_{i,j,k,m,p,r}$; $e_{i,j,k,m,p,p,r,r}$; $e_{i,j,k,m,p,p,r,r,r}$.

Непосредственно проверяя выполнение для ℓ условий осуществления редукции, мы приходим к указанному набору $\ell^{(i)}$ $(19 \leqslant i \leqslant 44)$.

<u>Лемма II</u>. Пусть $n \leqslant 6$ и пусть положительно определенная форма f удовлетворяет условиям Минковского. Тогда

$$f(\ell^{(i)}) > \max_{\ell_k \neq 0} f(e_k) \qquad (19 \leqslant i \leqslant 42).$$

Доказательство. Имеем

$$f(\ell^{(19)}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) + f(e_n) + \sum_{i=n-4}^{n-1} \{f(e_{i,n}) - f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(20)}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) + f(e_{n-2,n-1,n}) +$$

$$+ \sum_{i=n-4}^{n-3} \{f(e_{i,n-2,n-1,n}) - f(e_i)\} + \sum_{i=n-2}^{n-1} \{f(e_{i,n}) - f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(21)}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n}) + f(e_{n-3,n-2,n-1,n,n}) +$$

$$+ \{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) - f(e_{n-4})\} + \{f(e_{n-3,n-2,n-1,n}) - f(e_n)\};$$

$$f(\ell^{(22)}) = f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) + 2f(e_{n-3,n-2,n-1,n}) +$$

$$+ \{f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}) - f(e_{n-4})\} + 2\sum_{i=n-3}^{n-1} \{f(e_{i,n}) - f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(23)}) = 4f(e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n});$$

$$f(\ell^{(24)}) = f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) + f(e_{2,3,4,5,6}) +$$

$$+ \{f(e_{2,3,4,5,6,6}) - f(e_2)\} + \{f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) - f(e_1)\} +$$

$$+\sum_{i=3}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\}+\{f(e_{2,6})-f(e_6)\};$$

$$f(\ell^{(25)})=f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+2f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+$$

$$+\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\},\ \text{если}\ \max_{k=1,\dots,5} f(e_k)\geqslant a_{66};$$

$$f(\ell^{(25)})=f(e_{1,2,3,4,5,6})+3f(e_6)-\sum_{i=3}^{5}f(e_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_i)\}+\sum_{i=1}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_6)\}+$$

$$+\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\},\ \text{если}\ \max_{k=1,\dots,5} f(e_k)<a_{66};$$

$$f(\ell^{(26)})=f(e_{1,2,3,4,5,6})+2f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+$$

$$+\{f(e_{1,2,3,4,5,6})-f(e_6)\};$$

$$f(\ell^{(27)})=f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+f(e_{3,4,5,6})+$$

$$+\sum_{i=3}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\}+\sum_{i=1}^{2}\{f(e_{i,3,4,5,6,6})-f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(28)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+f(e_{5,6})+\sum_{i=1}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(29)})=f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+f(e_{2,3,4,5,6})+\sum_{i=2}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\}+$$

$$+\{f(e_{2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\}+\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\};$$

$$f(\ell^{(30)})=f(e_{1,2,3,4,5,6})+f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_i)\}+\sum_{i=3}^{5}\{f(e_{i,6})-f(e_i)\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\{f(e_{i,6})-f(e_6)\};$$

$$f(\ell^{(31)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+f(e_{1,2,3,4,5,6})+$$

$$+2\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\}+\sum_{i=5}^{6}\{f(e_{1,i})-f(e_i)\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\};$$

$$f(\ell^{(32)})=f(e_{1,2,3,4,5,6})+f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+\sum_{i=1}^{3}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\}+$$

$$+\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_4)\}+\{f(e_{1,2,3,4,4,5,6,6})-f(e_5)\};$$

$$f(\ell^{(33)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+2f(e_{2,3,4,5,6})+$$

$$+2\sum_{i=2}^{4}\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\}+\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\};$$

$$f(\ell^{(34)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})+f(e_{3,4,5,6})+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left\{f(e_{i,3,4,5,6})-f(e_i)\right\}+\sum_{i=3}^{4}\left\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\right\};$$

$$f(\ell^{(35)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})+f(e_{5,6})+f(e_6)+$$

$$+\sum_{i=1}^{4}\left\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\right\}+\left\{f(e_{5,6})-f(e_5)\right\};$$

$$f(\ell^{(36)})=f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+f(e_{2,3,4,5,6,6})+f(e_6)+$$

$$+\left\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})-f(e_1)\right\}+\left\{f(e_{2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\left\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\right\};$$

$$f(\ell^{(37)})=2f(e_{1,2,3,4,5,6,6})+f(e_6)+$$

$$+2\left\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_1)\right\}+2\left\{f(e_{1,6})-f(e_6)\right\}+$$

$$+2\sum_{i=2}^{5}\left\{f(e_{i,6})-f(e_i)\right\};$$

$$f(\ell^{(38)})=f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6})+f(e_{5,6})+$$

$$+2\left\{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6})-f(e_1)\right\}+\sum_{i=2}^{4}\left\{f(e_{i,5,6})-f(e_i)\right\}+$$

$$+\sum_{i=5}^{6}\left\{(e_{1,i})-f(e_i)\right\}+\left\{f(e_{1,2,3,4,5,6,6})-f(e_5)\right\};$$

$$f(\ell^{(39)}) = f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) + f(e_{2,3,4,5,6}) + f(e_{2,3,4,5,6,6}) +$$

$$+ \{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6}) - f(e_1)\} + 2\sum_{i=2}^{4} \{f(e_{i,5,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+ \{f(e_{5,6}) - f(e_5)\};$$

$$f(\ell^{(40)}) = f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) + 2f(e_{2,3,4,5,6,6}) + 2f(e_6) +$$

$$+ \{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) - f(e_1)\} + 2\sum_{i=2}^{4} \{f(e_{i,5,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+ 2\{f(e_{5,6}) - f(e_5)\};$$

$$f(\ell^{(41)}) = f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) + f(e_{3,4,5,6}) + f(e_6) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \{f(e_{i,3,4,5,6,6}) - f(e_i)\} + \sum_{i=3}^{5} \{f(e_{i,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+ \sum_{i=3}^{4} \{f(e_{i,5,6}) - f(e_i)\} + \{f(e_{5,6}) - f(e_5)\};$$

$$f(\ell^{(42)}) = 2f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) + f(e_6) + f(e_{1,5,6}) +$$

$$+ \{f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) - f(e_1)\} + \sum_{i=2}^{4} \{f(e_{i,5,6}) - f(e_i)\} +$$

$$+ \{f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) - f(e_5)\}.$$

В силу условий Минковского выражения в фигурных скобках неотрицательны; сумма других слагаемых больше чем $\max\limits_{l_k \neq 0} f(e_k)$.

Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы 3. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n)$ - вектор, не входящий в таблицы I и 2. Если $l = l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, то для l теорема доказана в силу лемм 8 и 9. Если $l \neq l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, то применим к l редукцию леммы 7. Мы получим вектор l' меньшей высоты, причем

$$f(l) > f(l'). \tag{6}$$

Если $l' = l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, то для l теорема доказана в силу (6) и лемм 8 и 9; если $l' \neq l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$ и l' не содержится в таблицах I и 2, то вектор l заменяем на вектор l' и к последнему снова применяем редукцию леммы 7. В конечное число таких шагов мы придем к вектору из таблиц I и 2 или к вектору $l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$.

Пусть l' один из векторов $l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 12)$, тогда в силу (6) и лемм 7, 8, 9 и I0

$$f(l) > \max_{l_k \neq 0} f(e_k). \tag{7}$$

Пусть l' один из векторов $l^{(i)}$ $(i = 13, \ldots, 18)$, а $l \neq l^{(j)}$ $(j = 13, \ldots, 18)$. Тогда в силу лемм 7 и I0

$$f(l) > \max_{l_k \neq 0} f(e_k). \tag{8}$$

Заметим, наконец, что если $l' \neq l^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 18)$, то в силу (6) и условий Минковского

$$f(l) > \max_{l_k \neq 0} f(e_k). \tag{9}$$

Теорема 3 доказана.

§ 5. Область приведения Минковского для $n \leqslant 6$.

Прежде чем доказать основной результат этого параграфа - теорему 4 - докажем следующее предложение.

Лемма I2. Пусть $n = 6$ и пусть положительно определенная форма f удовлетворяет условиям Минковского. Пусть $f(e_6) \geqslant f(e_i)$ для некоторого индекса $i \leqslant 5$. Тогда

$$f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) \geqslant \max_{k=1,\ldots,6} f(e_k) = f(e_m).$$

Доказательство. Имеем

а) при $m=6$

$$f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) = \sum_{j=1}^{4} \{f(e_{j,5,6}) - f(e_j)\} +$$

$$+ \{f(e_{1,2,3,4,5,6,6}) - f(e_5)\} + f(e_6);$$

б) при $m \leqslant 5$, $i < 5$

$$f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) = \sum_{j=1}^{4} \{f(e_{j,5,6}) - f(e_j)\} +$$

$$+ \{f(e_{i,5,6}) - f(e_5)\} + \{f(e_6) - f(e_i)\} + f(e_{1,2,3,4,5,6,6});$$

в) при $m \leqslant 4$, $i = 5$

$$f(e_{1,2,3,4,5,5,6,6,6}) = \sum_{j=1}^{4} \{f(e_{j,5,6}) - f(e_j)\} +$$

$$+ \{f(e_6) - f(e_5)\} + f(e_{1,2,3,4,5,6,6}).$$

В силу условий Минковского и условий леммы выражения в фигурных скобках неотрицательны; сумма других слагаемых не меньше, чем $\max\limits_{k=1,\dots,6} f(e_k)$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Необходимость условий теоремы очевидна, поскольку они включаются в условия определения области Минковского.

