С. Ю. Пилюгин, Отслеживание в задаче Чэфи–Инфанте, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 4, 231–272

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 4

ОТСЛЕЖИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ЧЭФИ-ИНФАНТЕ

© С. Ю. Пилюгин

Показано, что при критическом значении параметра (т.е. в том случае, когда нулевая неподвижная точка не является гиперболической) полугруппа, порождаемая задачей Чэфи-Инфанте, обладает различными свойствами отслеживания в окрестности глобального аттрактора.

Введение

По мнению Хенри [1], задача Чэфи-Инфанте [2] — несомненно наиболее исследованный пример в глобальной (геометрической) теории параболических уравнений.

В задаче Чэфи-Инфанте изучается нелинейная полугруппа $S(t), t \geq 0$, в пространстве $H_0^1(0,\pi)$, порожденная параболическим уравнением

$$u_t = u_{xx} + bu - f(u), \quad x \in (0,\pi), \ t > 0, \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,\pi). \tag{3}$$

В уравнении (1) параметр $b > 0$, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит к классу нелинейностей, типичным представителем которых является функция $f(u) = u^3$.

Давно известно [1], что все неподвижные точки полугруппы $S(t)$ гиперболические, а сама она структурно-устойчива тогда и только тогда, когда $b \neq m^2, m = 1, 2\dots$

Ключевые слова: эволюционная система, параболическое уравнение, градиентная динамическая система, отслеживание.

Работа частично поддержана INTAS, грант 96-1158, и Минобразования РФ, грант 97-0-1.8-1.

Поэтому для построения полной теории задачи Чэфи–Инфанте представляет особый интерес изучение критического случая $b = m^2$. Такое изучение начато (отметим, например, работы [3, 4], в которых исследуются возмущения глобального аттрактора полугруппы $S(t)$ и скорость притяжения траекторий к глобальному аттрактору в критическом случае).

В предлагаемой статье показывается, что в критическом случае полугруппа $S(t)$ обладает различными свойствами отслеживания приближенных траекторий в окрестности глобального аттрактора (отметим, что при $b \neq m^2$ свойство отслеживания для $S(t)$ было установлено в [5]).

Насколько известно автору, это первый результат об отслеживании для конкретных эволюционных систем, имеющих негиперболические неподвижные точки.

Вопрос об отслеживании приближенных траекторий точными важен не только с точки зрения теории возмущений динамических систем, но и с точки зрения численных методов, так как при наличии свойства отслеживания численные траектории (полученные, например, дискретизацией уравнения (1)) близки к точным на неограниченных промежутках изменения переменной t.

Мы получаем основные результаты об отслеживании для задачи Чэфи–Инфанте как следствие более общих утверждений, относящихся к специальному классу градиентоподобных систем дифференциальных уравнений.

Структура статьи такова. В §1 вводится специальный класс градиентоподобных систем дифференциальных уравнений и формулируются утверждения об отслеживании приближенных траекторий в этом классе. В §2 изучается поведение траекторий в окрестностях неподвижных точек. В §3 результаты §2 используются для доказательства основных теорем §1. В §4 результаты §1 применяются к задаче Чэфи–Инфанте.

§1. Основные результаты для градиентоподобных систем

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x) \tag{4}$$

в ограниченной области $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Будем предполагать, что $X \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и что поле X не имеет касания с границей $\partial\mathcal{G}$ области $\mathcal{G}$, при этом траектории системы (4) входят в область $\mathcal{G}$ при возрастании t.

Будем обозначать через $\Phi(t, x)$ траекторию системы (4) с начальными данными $\Phi(0, x) = x$.

Пусть для системы (4) выполнены следующие предположения.

(I) На множестве $\overline{\mathcal{G}}$ существует такая непрерывная функция $\mathcal{V}(x)$, что функция $\dot{\mathcal{V}}$ (производная $\mathcal{V}$ в силу системы (4)) непрерывна, $\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$ для $x \in \overline{\mathcal{G}}$ и $\dot{\mathcal{V}}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x — точка покоя системы (4).