В силу теоремы 3 при доказательстве достаточности надо исследовать только векторы из таблиц I и 2 теоремы 3. В силу леммы I0 неравенства (I.2) для векторов, получаемых из $\ell^{(6)},\dots,\ell^{(12)}$ перестановками и изменениями знаков их координат, являются следствиями условий Минковского.

В силу леммы 7 неравенство (I.2) для векторов, получаемых из $\ell = e_{1,2,3,4,5,5} + m e_6$ при $m \geqslant 4$ перестановками и изменениями знаков его координат, являются следствиями условий Минковского.

Поэтому в силу леммы I2 из условий теоремы следуют неравенства (I.2) для любых $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$.

Для доказательства необходимости каждого из условий теоремы приведем внутренние формы этих граней.

Уравнение	Внутренняя форма
1. $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$	$f = \sum_{j=1}^{n} (1 + (j - \delta_{i+1,j})\mu) x_j^2$

2. $f\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_{i_j}e_{i_j}\right)=a_{i_k i_k}$ $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$ $k\geqslant 2\ ,\ \varepsilon_{i_j}=\pm 1$	$f=\sum_{j=1}^{n}(1+j\mu)x_j^2-$ $-\left(\frac{1}{k}+\frac{\sum_{j=1}^{k-1}i_j\mu}{(k-1)k}\right)\sum_{\substack{j,h=1\\ j\neq h}}^{k}\varepsilon_{i_j}\varepsilon_{i_h}x_{i_j}x_{i_h}$
3. $f\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_{i_j}e_{i_j}+\varepsilon_{i_p}e_{i_p}\right)=a_{i_t i_t}$ $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$ $k\geqslant 5\ ,\ p=1,\ldots,k$ $t=k-\delta_{p,k}$	$f=\sum_{j=1}^{n}(1+j\mu)x_j^2-$ $-\frac{k+2}{2(k-1)}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{k}\varepsilon_{i_j}\varepsilon_{i_p}x_{i_j}x_{i_p}-$ $-\mu\frac{\sum_{j=1}^{k-1}i_j+3i_p+\delta_{p,k}(i_k-i_{k-1})}{(k-2)(k-1)}\sum_{\substack{j,h=1\\ j\neq h,j\neq p\\ h\neq p}}^{k}\varepsilon_{i_j}\varepsilon_{i_h}x_{i_j}x_{i_h}$
4. $f\left(\sum_{i=1}^{6}\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_k e_k\right)=a_{pp}$ $1\leqslant j<k\leqslant 6$ $p=6-\delta_{6,k}-\delta_{5,j}$	$f=\sum_{i=1}^{6}(1+i\mu)x_i^2-\frac{11}{20}\varepsilon_j\varepsilon_k x_j x_k-$ $-\frac{11}{20}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j,\,i\neq k}}^{6}\varepsilon_i x_i(\varepsilon_j x_j+\varepsilon_k x_k)-$ $-\frac{9+3j+3k+\delta_{k,6}+\delta_{j,5}}{12}\mu\sum_{\substack{i,m=1\\ i\neq j\ m\neq j\\ i\neq k\ m\neq k\ i\neq m}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_m x_i x_m$
5. $f\left(3\varepsilon_1 e_1+\sum_{i=2}^{6}\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j\right)=a_{pp}$ $2\leqslant j\leqslant 6$ $p=6-\delta_{6,j}$	$f=x_1^2-\frac{6}{7}\sum_{i=2}^{6}\varepsilon_1\varepsilon_i x_1 x_i+$ $+\sum_{i=0}^{4}(1+\mu+\mu^2 i)x_{i+2}^2+$ $+\frac{1}{7}\sum_{\substack{i,k=2\\ i\neq j,\,i\neq k\\ k\neq j}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k-$ $-2\left(\frac{1}{7}+\frac{7}{16}\mu+\frac{3j+\delta_{j,6}}{16}\mu^2\right)\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j$

Во всех формах $\mu > 0$ достаточно малая величина, а $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Теорема 4 доказана.

§ 6. Однократная область приведения Минковского

Однократная область приведения Минковского выделяется из области приведения Минковского добавлением к условиям (I.2) неравенств

$$a_{i\,i+1} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{I}$$

Найдем все грани высшей размерности однократной области приведения Минковского при $n \leqslant 6$.

Теорема 5. Пусть $n \leqslant 6$. Для того, чтобы положительно определенная форма f принадлежала однократной области приведения Минковского, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям

I. $a_{i\,i+1} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$;

II. $a_{i+1\,i+1} \geqslant a_{ii} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$;

III. $f(\varepsilon_{i_1} e_{i_1} + \varepsilon_{i_2} e_{i_2}) \geqslant a_{i_2 i_2}$, $\quad 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$, $\delta_{i_1+1, i_2}\, \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \leqslant 0$;

IV. $f(\varepsilon_{i_1} e_{i_1} + \varepsilon_{i_2} e_{i_2} + \varepsilon_{i_3} e_{i_3}) \geqslant a_{i_3 i_3}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n$,

$\delta_{i_1+1, i_2} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \leqslant 0$, $\quad \delta_{i_2+1, i_3} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_3} \leqslant 0$;

V. $f(\varepsilon_{i_1} e_{i_1} + \varepsilon_{i_2} e_{i_2} + \varepsilon_{i_3} e_{i_3} + \varepsilon_{i_4} e_{i_4}) \geqslant a_{i_4 i_4}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n$,

$\delta_{i_1+2, i_3} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_3} (\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} + 1) \leqslant 0$, $\delta_{i_2+2, i_4} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_4} (\varepsilon_{i_3} \varepsilon_{i_4} + 1) \leqslant 0$;

VI. $f(\varepsilon_{i_1} e_{i_1} + \varepsilon_{i_2} e_{i_2} + \varepsilon_{i_3} e_{i_3} + \varepsilon_{i_4} e_{i_4} + \varepsilon_{i_5} e_{i_5}) \geqslant a_{i_5 i_5}$

$1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leqslant n$;

VII. $f(\varepsilon_{i_1}e_{i_1}+\varepsilon_{i_2}e_{i_2}+\varepsilon_{i_3}e_{i_3}+\varepsilon_{i_4}e_{i_4}+\varepsilon_{i_5}e_{i_5}+\varepsilon_{i_j}e_{i_j}) \geqslant a_{i_t i_t}$,

$1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant 5$, $t = 5 - \delta_{j,5}$,

$\sum_{k=1}^{5} \delta_{i_k+1, i_j} \varepsilon_{i_k} \varepsilon_{i_j} \leqslant 0$, $\sum_{k=1}^{5} \delta_{i_k-1, i_j} \varepsilon_{i_k} \varepsilon_{i_j} \leqslant 0$;

VIII. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6) \geqslant a_{66}$;

IX. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j) \geqslant a_{tt}$,

$1 \leqslant j \leqslant 6$, $t = 6 - \delta_{j,6}$, $\varepsilon_0 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon_7 = -\varepsilon_6$,

$\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1}) \leqslant 0$;

X. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_k e_k) \geqslant a_{tt}$,

$1 \leqslant j < k \leqslant 6$, $t = 6 - \delta_{k,6} - \delta_{j,5}$,

$\delta_{k,j+2}\varepsilon_{j+1}(\varepsilon_j+\varepsilon_k) + \delta_{k,j+1}\varepsilon_j\varepsilon_k \leqslant 0$;

XI. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_{j+1} e_{j+1}) \geqslant a_{66}$,

$1 \leqslant j \leqslant 4$, $-\varepsilon_{j-1} = \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} = -\varepsilon_{j+2}$, $\varepsilon_0 = -\varepsilon_1$;

XII. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+2\varepsilon_5 e_5+2\varepsilon_6 e_6) \geqslant a_{44}$,

$-\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4 \geqslant 0$;

XIII. $f(3\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j) \geqslant a_{tt}$,

$2 \leqslant j \leqslant 6$, $t = 6 - \delta_{j,6}$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\varepsilon_7 = -\varepsilon_6$, $\varepsilon_{j-1} = -\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$.

При этом берутся только те неравенства, которые имеют смысл для данного n. Каждое из перечисленных условий является необходимым для определения области приведения Минковского (т.е. задает ее истинную $(N-1)$-мерную грань).

Доказательство. Так как однократная область приведения содержится в области приведения Минковского (теорема 4), то нам достаточно выяснить, какие грани высшей размерности области приведения Минковского являются гранями однократной области приведения, а также показать, что

$$a_{i\,i+1}=0 \quad (i=1,\dots,n-1) \tag{2}$$

действительно являются ее гранями.

Результаты исследования приведены в виде таблицы 5. В первом столбце этой таблицы выписаны уравнения $(N-1)$-мерных граней классической области Минковского (теорема 4), дополненные уравнениями (2). Во втором столбце, если уравнение отвечает истинной $(N-1)$-мерной грани однократной области приведения, выписана внутренняя форма этой грани; в противном случае выписывается не менее двух граней однократной области, в пересечении которых лежат все точки этой области, удовлетворяющие уравнению первого столбца.

Таблица 5.

Уравнение	Внутренняя форма
1. $a_{i,i+1}=0$ $i=1,\dots,n-1$	$f=\sum_{j=0}^{n-1}(1+j\mu)x_{j+1}^2+\mu\sum_{j=1}^{n-1}x_j x_{j+1}-\mu x_i x_{i+1}$
2. $a_{ii}=a_{i+1\,i+1}$ $i=1,\dots,n-1$	$f=\sum_{j=0}^{n-1}(1+(j-\delta_{i+1,j})\mu)x_{j+1}^2+\mu\sum_{j=1}^{n-1}x_j x_{j+1}$
3. $f(\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j)=a_{jj}$ $1\le i<j\le n$ $\delta_{i+1,j}\varepsilon_i\varepsilon_j=1$	не представляет грани высшей размерности $a_{ii}=a_{i\,i+1}=\dots=a_{ij}=0$

4. $f(\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j)=a_{jj}$ $1\leqslant i<j\leqslant n$ $\delta_{i+1,j}\varepsilon_i\varepsilon_j<1$	$f=\sum_{k=0}^{n-1}(1+k\mu)x_{k+1}^2+\mu\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n}x_k x_m-$ $-(1+(i-1)\varepsilon_i\varepsilon_j)\mu)\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j$
5. $f(\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_k e_k)=$ $=a_{kk}$ $1\leqslant i<j<k\leqslant n$ $\delta_{i+1,j}(1+\varepsilon_i\varepsilon_j)+$ $+\delta_{j+1,k}(1+\varepsilon_j\varepsilon_k)\geqslant 2$	не представляет грани высшей размерности $f(\varepsilon_i e_i+\varepsilon_k e_k)=a_{kk}$ $a_{ij}=0$, если $\delta_{i+1,j}\varepsilon_i\varepsilon_j=1$ $a_{jk}=0$, если $\delta_{j+1k}\varepsilon_j\varepsilon_k=1$
6. $f(\varepsilon_i e_i+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_k e_k)=$ $=a_{kk}$ $1\leqslant i<j<k\leqslant n$ $\delta_{i+1,j}(1+\varepsilon_i\varepsilon_j)+$ $+\delta_{j+1,k}(1+\varepsilon_j\varepsilon_k)=0$	$f=\sum_{m=0}^{n-1}(1+m\mu)x_{m+1}^2+\mu\sum_{\substack{m,p=1\\ m\neq p}}^{n}x_m x_p-$ $-2\mu(x_i x_j+x_i x_k+x_j x_k)-$ $-\frac{2+(i+j-2)\mu}{3}(\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j+\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k+\varepsilon_j\varepsilon_k x_j x_k)$
7. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+$ $+\varepsilon_t e_t)=a_{tt}$ $1\leqslant j<r<s<t\leqslant n$ $(\delta_{j+1,r}(1+\varepsilon_j\varepsilon_r)+$ $+\delta_{s+1,t}(1+\varepsilon_s\varepsilon_t))\times$ $\times\,\delta_{r+1,s}\varepsilon_r\varepsilon_s\geqslant 2$	не представляет грани высшей размерности $a_{jr}=a_{rs}=0$, $a_{rr}+2\varepsilon_r\varepsilon_t a_{rt}=0$, $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_s e_s+\varepsilon_t e_t)=a_{tt}$, если $\delta_{r+1,s}\varepsilon_r\varepsilon_s\delta_{j+1,r}(1+\varepsilon_j\varepsilon_r)=2$ $a_{rs}=a_{st}=0$, $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_s e_s)=a_{ss}$. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_t e_t)=a_{tt}$, если $\delta_{r+1,s}\varepsilon_r\varepsilon_s\delta_{s+1,t}(1+\varepsilon_r\varepsilon_t)=2$

8. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+\varepsilon_t e_t)=$ $=a_{tt}$ $(\delta_{j+1,r}(1+\varepsilon_r\varepsilon_j)+$ $+\delta_{s+1,t}(1+\varepsilon_s\varepsilon_t))\times$ $\times\delta_{r+1,s}\varepsilon_r\varepsilon_s\leqslant 0$ $1\leqslant j<r<s<t\leqslant n$	$f=\sum_{i=0}^{n-1}(1+i\mu)x_{i+1}^2+\mu\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n}x_i x_k-$ $-\mu\sum_{\substack{i,k=j,r,s,t\\ i\neq k}}x_i x_k-\frac{\varepsilon_r\varepsilon_s+1}{2}\delta_{r+1,s}\Big[-\frac{3+(j+r+s-1)}{5}\times$ $\times\mu\{\varepsilon_j\varepsilon_r x_j x_r+\varepsilon_s\varepsilon_t x_s x_t+\varepsilon_j\varepsilon_s x_j x_s+\varepsilon_j\varepsilon_t x_j x_t+$ $+\varepsilon_r\varepsilon_t x_r x_t\}+2\mu x_r x_s\Big]+\Big[1-\frac{\varepsilon_r\varepsilon_s+1}{2}\delta_{r+1,s}\Big]\times$ $\times\Big[2\mu(x_j x_r+x_s x_t)-\frac{3+(j+r+s-3+2\varepsilon_j\varepsilon_r+2\varepsilon_s\varepsilon_t)\mu}{4}\times$ $\times\{\varepsilon_r\varepsilon_s x_r x_s+\varepsilon_j\varepsilon_s x_j x_s+\varepsilon_j\varepsilon_t x_j x_t+\varepsilon_r\varepsilon_t x_r x_t\}\Big]$
9. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+$ $+\varepsilon_t e_t+\varepsilon_v e_v)=a_{vv}$ $1\leqslant j<r<s<t<v\leqslant n$	$f=\sum_{i=0}^{n-1}(1+i\mu)x_{i+1}^2+\mu\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n}x_i x_k-$ $-\mu\sum_{\substack{i,k=j,r,s,t,v\\ i\neq k}}x_i x_k+\mu(x_j x_r+x_r x_s+x_s x_t+x_t x_v)-$ $-(1-\mu)(\varepsilon_j\varepsilon_s x_j x_s+\varepsilon_r\varepsilon_t x_r x_t+\varepsilon_s\varepsilon_v x_s x_v)-$ $-3\mu\varepsilon_i\varepsilon_v x_j x_v-$ $-\frac{1+\mu(j+r+s+t-4+\varepsilon_j\varepsilon_r+\varepsilon_r\varepsilon_s+\varepsilon_s\varepsilon_t+\varepsilon_t\varepsilon_v)}{2}\times$ $\times[\varepsilon_j\varepsilon_t x_j x_t+\varepsilon_r\varepsilon_v x_r x_v].$
10. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+$ $+\varepsilon_t e_t+2\varepsilon_v e_v)=a_{tt}$ $1\leqslant j<r<s<t\leqslant n$ $1\leqslant v\leqslant n$ $v\neq j, v\neq r, v\neq s, v\neq t$ существует i $(i=j,r,s,t)$, такое что $\lvert v-i\rvert\varepsilon_i\varepsilon_v=1$	не представляет грани высшей размерности $a_{iv}=0$ $f(\varepsilon_k e_k+\varepsilon_v e_v)=a_{kk}$ $k=j,r,s,t$, $k\neq i$ $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+\varepsilon_t e_t+\varepsilon_v e_v)=a_{\rho\rho}$ $\rho=\begin{cases} t, & t>v\\ v, & v>t\end{cases}$

11. $f(\varepsilon_j e_j+\varepsilon_r e_r+\varepsilon_s e_s+\varepsilon_t e_t+$ $+2\varepsilon_v e_v)=a_{tt}$ $1\leqslant j<r<s<t\leqslant n, 1\leqslant v\leqslant n$ $\sum\limits_{i=j,r,s,t}\delta_{i,v}=0$ $\sum\limits_{i=j,r,s,t}(1+\varepsilon_i\varepsilon_v)(\delta_{i+1,v}+\delta_{i-1,v})\leqslant 0$	$f=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1+i\mu)x_{i+1}^2+\mu\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n}x_i x_k-$ $-2\mu x_v(x_j+x_s+x_r+x_t)-$ $-\dfrac{7+(4v+j+r+s-7+\sum\limits_{\substack{i,k=j,r,s,t\\ i\neq k}}\varepsilon_i\varepsilon_k)\mu}{8}\times$ $\times\sum\limits_{i=j,r,s,t}\varepsilon_i\varepsilon_v x_i x_v.$
12. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+$ $+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6)=a_{66}$	$f=\sum\limits_{i=0}^{5}(1+i\mu)x_{i+1}^2+2\mu\sum\limits_{i=1}^{5}x_i x_{i+1}-$ $-\dfrac{5+(10+2\sum\limits_{i=1}^{5}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})\mu}{10}\sum\limits_{1\leqslant i<k-1\leqslant 5}\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k$
13. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+$ $+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j)=a_{66}$ $2\leqslant j\leqslant 5$ $\varepsilon_{j-1}=\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1}$	не представляет грани высшей размерности $a_{j-1,j}=a_{j,j+1}=0$ $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6)=a_{66}$
14. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+$ $+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j)=a_{pp}$ $1\leqslant j\leqslant 6$ $p=\begin{cases}5, & j=6\\ 6, & j<6\end{cases}$ $\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1})\leqslant 0$	$f=\sum\limits_{i=0}^{5}(1+i\mu)x_{i+1}^2+2\mu\sum\limits_{i=1}^{5}x_1 x_{i+1}+$ $+\dfrac{\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1})}{2}\Big\{\dfrac{4}{5}\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j+$ $+2\mu(x_{j-1}+x_{j+1})x_j+$ $-\dfrac{10+3(j-1)+\delta_{j,n}+\sum\limits_{\substack{i=1\\ \lvert i-j+\frac{1}{2}\rvert>\frac{1}{2}}}^{5}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}}{12}\mu\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i\neq j,k\neq j\\ \lvert i-k\rvert>1}}\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k\Big\}-$ $-\Big(1+\dfrac{\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1})}{2}\Big)\sum\limits_{s=j-1,j+1}\dfrac{\varepsilon_j\varepsilon_s+1}{2}\times$