(II) Множество точек покоя P системы конечно: $P = \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N\}$, точки покоя $\pi_1, \ldots, \pi_N$ гиперболические, а точка покоя π_0 обладает следующими свойствами: для собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы

$$A_0 = \frac{\partial X}{\partial x}(\pi_0) \tag{5}$$

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0; \\ &\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = 2, \ldots, k; \\ &\operatorname{Re}\lambda_j > 0, \quad j = k+1, \ldots, n \end{aligned}$$

(как известно [6], в этом случае точка покоя π_0 имеет одномерное центральное многообразие $W^c(\pi_0)$), и

$$\Phi(t, x) \to \pi_0 \quad \text{при } t \to +\infty \tag{6}$$

для $x \in W^c(\pi_0)$.

(III) Устойчивые многообразия $W^s(\pi_i)$ и неустойчивые многообразия $W^u(\pi_i)$ точек покоя $\pi_i, i = 0, \ldots, N$, трансверсальны.

(IV) Выполнены неравенства

$$\mathcal{V}(\pi_0) > \mathcal{V}(\pi_i) \quad \text{для } i = 1, \ldots, N.$$

Мы будем изучать свойства отслеживания приближенных траекторий для диффеоморфизмов сдвига $\phi(x) = \Phi(T, x)$ (выбор числа $T > 0$ будет уточняться позже). Нас будут интересовать следующие два свойства диффеоморфизма ϕ.

Свойство отслеживания. Фиксируем число $d > 0$ и назовем d-псевдотраекторией отображения ϕ в области $\mathcal{G}$ такую последовательность $\xi = \{x_k \in \mathcal{G} : k \geq 0\}$, что

$$|\phi(x_k) - x_{k+1}| < d, \quad k \geq 0.$$

Будем говорить, что ϕ обладает свойством отслеживания в $\mathcal{G}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ в $\mathcal{G}$ существует точка x, для которой выполнены неравенства

$$|\phi^k(x) - x_k| < \varepsilon, \quad k \geq 0.$$

Свойство липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания. Фиксируем числа $r, p \geq 1$ и рассмотрим банахово пространство $\mathcal{L}_{r,p}$, в котором норма последовательности $a = \{a_k : k \geq 0\}$ задается формулой

$$\|a\|_{r,p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Для последовательности $\xi = \{x_k \in \mathcal{G} : k \geq 0\}$ и для точки x определим последовательности

$$d(\xi) = \{d_k(\xi) : k \geq 0\}, \quad \text{где } d_k(\xi) = |\phi(x_k) - x_{k+1}|,$$

и

$$\gamma(x, \xi) = \{\gamma_k(x, \xi) : k \geq 0\}, \quad \text{где } \gamma_k(x, \xi) = |\phi^k(x) - x_k|.$$

Будем говорить, что ϕ обладает свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания в области $\mathcal{G}$, если существуют такие положительные константы L и δ, что для любой последовательности $\xi = \{x_k \in \mathcal{G} : k \geq 0\}$ с

$$\|d(\xi)\|_{r,p} \leq \delta$$

существует такая точка x, что

$$\|\gamma(x, \xi)\|_{r,p} \leq L \|d(\xi)\|_{r,p}.$$

Отметим, что в случае уравнения (1) наличие свойства липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания означает следующее. Если рассматриваются дискретизации уравнения (1), у которых шаги дискретизации по x и по t уменьшаются с ростом t достаточно быстро, то соответствующее приближенное решение будет стремиться при $t \to \infty$ к некоторому точному решению с той же скоростью (подробнее такая постановка задачи описана в [7]).

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Отображение $\phi(x) = \Phi(1, x)$ обладает свойством отслеживания в $\mathcal{G}$.*

Теорема 2. *Существуют такие число $T_0 > 0$ и функция $\rho_0 : [T_0, \infty) \to (1, \infty)$, что если $T \geq T_0$ и для чисел $r > 1, p \geq 1$ выполнено включение $r^{1/p} \in (1, \rho_0(T))$, то отображение $\phi(x) = \Phi(T, x)$ обладает свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания в $\mathcal{G}$.*

Легко понять, что свойства отслеживания сохраняются при отбрасывании начальных кусков траекторий фиксированной длины. Это утверждение очевидно в случае свойства отслеживания и следует из соображений, примененных при доказательстве теоремы 2 в §3, в случае свойства липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания.