$\varepsilon_0=-\varepsilon_1,\ \varepsilon_7=-\varepsilon_6$ $x_0=0\ ,\ x_7=0$	$\times\Big(\frac{55}{64}\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j,\, i\neq s}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j+\frac{3}{8}\sum\limits_{\substack{i=1\\ \lvert i-s\rvert>1}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_s x_i x_s+$ $+\frac{10+3(j-1)+\delta_{j,6}+2\sum\limits_{i=1}^{5}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}}{6}\mu\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i\neq j,\, i\neq s\\ k\neq j,\, k\neq s\\ \lvert i-k\rvert>1}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k\Big)$
15. $f(\varepsilon_1e_1+\varepsilon_2e_2+\varepsilon_3e_3+\varepsilon_4e_4+$ $+\varepsilon_5e_5+\varepsilon_6e_6+\varepsilon_je_j+\varepsilon_ke_k)=$ $=a_{pp}$ $1\leqslant j<k\leqslant 6$ $p=\begin{cases}6\ , & k\leqslant 5\\ 5\ , & j<5,\ k=6\\ 4\ , & j=5,\ k=6\end{cases}$ $\delta_{k,j+2}(\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}+\varepsilon_{j+1}\varepsilon_k)+$ $+\delta_{k,j+1}\varepsilon_j\varepsilon_k\leqslant 0$ $t=\begin{cases}6, & k\leqslant 4\\ 3, & k\geqslant 5\end{cases}\quad s=\begin{cases}4, & j\leqslant 2\\ 1, & j\geqslant 3\end{cases}$ $q\equiv j+4\,(\mathrm{mod}\,6)\quad r\equiv q-1\,(\mathrm{mod}\,6)$ $1\leqslant q,\ r\leqslant 6$	$f=\sum\limits_{i=0}^{5}(1+i\mu)x_{i+1}^2+2\mu\sum\limits_{i=1}^{5}x_i x_{i+1}-$ $-\frac{11}{12}\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ \lvert i-j\rvert>1}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j+\sum\limits_{\substack{i=1\\ \lvert i-k\rvert>1\\ i\neq j}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_k x_i x_k\Big)+$ $+\frac{11}{12}\Big(\delta_{1,j}\varepsilon_j\varepsilon_t x_j x_t+\delta_{k,6}\varepsilon_k\varepsilon_s x_k x_s\Big)-$ $-\frac{4+3(j+k)+\delta_{j,5}+\delta_{k,6}+2\sum\limits_{i=1}^{5}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}+2\delta_{j+1,k}\varepsilon_j\varepsilon_k+2\sum\limits_{i=j,k}\varepsilon_i(\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_{i+1})}{5-\delta_{1,j}-\delta_{6,k}-\delta_{j+1,k}}\times$ $\times\,\mu\sum\limits_{\substack{1\leqslant i<m-1\leqslant 5\\ i\neq k,\, i\neq j\\ m\neq k,\, m\neq j}}\varepsilon_i\varepsilon_m x_i x_m+$ $+\delta_{k-2,j}\Big\{\frac{\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}-1}{2}\cdot\frac{11}{12}\varepsilon_j x_j(\varepsilon_{j+1}x_{j+1}-\varepsilon_q x_q)+$ $+\Big(1+\frac{\varepsilon_i\varepsilon_{j+1}-1)}{2}\Big)\Big(-\frac{11}{12}\varepsilon_{j+2}x_{j+2}\Big)\Big(\varepsilon_{j+1}x_{j+1}-\varepsilon_q x_q\Big)\Big\}+$ $+\delta_{k-1,j}\frac{11}{12}\Big(-\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}x_j x_{j+1}+\varepsilon_j\varepsilon_q x_j x_q+\varepsilon_{j+1}\varepsilon_r x_{j+1}x_r\Big).$
16. $f(\varepsilon_1e_1+\varepsilon_2e_2+\varepsilon_3e_3+\varepsilon_4e_4+$ $+\varepsilon_5e_5+\varepsilon_6e_6+\varepsilon_je_j+\varepsilon_{j+2}e_{j+2})=$ $=a_{pp}$ $1\leqslant j\leqslant 4\ ,\ p=6-\delta_{6,j+2}$ $\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1}=\varepsilon_{j+2}$	не представляет грани высшей размерности $a_{j,j+1}=a_{j+1,j+2}=0$

17. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+$ $+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_{j+1} e_{j+1})=a_{pp}$ $1\leqslant j\leqslant 5,\ p=6-2\delta_{6,j+1}$ $\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+2})\geqslant 0$ $\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1},\ \varepsilon_6=-\varepsilon_1,\ \varepsilon_7=-\varepsilon_6$	не представляет грани высшей размерности $a_{j,j+1}=0$ $a_{j-1,j}=0$, если $\varepsilon_{j-1}\ \varepsilon_j=1$ $a_{j+1,j+2}=0$, если $\varepsilon_{j+2}\ \varepsilon_j=1$
18. $f(\varepsilon_1 e_1-\varepsilon_1 e_2+e_3-e_4+$ $+2e_5+2e_6)=a_{44}$	не представляет грани высшей размерности $a_{11}=a_{22}\qquad a_{22}=a_{33}$
19. $f(2\varepsilon_1 e_1+2\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+$ $+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6)=a_{66}$ $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\varepsilon_3$	$f=(1+\mu)x_1^2+(1+2\mu)x_2^2+\mu x_1x_2-$ $-\sum_{i=3}^{6}\varepsilon_i x_i(\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2)+\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{8}{3}+i\mu\right)x_{i+3}^2+$ $+\mu\sum_{i=3}^{5}x_ix_{i+1}-\frac{19+(\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_4\varepsilon_5+\varepsilon_5\varepsilon_6)}{6}\mu\ \times$ $\times(\varepsilon_3\varepsilon_5x_3x_5+\varepsilon_3\varepsilon_6x_3x_6+\varepsilon_4\varepsilon_6x_4x_6)$
20. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+2\varepsilon_3 e_3+2\varepsilon_4 e_4+$ $+2\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6)=a_{66}$ $-\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=-\varepsilon_5$	$f=\sum_{i=1}^{6}(1+i\mu^2)x_i^2+\mu^2(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)-$ $-\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu}{2}\right)(\varepsilon_3x_3+\varepsilon_4x_4)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 3,4}}^{6}\varepsilon_ix_i+$ $+\left(\frac{1}{4}+2\mu-\frac{36+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_5\varepsilon_6}{4}\mu^2\right)\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_ix_i(\varepsilon_5x_5+\varepsilon_6x_6)$
21. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+\varepsilon_4 e_4+$ $+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j+\varepsilon_{j+1} e_{j+1})=a_{66}$ $j=2,4$	$f=\sum_{i=1}^{6}(1+i\mu^2)x_i^2+\mu^2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j-1,\,j+1}}^{5}x_ix_{i+1}-$ $-\frac{2}{3}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j,\,j+1}}^{6}\varepsilon_ix_i(\varepsilon_jx_j+\varepsilon_{j+1}x_{j+1})+$

$-\varepsilon_{j-1}=\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1}=-\varepsilon_{j+2}$ $t=\begin{cases}1, & j=2\\ 6, & j=4\end{cases}$ $(b,v)=\begin{cases}(4,6), & j=2\\ (3,1), & j=4\end{cases}$	$+\frac{1}{3}\sum_{i=2;4}\delta_{i,j}\Big\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{6}\varepsilon_k\varepsilon_t x_k x_t-2\varepsilon_t\varepsilon_j x_t x_j-$ $-2\varepsilon_t\varepsilon_{j+1}x_t x_{j+1}\Big\}+$ $+(2\mu-(22+6j+\sum_{\substack{i=1\\\lvert i-j\rvert>1}}^{5}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})\mu^2)\varepsilon_b\varepsilon_v x_b x_v-$ $-\frac{\mu}{2}\varepsilon_v x_v(\varepsilon_j x_j+\varepsilon_{j+1}x_{j+1})$
22. $f(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\varepsilon_3 e_3+$ $+\varepsilon_4 e_4+2\varepsilon_5 e_5+2\varepsilon_6 e_6)=a_{44}$ $-\varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6$ $\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4=0$ $j=\begin{cases}1, & \varepsilon_1\varepsilon_2=1\\ 4, & \varepsilon_1\varepsilon_2=-1\end{cases}$ $(b,v)=\begin{cases}(4,2), & j=1\\ (3,1), & j=4\end{cases}$	$f=\sum_{i=1}^{6}(1+i\mu^2)x_i^2+\mu^2\sum_{\substack{i=1\\i\neq 1}}^{5}x_i x_{i+1}-$ $-\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i x_i(\varepsilon_5 x_5+\varepsilon_6 x_6)+$ $+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{4}\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j-\varepsilon_j x_j(\varepsilon_5 x_5+\varepsilon_6 x_6)+$ $+(2\mu-(54+\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})\mu^2)\varepsilon_b\varepsilon_v x_b x_v-$ $-\frac{\mu}{2}\varepsilon_v x_v(\varepsilon_5 x_5+\varepsilon_6 x_6)$
23. $f(3e_1+e_2+\varepsilon_3 e_3+$ $+\varepsilon_4 e_4+\varepsilon_5 e_5+\varepsilon_6 e_6+\varepsilon_j e_j)=$ $=a_{pp}$ $2\leqslant j\leqslant 6$ $p=6-\delta_{j,6}$	не представляет грани высшей размерности $a_{12}=0$ $a_{11}+2\varepsilon_3 a_{13}=0$