Стандартно показывается, что по любой окрестности U_0 точки покоя π_0 можно найти такие область $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ и число κ, что

- граница $\partial\mathcal{G}_1$ области $\mathcal{G}_1$ гладкая, траектории системы (4) не имеют контакта с $\partial\mathcal{G}_1$ и входят в $\mathcal{G}_1$ при возрастании t;
- $U_0 \cap \mathcal{G}_1 = \varnothing$;
- для отображения $\phi(x) = \Phi(T, x)$ с $T \geq 1$ и для $x \in \mathcal{G} \setminus U_0$ выполнено неравенство
$$\operatorname{card}\{k : \phi^k(x) \notin \mathcal{G}_1\} \leq \kappa$$
(card$A$ — число элементов множества A).

В области $\mathcal{G}_1$ все точки покоя системы (4) гиперболические и выполнено условие трансверсальности, поэтому дословное повторение доказательств теоремы 2 в [5] и теоремы 3 в [7] обосновывает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть U_0 — окрестность точки покоя π_0. Тогда*

(1) *отображение $\phi(x) = \Phi(1, x)$ обладает свойством отслеживания в $\mathcal{G} \setminus U_0$;*

(2) *существуют такие число $T_1 > 0$ и функция $\rho_1 : [T_1, \infty) \to (1, \infty)$, что если $T \geq T_1$ и для чисел $r > 1, p \geq 1$ выполнено включение $r^{1/p} \in (1, \rho_1(T))$, то отображение $\phi(x) = \Phi(T, x)$ обладает свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания в $\mathcal{G} \setminus U_0$.*

Замечание 1. Доказательство в [7] показывает, что число T_1 и функция ρ_1 в теореме 3 не зависят от окрестности U_0, от U_0 зависят лишь константы L и δ (конечно, эти константы зависят также от r и p).

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. Обозначим через $\mathcal{S}_i$ и $\mathcal{U}_i$ инвариантные подпространства матрицы

$$A_i = \frac{\partial X}{\partial x}(\pi_i), \quad i = 1, \ldots, N,$$

соответствующие частям ее спектра, лежащим слева и справа от мнимой оси. В случае матрицы (5) вводятся одномерное подпространство $\mathcal{N}_0$, соответствующее собственному числу $\lambda_1 = 0$, а также подпространства $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{U}_0$, соответствующие собственным числам $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$.

Лемма 1. *Существует окрестность U_0 точки покоя π_0, в которой отображение $\phi(x) = \Phi(1, x)$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что если последовательность $\{x_k : k \geq 0\}$ или $\{x_k : 0 \leq k \leq m\}$ лежит в U_0 и выполнены неравенства*

$$|\phi(x_k) - x_{k+1}| < d$$

(для $k \geq 0$ или для $0 \leq k \leq m-1$ соответственно), то существует точка x, для которой выполнены неравенства

$$|\phi^k(x) - x_k| < \varepsilon$$

для $k \geq 0$ или для $0 \leq k \leq m-1$.

Доказательство. Пусть отображение ψ топологически сопряжено с ϕ. Аналогично лемме 2.1.2 в [8] показывается, что если ψ обладает описанным в лемме свойством в некоторой окрестности точки π_0, то и ϕ обладает этим свойством.

Так как центральное многообразие $W^c(\pi_0)$ — гладкая кривая, мы можем выбрать координаты y, z так, что в этих координатах точка π_0 является началом, в некоторой ее окрестности многообразие $W^c(\pi_0)$ совпадает с осью y, а система (4) имеет вид

$$\dot{y} = g_1(y, z), \quad \dot{z} = Bz + g_2(y, z). \tag{7}$$

В системе (7) матрица B имеет собственные числа $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а функции g_1 и g_2 обращаются в нуль в начале координат вместе со своими матрицами Якоби.

Хорошо известно (см., например, [9]), что в некоторой окрестности начала координат система (7) топологически сопряжена с системой

$$\dot{y} = g(y), \quad \dot{z} = Bz \tag{8}$$

(т.е. существует гомеоморфизм, отображающий траектории системы (7) на траектории системы (8) с сохранением их параметризации). Так как при топологической сопряженности сохраняются размерности устойчивых и неустойчивых многообразий, из (6) следует, что пересечение оси y с некоторой окрестностью начала лежит в устойчивом многообразии начала координат, поэтому существует такое $a > 0$, что

$$yg(y) < 0 \quad \text{при } y \in (-a, 0) \cup (0, a). \tag{9}$$

Пусть $\Psi(t, y)$ — поток системы (8). Положим $\psi(y) = \Psi(1, y)$. Так как системы (4) и (8) локально топологически сопряжены, отображения ϕ и ψ топологически сопряжены в некоторой окрестности U_0 точки покоя π_0. Для завершения доказательства леммы осталось показать, что отображение ψ обладает в U_0 описанным в ее формулировке свойством отслеживания. Обозначим через ψ_1 и ψ' компоненты ψ, соответствующие координатам y и z.

Покажем, что свойство отслеживания выполняется для ψ_1. Будем считать для определенности, что окрестность U_0 содержит отрезок $[-\alpha, \alpha]$ оси y с некоторым $\alpha \in (0, a]$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, a)$. Из (9) следует, что существуют числа $\kappa > 0$, $\delta \in (0, \varepsilon)$, $d \in (0, \delta)$, обладающие следующими свойствами:

$$\psi_1([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset [-\varepsilon + \delta, \varepsilon - \delta]; \tag{10}$$

$$|\psi_1^k(y)| \leq \varepsilon - \delta \quad \text{при } |y| \leq \alpha, \ k \geq \kappa;$$

если для $y_0, \dots, y_\kappa \in [-\alpha, \alpha]$ выполнены неравенства

$$|\psi_1(y_k) - y_{k+1}| < d \tag{11}$$

при $0 \leq k \leq \kappa - 1$, то

$$|\psi_1^k(y_0) - y_k| < \min(\delta, \varepsilon) \quad \text{при } 0 \leq k \leq \kappa. \tag{12}$$

Рассмотрим последовательность $\{y_k : k \geq 0\} \subset [-\alpha, \alpha]$ (или последовательность $\{y_k : 0 \leq k \leq m\} \subset [-\alpha, \alpha]$), для которой выполнены неравенства (11) при $k \geq 0$ (или при $0 \leq k \leq m$).

В силу выбора d из (10) и (12) следует, что $y_k \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ при $k \geq \kappa$. Учитывая (12), получаем, что

$$|\psi^k(y_0) - y_k| < 2\varepsilon \quad \text{при } k \geq 0,$$

т.е. ψ_1 обладает свойством отслеживания на $[-\alpha, \alpha]$.

Отображение ψ' является гиперболическим линейным диффеоморфизмом, поэтому оно обладает свойством отслеживания (см., например, теорему 3.2.1 в [10]).

Остается заметить, что отображение ψ является произведением отображений ψ_1 и ψ', поэтому оно, как легко понять, тоже обладает нужным нам свойством отслеживания. Лемма доказана.

Нам потребуется определение спектра Сакера–Селла [11] для компактного инвариантного множества A диффеоморфизма ϕ.

Фиксируем $\mu > 0$ и рассмотрим для $x \in A$ и $k \in \mathbb{Z}$ линейное отображение

$$\Psi_\mu(x, k) = \mu^k D\phi^k(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

(здесь $D\phi^k(x)$ — производная ϕ^k в точке x).

Будем говорить, что Ψ_μ обладает экспоненциальной дихотомией над точкой $x \in A$, если существуют такие проектор $\Pi = \Pi(x)$ в $\mathbf{R}^n$ и числа $K > 0, \alpha \in (0, 1)$, что

$$\|\Psi_\mu(x, m)\Pi\Psi_\mu^{-1}(x, l)\| \leq K\alpha^{m-l} \quad \text{для } l \leq m \tag{13}$$

и

$$\|\Psi_\mu(x, m)(I - \Pi)\Psi_\mu^{-1}(x, l)\| \leq K\alpha^{m-l} \quad \text{для } m \leq l \tag{14}$$

(здесь I — тождественный оператор, а $\|\cdot\|$ — операторная норма).