24. $f(3e_1-e_2+\varepsilon_3e_3+\varepsilon_4e_4+$ $+\varepsilon_5e_5+\varepsilon_6e_6+\varepsilon_je_j)=a_{pp}$ $2\leqslant j\leqslant 6$ $p=6-\delta_{6,j}$ $\varepsilon_j(\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1})\geqslant 0$ $k\neq j-1,j,j+1,1$	не представляет грани высшей размерности $f(2e_1-e_2+\varepsilon_3e_3+\varepsilon_4e_4+\varepsilon_5e_5+\varepsilon_6e_6)=a_{66}$ $f(e_1+\varepsilon_je_j+\varepsilon_ke_k)=a_{kk}$
25. $f(3e_1-e_2+\varepsilon_3e_3+$ $+\varepsilon_4e_4+\varepsilon_5e_5+\varepsilon_6e_6+\varepsilon_je_j)=$ $=a_{pp}$ $2\leqslant j\leqslant 6$ $p=6-\delta_{6,j}$ $\varepsilon_{j-1}=-\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1}$	$f=\mu x_1^2-\frac{8}{9}\mu\sum_{i=2}^{6}\varepsilon_i x_1x_i+$ $+\sum_{i=1}^{5}(1+i\mu)x_{i+1}^2+\mu\sum_{\substack{i,k=2\\ i\neq k}}^{6}x_ix_k-$ $-2\mu\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{6}x_ix_j-$ $-\frac{7+(3+3j+\delta_{j,n}+\sum_{\substack{i,k=2\\ i\neq k,i\neq j,k\neq j}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_k)\mu}{8}\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{6}\varepsilon_i\varepsilon_jx_ix_j$

Однократная область приведения Минковского вместе с эквивалентными ей областями заполняет конус положительности без просветов и наложений по внутренним точкам – дает разбиение конуса положительности. Неожиданным оказался тот факт, что при $n\geqslant 3$ это разбиение не нормально, т.е. некоторые области разбиения соприкасаются не по целым граням высшей размерности.

<u>Теорема 6</u>. Пусть $n\geqslant 3$. Тогда разбиение конуса положительности на области, эквивалентные однократной области приведения Минковского, не является нормальным.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим грань $a_{11}=a_{22}$ однократной области Минковского $\mathfrak{M}_0$. Область $\mathfrak{M}_0$ соприкасается по

$(N-1)=\left(\frac{n(n+1}{2}-1\right)$ -мерным кускам этой грани с двумя эквивалентными ей областями $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_0\tilde{S}_1$, $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_0\tilde{S}_2$, причем

$$S_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&I_{n-2}\end{pmatrix},\qquad S_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-I_{n-2}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{S}$ - линейное преобразование в пространстве коэффициентов R^N, индуцированное матрицей S; I_{n-2} единичная матрица порядка $n-2$.

$\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ соприкасаются по части $a_{13}\geqslant 0$ и $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_2$ соприкасаются по части $a_{13}\leqslant 0$ грани $a_{11}=a_{22}$.

Теорема 6 доказана.

Заметим, что при $n=3$ нормальность нарушается еще в гранях $a_{22}=a_{33}$, $a_{11}-2a_{12}=0$, $a_{11}-2a_{13}=0$, $a_{11}+2a_{13}=0$ области $\mathfrak{M}_0$.

Теорема 6 означает, что при $n\geqslant 3$ однократная область приведения Минковского не является областью приведения Венкова V_φ какую бы форму φ мы ни взяли.

§ 7. Эквивалентность приведенных квадратичных форм

Пусть f - форма, приведенная по Эрмиту, и пусть S - целочисленная унимодулярная матрица. Тогда по определению приведения по Эрмиту, для того, чтобы fS была приведена по Эрмиту, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(s_{i1},\dots,s_{in})=a_{ii}\quad(i=1,\dots,n).$$

Поэтому если для некоторой формы f и целочисленной унимодулярной матрицы S при некотором $k=1,\dots,n$

$$f(s_{i1},\dots,s_{in})=a_{ii}\quad(i=1,\dots,k-1)$$

и

$$f(s_{k1},\dots,s_{kn})<a_{kk},$$

то форма f не приведена по Эрмиту.

Доказательство теоремы 7. Используем обозначения § I (см. определение $\mathfrak{Z}_i(f)$). Пусть $f=(a_{ij})$, $g=(b_{ij})$ и пусть теорема доказана для $j\leqslant k-1$. Предположим, что она не верна для $j=k$. Тогда существует целый вектор $(l_1,\dots,l_n)$ и при $k>1$ матрица

$$\begin{pmatrix}l_1^{(i_1)}&\dots&l_1^{(i_{k-1})}\\ \dots&\dots&\dots\\ l_n^{(i_1)}&\dots&l_n^{(i_{k-1})}\end{pmatrix}\in\mathfrak{Z}_{k-1}(f)=\mathfrak{Z}_{k-1}(g)$$

так что

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} & \dots & l_1^{(i_{k-1})} & l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n^{(i_1)} & \dots & l_n^{(i_{k-1})} & l_n \end{pmatrix}$$

– примитивная матрица, причем

$$f(l_1, \dots, l_n) = a_{kk}, \qquad (I)$$

$$g(l_1, \dots, l_n) \neq b_{kk}. \qquad (2)$$

Так как f – внутренняя точка грани Γ, а (I) – плоскость, в которой в силу (2) грань Γ не лежит, то для некоторой формы $f' \in \Gamma$

$$f'(l_1, \dots, l_n) < a'_{kk}.$$

Поэтому форма f' не приведена по Эрмиту, что противоречит предположению.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8 непосредственно следует из определения $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ и замечания, сделанного в начале параграфа.

Доказательство теоремы 9. В теореме 3 нами были найдены все векторы $(l_1, \dots, l_n)$, которые могут удовлетворять условию

$$f(l_1, \dots, l_n) \leqslant \max_{l_i \neq 0} f(e_i)$$

для форм f, приведенных по Эрмиту-Минковскому. Поэтому все векторы $(l_1^{(i_1)}, \dots, l_n^{(i_1)})$, для которых

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} \\ \vdots \\ l_n^{(i_1)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z}_1(\Gamma),$$

являются строками таблиц I и 2.

Пусть теорема доказана для $j < k$. Если для всех форм $a_{kk} = a_{k-1\ k-1}$, то векторы $(l_1^{(i_k)}, \dots, l_n^{(i_k)})$, для которых

$$\begin{pmatrix} l_1^{(i_1)} & \dots & l_1^{(i_{k-1})} & l_1^{(i_k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n^{(i_1)} & \dots & l_n^{(i_{k-1})} & l_n^{(i_k)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z}_k(\Gamma),$$

являются частью векторов $(l_1^{(i_{k-1})}, \dots, l_n^{(i_{k-1})})$ и поэтому являются строками таблиц I и 2. Поскольку все векторы $(l_1, \dots, l_n)$, у которых $l_k \neq 0$ и $f(l_1, \dots, l_n) \leqslant a_{kk}$, описаны в таблицах I и 2. Будем рассматривать случай, когда в грани Γ имеет место неравенство $a_{kk} > a_{k-1\ k-1}$ и у вектора $(l_i^{(i_k)}, \dots, l_n^{(i_k)})$, для которого

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_1)} & \dots & \ell_1^{(i_k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_n^{(i_1)} & \dots & \ell_n^{(i_k)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z}_k(\Gamma),$$

$\ell_k^{(i_k)} = 0$. Тогда в силу определения области приведения Эрмита-Минковского и лемм I0 и I2

$$\ell_p^{(i_j)} \equiv 0 \pmod 2 \qquad j<k\,,\ p \geqslant k\,.$$

Поэтому из примитивности матрицы

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_1)} & \dots & \ell_1^{(i_{k-1})} & \ell_1^{(i_k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_n^{(i_1)} & \dots & \ell_n^{(i_{k-1})} & \ell_n^{(i_k)} \end{pmatrix}$$

выводим: $\ell_\tau^{(i_k)} \equiv 0 \pmod 2$ при $\tau > k$. Так как

$$a_{kk} = f(\ell_1^{(i_k)}, \dots, \ell_n^{(i_k)}) \leqslant f(e_\tau) \leqslant \max_{\ell_t^{(i_k)} \neq 0} f(e_t),$$

то отсюда выводим, что $(\ell_1^{(i_k)}, \dots, \ell_n^{(i_k)})$ принадлежит таблице I или 2.

Докажем, наконец, что из таблицы 2 строка $(1,1,1,1,2,m)$ с $m \geqslant 4$ не может входить в преобразования эквивалентности. Для форм, приведенных по Эрмиту-Минковскому,

$$f(\varepsilon_i e_i + \varepsilon_j e_j + \varepsilon_k e_k + \varepsilon_\ell e_\ell + 2\varepsilon_p e_p + m\varepsilon_\tau e_\tau) > \max_{t=1,\dots,6} a_{tt}\,,$$

кроме, быть может, случая $\tau = 1$ и $p = 6$. Ибо

$$\begin{aligned} & f(\varepsilon_i e_i + \varepsilon_j e_j + \varepsilon_k e_k + \varepsilon_\ell e_\ell + 2\varepsilon_p e_p + m\varepsilon_\tau e_\tau) = \\ & = f(\varepsilon_i e_i + \varepsilon_j e_j + \varepsilon_k e_k + \varepsilon_\ell e_\ell + 2\varepsilon_p e_p + 3\varepsilon_\tau e_\tau) + \\ & + (m-3)^2 f(e_\tau) + (m-3) \sum_{h=i,j,k,\ell,p,p} \{ f(\varepsilon_h e_h + \varepsilon_\tau e_\tau) - f(e_h) \}. \end{aligned} \tag{3}$$

(см. лемму I2). В силу условий приведения по Минковскому, леммы I2 и (3) имеем, что

$$f(m\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3 + \varepsilon_4 e_4 + \varepsilon_5 e_5 + 2\varepsilon_6 e_6) > a_{55}\,. \tag{4}$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} m\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

входит в преобразование эквивалентности приведенных форм как последний столбец матрицы. Тогда из требования унимодулярности следует, что хотя бы один из $\ell_6^{(i_k)} \not\equiv 0 \pmod 2$. Отсюда (теорема 3) следует, что

$$a_{55} \geqslant a_{66}.$$

Но это противоречит (4).