Для точки $x \in A$ определим ее резольвентное множество

$$\mathcal{R}(x) = \{\mu > 0 : \Psi_\mu \text{ обладает экспоненциальной дихотомией над } x\}$$

и ее спектр

$$\Sigma(x) = (0, \infty) \setminus \mathcal{R}(x).$$

Наконец, спектром Сакера–Селла множества A назовем множество

$$\Sigma(A) = \bigcup_{x \in A} \Sigma(x).$$

Будем говорить, что множество A инвариантно связно, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых компактных инвариантных множеств.

В [10] доказано следующее утверждение (см. теорему 1.4.5).

Теорема 4. *Предположим, что A — компактное инвариантно связное инвариантное множество диффеоморфизма ϕ. Пусть для некоторых $r > 1$, $p \geq 1$*

$$r^{1/p} \notin \Sigma(A).$$

Тогда существует окрестность множества A, в которой ϕ обладает свойством липшицева $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания.

Определим число

$$\lambda' = \max_{2 \leq i \leq k} \mathrm{Re}\lambda_i$$

(напомним, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы (5)).

Лемма 2. *Предположим, что для $\phi(x) = \Phi(T, x)$ с $T > 0$ и для чисел $r > 1$, $p \geq 1$ выполнено включение*

$$r^{1/p} \in (1, \exp(-T\lambda')). \tag{15}$$

Тогда существуют такие окрестность U_0 точки π_0 и числа $L_1, \delta_1 > 0$, что если $\{x_0, \ldots, x_m\} \subset U_0$ и

$$\delta := \left(\sum_{k=0}^{m-1} r^k |\phi(x_k) - x_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \delta_1,$$

то найдется точка x, для которой выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{m} r^k |\phi^k(x) - x_k|^p \right)^{1/p} \leq L_1 \delta.$$

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизм $\phi(x) = \Phi(T, x)$ с $T > 0$. Из равенства $D\phi(\pi_0) = \exp(A_0 T)$ вытекает, что если $\mu \in (1, \exp(-T\lambda'))$, то существуют такие $K > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, что если Π — проектор на подпространство $\mathcal{S}_0$ параллельно подпространству $\mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{U}_0$, то для $x = \pi_0$ выполнены условия (13) и (14).

Следовательно, условие (15) означает, что число $\rho = r^{1/p}$ не принадлежит спектру Сакера–Селла неподвижной точки π_0 диффеоморфизма ϕ.

Будем считать для определенности, что π_0 — начало координат. Представим $\phi(x)$ в виде

$$\phi(x) = Bx + f(x),$$

где

$$B = \exp(A_0 T), \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0.$$

Для любого $l > 0$ найдутся такие окрестность U точки π_0 и функция g, что диффеоморфизм

$$\psi(x) = Bx + g(x) \tag{16}$$

совпадает с ϕ в U, а константа Липшица функции g меньше l во всем пространстве.

Так как выполнены аналоги условий (13), (14) (с заменой $D\phi^k(x)$ на B в определении Ψ_μ), дословное повторение доказательства теоремы 1.4.5 в [10] показывает, что существует такое l_0 (зависящее от $\|\Pi\|, K, \alpha, r, p$), что если константа Липшица g в (16) меньше l_0, то диффеоморфизм ψ обладает свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через L_1 и δ_1 соответствующие константы из определения $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания.

Выберем окрестность U и функцию g в (16) так, чтобы константа Липшица g в $\mathbf{R}^n$ была меньше l_0.

Уменьшая, если необходимо, число δ_1, найдем такую окрестность U_0 точки π_0, чтобы окрестность U_0 радиуса $L_1\delta_1$ лежала в U. Покажем, что окрестность U_0 обладает свойством, описанным в формулировке нашей леммы.

Рассмотрим последовательность $\{x_0, \dots, x_m\} \subset U_0$ и построим последовательность $\{x'_k : k \geq 0\}$ так: положим $x'_k = x_k$ при $0 \leq k \leq m$ и $x'_{k+1} = \psi(x_k)$ при $k \geq m$.