Теорема доказана.

Эта теорема вместе с таблицами I и 2 позволяет предложить следующий алгорифм нахождения множеств $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ унимодулярных матриц, переводящих приведенные формы $f \in \Gamma$ в приведенные же формы. Условия (9) и (I0) § I в определении $\mathfrak{Z}(\Gamma)$ равносильны тому, что грань Γ лежит в плоскости

$$f(\ell_1^{(i_k)}, \ldots, \ell_n^{(i_k)}) = a_{kk}. \tag{5}$$

В теореме 9 указываются все возможные столбцы

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_k)} \\ \vdots \\ \ell_n^{(i_k)} \end{pmatrix}$$

матриц из $\mathfrak{Z}(\Gamma)$.

Пусть нами построена $\mathfrak{Z}_{k-1}(\Gamma)$. Тогда для построения $\mathfrak{Z}_k(\Gamma)$ из возможного набора векторов (таблиц I и 2, без строки $(1,1,1,1,2,m)$) выберем вектор $(\ell_1^{(i_k)}, \ldots, \ell_n^{(i_k)})$, для которого выполнено (5). Каждую из матриц $\mathfrak{Z}_{k-1}(\Gamma)$ дополняем каждым из этих векторов. Среди полученных матриц отбираем примитивные. Они составят множество $\mathfrak{Z}_k(\Gamma)$.

Продолжая этот процесс, найдем искомое множество $\mathfrak{Z}(\Gamma) = \mathfrak{Z}_n(\Gamma)$.

Пусть Γ – грань однократной области приведения Эрмита размерности d $(1 \leqslant d \leqslant N)$. Рассмотрим форму $f \in \Gamma$; обозначим через $\mathfrak{Z}_1^{(0)}(f)$ набор всех целочисленных векторов

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_1)} \\ \vdots \\ \ell_n^{(i_1)} \end{pmatrix},$$

для которых

$$f(\ell_1^{(i_1)}, \ldots, \ell_n^{(i_1)}) = a_{11};$$

пусть k – индекс, $2 \leqslant k \leqslant n$, обозначим через $\mathfrak{Z}_k^{(0)}(f)$ набор всех целочисленных примитивных матриц

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_1)} & \ldots & \ell_1^{(i_{k-1})} & \ell_1^{(i_k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ell_n^{(i_1)} & \ldots & \ell_n^{(i_{k-1})} & \ell_n^{(i_k)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(i_1)} & \dots & \ell_1^{(i_{k-1})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_n^{(i_1)} & \dots & \ell_n^{(i_{k-1})} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z}^{(0)}_{k-1}(f),$$

$$f(\ell_1^{(i_k)}, \dots, \ell_n^{(i_k)}) = a_{kk}$$

и

$$f(\ell_1^{(i_{k-1})}, \dots, \ell_n^{(i_{k-1})}; \ell_1^{(i_k)}, \dots, \ell_n^{(i_k)}) \geqslant 0.$$

$\mathfrak{Z}^{(0)}_n(f)$ обозначим через $\mathfrak{Z}^{(0)}(f)$.

$\mathfrak{Z}^{(0)}(f)$ является совокупностью всех преобразований формы f в формы f' , принадлежащие однократной области приведения Эрмита. Ясно, что если на f смотреть как на форму из классической области приведения Эрмита, скажем $f \in \Gamma$, где Γ - грань классической области Эрмита размерности d $(1 \leqslant d \leqslant N)$, то $\mathfrak{Z}^{(0)}(f) \subset \mathfrak{Z}(\Gamma)$.

Внутренние точки однократной области приведения имеют только тривиальные преобразования в формы, лежащие в однократной области приведения - автоморфизмы $\pm I$, где I - тождественное преобразование. Действительно, пусть $f = (a_{ij}) \in \Gamma_0$ - внутренняя форма однократной области приведения Эрмита. $f' = (a'_{ij})$ - эквивалентная f форма из однократной области приведения Эрмита. $\mathfrak{Z}^{(0)}(f)$ содержится среди матриц, преобразующих внутренние точки классической области приведения Эрмита в точки классической области приведения Эрмита, т.е. в силу теоремы 8 среди матриц вида

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Но так как $a_{i\,i+1} > 0$, $a'_{i\,i+1} \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \pm 1$ и $\mathfrak{Z}^{(0)}(f) = \{\pm I\}$.

Пусть Γ - грань однократной области приведения Эрмита размерности $d (1 \leqslant d \leqslant N)$ и пусть $g \in \Gamma$. Рассмотрим разбиение Γ плоскостями

$$f(s_{i1}, \dots, s_{in}; s_{i+1,1}, \dots, s_{i+1,n}) = 0, \ (i = 1, \dots, n-1), \tag{6}$$

где $S = (s_{ij}) \in \mathfrak{Z}^{(0)}(g)$. Мы получим разбиения

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_k,$$

причем Γ_k - части Γ разных размерностей, открытые в соответствующем подпространстве.

Пусть точки $f, g \in \Gamma_k$, тогда $\mathcal{L}^{(0)}(f) = \mathcal{L}^{(0)}(g)$, иначе существовала бы плоскость (6), разделяющая эти точки. Так, что снова можно говорить, что $\mathcal{L}^{(0)}(\Gamma_k) = \mathcal{L}^{(0)}(f)$, если $f \in \Gamma_k$.

Конечность этого разбиения, как и конечность $\mathcal{L}(\Gamma)$, следует из теоремы Минковского [9] об ограниченности $|s_{ik}| < C$ для преобразований $S = (s_{ij})$ области приведения Минковского в эквивалентные области, имеющие общие точки с областью приведения Минковского, не лежащие на границе конуса положительности.

Элементы разбиений всех граней объединим в одно конечное множество $L = \{\Gamma_i\}_{i=0}^{M}$ (упорядочив их как либо). Учитывая определение Γ_i и то, что точки граней классической области приведения Эрмита могут быть эквивалентны только точкам граней классической области приведения Эрмита той же размерности, получим, что Γ_i либо эквивалентна Γ_j $(j \neq i;\ j = 0, \ldots, M)$, либо не имеет эквивалентных точек с Γ_j $(j \neq i;\ j = 0, \ldots, M)$.

Однократная область приведения может послужить основой для построения фундаментальной области $\mathcal{F}$ приведения положительных квадратичных форм, т.е. такой совокупности форм, что любая положительно определенная форма эквивалентна одной и только одной форме из фундаментальной области Так как фундаментальную область мы будем выделять в гранях однократной области приведения Эрмита при помощи линейных неравенств, то определение граней фундаментальной области аналогично определению граней однократной области приведения Эрмита.

Опишем алгорифм нахождения фундаментальной области. Пусть нам дано разбиение $L = \{\Gamma_i\}_{i=0}^{M}$ всех граней однократной области приведения Эрмита (см.выше; здесь Γ_0 - внутренность однократной области приведения Эрмита). Множество $\mathcal{F}$ строим как объединение $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{M} \mathcal{F}_i$ некоторых подмножеств $\mathcal{F}_i = \bigcup_p \Gamma_i^{(p)}$ однократной области приведения Эрмита, где $\Gamma_i^{(p)}$ некоторые части множества Γ_i. В качестве $\mathcal{F}_0$ берем Γ_0 внутренность однократной области Эрмита. Пусть мы построили $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}$. Строим $\mathcal{F}_k$ $(k = 0, \ldots, M)$. Рассмотрим Γ_k; возможны следующие три случая:

а) Γ_k эквивалентно одному из Γ_j, $j < k$; тогда полагаем $\mathcal{F}_k = \emptyset$, где $\emptyset$ пустое множество;

б) Γ_k не эквивалентно ни одному из Γ_j, $j < k$ и все преобразования Γ_k в себя являются автоморфизмами всех форм из Γ_k; тогда полагаем $\mathcal{F}_k = \Gamma_k$;

в) Γ_k не эквивалентно ни одному из Γ_j, $j < k$, но среди преобразований Γ_k в себя есть преобразования $S = (s_{ij})$, которые не являются автоморфизмами для всех форм из Γ_k; этот случай рассмотрим особо.

Пусть $S^{(t)} = (S_{ij}^{(t)})$ $(t = 1, \ldots, r)$ все преобразования, о которых шла речь в п.в). Рассмотрим разбиение Γ_k плоскостями

$$f(s_{i1}^{(t)}, \ldots, s_{in}^{(t)}; s_{j1}^{(t)}, \ldots, s_{jn}^{(t)}) = a_{ij} \tag{7}$$

$$(t = 1, \ldots, r; \; i, j = 1, \ldots, n).$$

Мы получим разбиение

$$\Gamma_k = \bigcup_{\rho=1}^{v} \Gamma_k^{(\rho)},$$

где $\Gamma_k^{(\rho)}$ – части Γ_k разных размерностей, открытые в соответствующем подпространстве.

Пусть $f \in \Gamma_k^{(\rho)}$ и некоторое преобразование $S^{(t)}$ $(1 \leqslant t \leqslant r)$ переводит f в форму $f' \in \Gamma_k^{(\rho)}$, то $S^{(t)}$ является автоморфизмом формы f, ибо иначе существовала бы плоскость (7), разделяющая эквивалентные формы f и f'.

Определим

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{\rho \in P} \Gamma_k^{(\rho)},$$

где ρ пробегает множество $P \subset [1, \ldots, v]$, которое строится следующим образом: $1 \in P$; $h \in P$, если $\Gamma_k^{(h)}$ не эквивалентна ни одному из множеств $\Gamma_k^{(j)}$, $j < h$; в противном случае $h \notin P$.

Рассмотрев таким образом все $i = 0, 1, \ldots, M$, отвечающие элементам Γ_i разбиения L, мы построим множества $\mathcal{F}_i$ $(i = 0, \ldots, M)$. Тогда

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{M} \mathcal{F}_i.$$

§ 8. Фундаментальная область при $n=2$

Теорема I0. Пусть $n=2$. Однократная область приведения Лагранжа-Минковского

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} \geqslant 0 \\ a_{22} \geqslant a_{11} > 0 \end{cases} \tag{I}$$

является фундаментальной. Все преобразования формы f из области (I) в приведенные формы являются автоморфизмами этой формы*).

*) Автоморфизмы приведенной формы полностью описаны в процессе доказательства теоремы.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что все формы области (I) не эквивалентны. Так как внутренняя форма области (I) не эквивалентна никакой другой приведенной форме (см.§ 7), то достаточно рассмотреть лишь граничные точки.

Рассматриваем грань

$$\Gamma_1 = \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \end{cases}$$

Пусть $f \in \Gamma_1$. Тогда

$$\mathfrak{Z}_1^{(0)}(\Gamma_1) = \left\{\pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{Z}_2^{(0)}(\Gamma_1) = \{\pm S\}, \quad S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \varepsilon\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, и $f' = fS = f$, S' - автоморфизмы.

Рассматриваем грань

$$\Gamma_2 = \begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} = 0 \\ a_{22} > a_{11} \end{cases}$$

Пусть $f \in \Gamma_2$. Тогда

$$\mathfrak{Z}_1^{(0)}(\Gamma_2) = \left\{\pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{Z}_2^{(0)}(\Gamma_2) = \{\pm S, \pm V\}, \quad S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\0 & -\varepsilon\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = +1$, и $f' = fS = fV = f$, S и V - автоморфизмы.

Рассматриваем грань

$$\Gamma_3 = \begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}$$

Пусть $f \in \Gamma_3$. Тогда

$$\mathfrak{Z}_1^{(0)}(\Gamma_3) = \left\{\pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{Z}_2^{(0)}(\Gamma_3) = \{\pm S, \pm T\}, \quad S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\1 & 0\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = +1$, и $f' = fS = fT = f$, S и T - автоморфизмы.

Рассматриваем грань

$$\Gamma_4 = \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}$$

Пусть $f \in \Gamma_4$. Тогда

$$\mathfrak{Z}_1^{(0)}(\Gamma_4) = \left\{\pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{Z}_2^{(0)}(\Gamma_4) = \{\pm S, \pm T\}, \quad S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\1 & 0\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, и $f' = fS = f$ и $f'' = fT = f$, S и T - автоморфизмы.

Рассматриваем грань

$$\Gamma_5 = \begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} = 0 \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}$$

Пусть $f \in \Gamma_5$. Тогда

$$\mathfrak{L}_1^{(0)}(\Gamma_5) = \left\{ \pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{L}_2^{(0)}(\Gamma_5) = \{\pm S, \pm T, \pm V, \pm P, \pm Q, \pm R\},$$

$$S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\0 & -\varepsilon\end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix}0 & -\varepsilon\\1 & \varepsilon\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\-1 & 0\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & \varepsilon\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = +1$, и $f' = fT = f$, $f' = fV = f$, $f' = fP = f$, $f' = fQ = f$, $f' = fR = f$, S, T, V, P, Q, R - автоморфизмы.

Теорема I0 доказана.

§ 9. Фундаментальная область при $n = 3$.

Если при $n = 2$ однократная область приведения Эрмита-Минковского является фундаментальной областью, то при $n \geqslant 3$ это не так - на границе однократной области Эрмита-Минковского имеются эквивалентные точки.

Теорема II. Следующие I6 систем линейных неравенств между коэффициентами форм определяют фундаментальную область:

$$\begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} > a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{23} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} > a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ a_{13} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12}=0 \\ a_{23}\geqslant 0 \\ a_{11}-2a_{12}>0 \\ a_{11}-2a_{13}>0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}>0 \\ a_{22}=a_{11} \\ a_{33}>a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ a_{23}\geqslant a_{13} \\ a_{13}\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12}>0 \\ a_{23}=0 \\ a_{11}-2a_{12}>0 \\ a_{11}-2a_{13}>0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}>0 \\ a_{22}>a_{11} \\ a_{33}>a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ a_{13}\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12}\geqslant 0 \\ a_{23}=0 \\ a_{11}-2a_{12}>0 \\ a_{11}-2a_{13}>0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}>0 \\ a_{22}>a_{11} \\ a_{33}=a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ a_{12}\geqslant a_{13} \\ a_{13}\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12}>0 \\ a_{23}\geqslant 0 \\ a_{11}-2a_{12}=0 \\ a_{11}-2a_{13}\geqslant 0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}>0 \\ a_{22}>a_{11} \\ a_{33}\geqslant a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ 2a_{23}\geqslant a_{13} \\ a_{13}\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12}>0 \\ a_{23}\geqslant 0 \\ a_{11}-2a_{12}=0 \\ a_{11}-2a_{13}\geqslant 0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}>0 \\ a_{22}=a_{11} \\ a_{33}>a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ a_{13}\geqslant 2a_{23} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12}\geqslant 0 \\ a_{23}\geqslant 0 \\ a_{11}-2a_{12}>0 \\ a_{11}-2a_{13}=0 \\ a_{11}+2a_{13}>0 \\ a_{22}-2a_{23}\geqslant 0 \\ a_{22}\geqslant a_{11} \\ a_{33}>a_{22} \\ a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0 \\ 2a_{23}\geqslant a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{13} \geqslant 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} = 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} > a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ 2a_{13} \geqslant a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} \geqslant 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} = 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ a_{13} \geqslant 2a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{23} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} = a_{11} \\ a_{33} > a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} \geqslant 0 \\ a_{23} \geqslant a_{13} \\ a_{13} \geqslant -a_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ a_{12} \geqslant |a_{13}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} = a_{11} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} \geqslant 0 \\ a_{12} \geqslant |a_{13}| \\ a_{23} \geqslant a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} \geqslant 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} = 0 \\ a_{22} = a_{11} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ a_{13} \geqslant 2a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} = 0 \\ a_{12} \geqslant -a_{13} \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{13} \leqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} > 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} > 0 \\ a_{22} > a_{11} \\ a_{33} > a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} = 0 \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{13} \leqslant 0 \end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Построение фундаментальной области проводилось по методу, описанному в § 7. Для упрощения рассуждений заметим, что

I) множество

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{13} > 0 \\ a_{11} + 2a_{13} = 0 \\ a_{22} - 2a_{23} \geqslant 0 \\ a_{22} \geqslant a_{11} \\ a_{33} \geqslant a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} \geqslant 0 \end{cases}$$

преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводится в множество

$$\begin{cases} a_{12} \geqslant 0 \\ a_{23} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{12} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{13} = 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} \geqslant 0 \\ a_{22} \geqslant a_{11} \\ a_{33} \geqslant a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \\ a_{23} \geqslant a_{12} \end{cases}$$

2) множество

$$a_{12}>0$$
$$a_{23}>0$$
$$a_{11}-2a_{12}=0$$
$$a_{13}-2a_{13}>0$$
$$a_{11}+2a_{13}>0$$
$$a_{22}-2a_{23}>0$$
$$a_{22}\geqslant a_{11}$$
$$a_{33}\geqslant a_{22}$$
$$a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}=0$$

преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

переводится в множество

$$a_{12}>0$$
$$a_{23}>0$$
$$a_{11}-2a_{12}=0$$
$$a_{11}-2a_{13}>0$$
$$a_{11}+2a_{13}>0$$
$$a_{22}-2a_{23}=0$$
$$a_{22}\geqslant a_{11}$$
$$a_{33}\geqslant a_{22}$$
$$a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}>0$$

3) множество

$$a_{12}>0$$
$$a_{23}>0$$
$$a_{11}-2a_{12}\geqslant 0$$
$$a_{11}-2a_{13}>0$$
$$a_{11}+2a_{13}>0$$
$$a_{22}-2a_{23}=0$$
$$a_{22}\geqslant a_{11}$$
$$a_{33}\geqslant a_{22}$$
$$a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-2a_{23}=0$$

преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

переводится в множество

$$\begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{23} > 0 \\ a_{11} - 2a_{12} \geqslant 0 \\ a_{11} - 2a_{13} = 0 \\ a_{11} + 2a_{13} > 0 \\ a_{22} - 2a_{23} = 0 \\ a_{22} \geqslant a_{11} \\ a_{33} \geqslant a_{22} \\ a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0 \end{cases}$$

Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что:

I) $a_{11} + 2a_{13} > 0$;

2) $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0$, если $a_{11} - 2a_{12} = 0$;

3) $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} > 0$, если $a_{22} - 2a_{23} = 0$;

Мы не будем также рассматривать преобразований, которые точки, не лежащие в плоскостях

I) $a_{11} + 2a_{13} = 0$;

2) $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} = 0$, $a_{11} - 2a_{12} = 0$;

3) $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} = 0$, $a_{22} - 2a_{23} = 0$;

переводят в эти плоскости.

Дальнейшее доказательство мы оформим в виде таблицы 6. Для данной грани фундаментальной области находим все ее нетривиальные автоморфизмы и преобразования ее в другие множества, приведенные по Эрмиту-Минковскому. Для сокращения записи мы будем считать, что все невыписанные неравенства Эрмита-Минковского, определяющие грань, выполняются строго. Данная грань разбивается на части (неравенства в левом столбце) так, что в пределах одной части действуют одни и те же преобразования, не выводящие ее за пределы области приведения.

Для нахождения автоморфизмов форм, лежащих на границе грани фундаментальной области, надо найти все преобразования эквивалентности данной грани в множества, приведенные по Эрмиту-Минковскому, которые оставляют границу на месте, а также все преобразования, которые являются автоморфизмами каждой точки грани.

Если грань фундаментальной области эквивалентна другому множеству, не имеющему с гранью фундаментальной области общих граничных точек, то мы будем писать только одно преобразование эквивалентности этих множеств. В противном случае выписываем все преобразования эквивалентности.

Таблица 6.

Исходная грань	Преобразование или автоморфизм	Эквивалентная грань
1. $a_{12}=0$ $a_{13}\geqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{13}\leqslant 0$
2. $a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}\geqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}\leqslant 0$
3. $a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>0$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
4. $a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>0$

	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$
5. $a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&\varepsilon_2&0\\\varepsilon_1&0&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\varepsilon_i=\pm 1$	автоморфизмы
6. $a_{23}=0$ $a_{13}\geqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{13}\leqslant 0$
7. $a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$
8. $a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}>0$

	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}<0$
9. $a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&0&\varepsilon_3\\0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_i=\pm1$	автоморфизмы
10. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\leqslant a_{13}$
11. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}>a_{13}$ $a_{13}\geqslant0$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}>a_{13}$ $a_{13}\leqslant0$
12. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}=a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$
13. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	автоморфизмы
14. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\leqslant a_{13}$

	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}>a_{23}$ $2a_{23}\leqslant a_{12}$
15. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<a_{23}$ $a_{13}\geqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<a_{23}$ $a_{13}\leqslant 0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}<a_{23}$ $a_{12}\geqslant 0$
16. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$

17. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&\varepsilon&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&\varepsilon&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{12}=0$
18. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{23}\leqslant a_{13}$
19. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{23}>a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
20. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{23}=a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{23}=0$
21. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы

	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $2a_{23}\leqslant a_{13}$ $a_{13}>a_{23}$
22. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}>a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы
23. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=a_{13}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$
24. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}\geqslant 2a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$

	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>0$ $a_{23}\geqslant 2a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}>a_{13}$ $2a_{13}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$
	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
25. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}=0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=a_{13}$

26. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$	автоморфизмы
27. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}\geqslant 2a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}\leqslant 2a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}\geqslant 2a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}\leqslant 2a_{13}$
28. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы

	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$
29. $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{23}\geqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{23}\leqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{23}$
30. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{12}=a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{23}=0$
31. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{23}>a_{12}$		
32. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{12}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
33. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\varepsilon&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	автоморфизмы
34. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$		

35. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{12}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы
36. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $2a_{23}\geqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $2a_{23}\leqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $2a_{13}\leqslant a_{12}$ $a_{12}>a_{13}$ $a_{13}>0$
37. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}>a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$
38. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}=a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$

	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}=a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}=0$
39. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}=0$ $a_{13}<0$
40. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	автоморфизм
41. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\varepsilon&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\\varepsilon&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\\varepsilon&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$

42. $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{12}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы
43. $a_{22}-2a_{23}=0$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $2a_{13}\leqslant a_{12}$
44. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{12}=0$ $a_{13}\geqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{12}=0$ $a_{13}\leqslant 0$
45. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $2a_{13}\leqslant a_{12}$
46. $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}-2a_{23}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм

47. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}\geqslant 2a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>a_{12}$ $2a_{12}\geqslant a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant 2a_{13}$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}>a_{13}$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$
48. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}>2a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}<2a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$ $a_{12}>2a_{13}$

	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=a_{12}$
49. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	автоморфизмы
50. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{13}\geqslant 2a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{12}\geqslant a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant 2a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\leqslant 2a_{13}$

51. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}-2a_{33}=0$ $a_{33}=a_{22}$
52. $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>0$ $a_{23}\geqslant a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{13}>0$ $a_{23}\leqslant a_{13}$
53. $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$
54. $a_{22}=a_{11}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	автоморфизмы
55. $a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$ $a_{13}\geqslant -a_{23}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{13}<0$ $a_{13}\leqslant -a_{23}$

56. $a_{22}=a_{11}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{13}\geqslant -a_{23}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+2a_{13}-$ $-2a_{23}=0$ $a_{13}\leqslant -a_{23}$
57. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>0$ $a_{12}\geqslant a_{13}$ $a_{23}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>0$ $a_{23}\geqslant a_{13}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{23}\geqslant a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$ $a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}\geqslant a_{12}$ $a_{13}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}\geqslant a_{23}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$

58. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$ $a_{23}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$ $a_{23}\leqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}\geqslant a_{23}$

	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
59. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm 1$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$

60. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&0&\varepsilon_2\\0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&\varepsilon_2&0\\\varepsilon_1&0&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\\\varepsilon_1&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon_3\\\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon_3\\0&\varepsilon_2&0\\\varepsilon_1&0&0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_i=\pm 1$	автоморфизмы
61. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{23}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<0$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}\geqslant a_{12}$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$

62. $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{23}\geqslant a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$ $a_{12}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$

	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant a_{23}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{23}\geqslant a_{12}$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
63. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}\geqslant 2a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant 2a_{13}$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $2a_{12}\geqslant a_{13}$ $a_{13}>a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}>a_{13}$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$

$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{13}<0$
$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}\geqslant 2a_{12}$
$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{12}$
$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}>a_{12}$ $2a_{12}\geqslant a_{23}$
$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}\geqslant 2a_{23}$
$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}\geqslant 2a_{13}$ $a_{13}>0$

	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>a_{23}$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}>a_{13}$ $2a_{13}\geqslant a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<0$ $a_{23}\geqslant -a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $-a_{13}\geqslant a_{23}$
64. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}>0$	$\pm\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	автоморфизм
	$\pm\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}<0$
	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$

$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=a_{12}$
$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$
$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$
$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=a_{23}$
$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}>0$
$\pm\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}<0$
$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$

	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=a_{13}$
65. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	автоморфизмы
	$\pm\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{23}=0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{23}=0$ $a_{13}=0$
66. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{13}\geqslant 2a_{12}$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы

	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{12}\geqslant a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{12}\geqslant 2a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $2a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{13}\geqslant 2a_{23}$
	$\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $2a_{23}\geqslant a_{13}$
67. $a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	автоморфизмы

$$\pm\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$	
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{22}-2a_{23}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{11}-2a_{13}=0$
	$\pm\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$a_{11}-2a_{12}=0$ $a_{22}=a_{11}$ $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}-2a_{13}=0$ $a_{23}=0$
68. $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>0$ $a_{12}\geqslant a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{13}>0$ $a_{12}\leqslant a_{13}$
69. $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}>0$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}<0$
70. $a_{33}=a_{22}$ $a_{12}=0$ $a_{13}=0$	$\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\varepsilon=\pm1$	автоморфизмы

71. $a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{13}<0$ $a_{12}\leqslant -a_{13}$
72. $a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{11}-a_{12}+2a_{13}\leqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{11}-2a_{12}+a_{13}\leqslant 0$
	$\pm\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant a_{11}-a_{12}+a_{13}$ $a_{11}-a_{12}+a_{13}\geqslant -a_{13}$
	$\pm\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{12}\geqslant -a_{13}$ $a_{11}-a_{12}+a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{11}-a_{12}+a_{13}$ $a_{11}-a_{12}+a_{13}\geqslant a_{12}$
	$\pm\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$a_{33}=a_{22}$ $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $-a_{13}\geqslant a_{12}$ $a_{11}-a_{12}+a_{13}\geqslant -a_{13}$
73. $a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{11}-a_{12}+2a_{13}\leqslant 0$	$\pm\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$a_{11}+a_{22}-2a_{12}+$ $+2a_{13}-2a_{23}=0$ $a_{11}-a_{12}+2a_{13}\geqslant 0$

Цитированная литература

[1] Венков Б.А. О приведении положительных квадратичных форм. Изв.АН СССР, сер.матем., 1940, 4, 37-52.

[2] Делоне Б.Н. Геометрия положительных квадратичных форм. Успехи матем.наук, 1937, вып.Ш, 16-62, 1938, вып.IУ 102-164.

[3] Делоне Б.Н. Галиулин Р.В. Штогрин М.И. О типах Бравэ решеток. ИНТ.Соврем.пробл.матем., т.2, М., 1973, 119-254.

[4] Рышков С.С. К теории приведения положительных квадратичных форм. Докл.АН СССР, 1971, 198, 1028-1031.

[5] Рышков С.С. К теории приведения положительных квадратичных форм по Эрмиту-Минковскому. Записки науч.семин. ЛОМИ, т.33, Л., 1973, 37-64.

[6] Рышков С.С. О приведении положительных квадратичных форм от n переменных по Эрмиту, по Минковскому и по Венкову. Докл.АН СССР, 1972, 207, 1054-1056.

[7] Таммела П.П. Область Эрмита-Минковского приведения положительных квадратичных форм от шести переменных. Записки научн.семин.ЛОМИ, т.33, Л., 1973,72-89.

[8] Таммела П.П. К теории приведения положительных квадратичных форм. Докл.АН СССР, 1973, 209, 1299-1302.

[9] Minkowski H. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz.J.reine angew.Math., 1905, 129, 220-274, Ges.Abh.Bd.II, 1911, 53-100.

[10] Waerden B.L. van der. Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Acta mathem ., 1956, 96, 265-309.