Тогда

$$\delta = \left(\sum_{k=0}^{m-1} r^k |\phi(x_k) - x_{k+1}|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k |\psi(x'_k) - x'_{k+1}|^p \right)^{1/p}.$$

Если $\delta \leq \delta_1$, то существует такая точка x, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k |\psi^k(x) - x'_k|^p \right)^{1/p} \leq L_1 \delta. \tag{17}$$

Из последнего неравенства следует, что $|\psi^k(x) - x_k| \le L_1\delta$ при $0 \le k \le m$. По выбору U_0 точки $\psi^k(x)$ лежат в U_0 при $0 \le k \le m$, поэтому $\psi^k(x) = \phi^k(x)$ при $0 \le k \le m$, и из неравенства (17) вытекает искомое неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{m} r^k |\phi^k(x) - x_k|^p\right)^{1/p} \le L_1\delta.$$

Лемма доказана. •

§2. Окрестности точек покоя

Введем основные объекты, необходимые для доказательства теорем 1 и 2, — так называемые s-диски и u-диски.

Пусть U_0 — достаточно малая окрестность негиперболической точки покоя π_0. В лемме 3 доказывается, что через любую точку $x \in U_0$, достаточно близкую к неустойчивому многообразию $W^u(\pi_0)$, проходит такой гладкий диск $\mathcal{D}$ (s-диск), что

- его размерность равна размерности суммы $\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{N}_0$,
- траектории точек из $\mathcal{D}$ экспоненциально сближаются при движении в положительном направлении.

В лемме 9 доказывается, что через любую точку $x \in U_0$ проходит такой гладкий диск $\mathcal{H}$ (u-диск), что

- его размерность равна размерности $\mathcal{U}_0$,
- траектории точек из $\mathcal{H}$ экспоненциально сближаются при движении в отрицательном направлении.

При этом размеры дисков и оценки скорости сближения начинающихся на них траекторий не зависят от выбора окрестности U_0, углы наклона s-дисков к $\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{N}_0$ равномерно ограничены, а углы наклона u-дисков к $\mathcal{U}_0$ стремятся к нулю при уменьшении окрестности U_0.

Опишем схему доказательства теоремы 1 в §3 (доказательство теоремы 2 идет по той же схеме, отличаясь лишь некоторыми оценками). Мы фиксируем достаточно малые окрестности U_0 и $U^0 \subset U_0$ точки покоя π_0. Основной интерес представляет рассмотрение d-псевдотраекторий $\{x_k\}$, пересекающих U^0 и не лежащих целиком в U_0. В леммах 12–14 показано, что окрестности U^0 и U_0 можно выбрать так, что если число d достаточно мало, то найдется такой индекс v, что точки $x_k, 0 \le k \le v$ лежат в U_0 (за исключением, быть может, m начальных точек, где m не зависит от d), а точки $x_k, k \ge v$ не лежат в U^0. По лемме 1 существует точка y, траектория которой отслеживает конечную псевдотраекторию $\{x_k : 0 \le k \le v\}$, по теореме 3 существует точка z, траектория которой отслеживает псевдотраекторию $\{x_k : k \ge v\}$. Через точки $\phi^v(y)$ и z проходят соответственно u-диск $\mathcal{H}$ и s-диск $\mathcal{D}$, точка пересечения которых и порождает искомую отслеживающую траекторию.

Перейдем к точным формулировкам. Начнем со случая отображения $\phi(x) = \Phi(1, x)$. Пусть π_i — одна из точек покоя системы (4).

Всюду дальше будут рассматриваться окрестности U точки π_i, обладающие следующими свойствами:

- π_i является началом координат в окрестности U;
- подпространства $\mathcal{S}_i, \mathcal{U}_i$ (и подпространство $\mathcal{N}_0$ в случае точки π_0) являются координатными;
- в окрестности U локальное устойчивое многообразие

  $$W^s(\pi_i, U) = \{x \in W^s(\pi_i) : \phi^k(x) \in U, k \geq 0\}$$

  лежит в подпространстве $\mathcal{S}_i$, а локальное неустойчивое многообразие

  $$W^u(\pi_i, U) = \{x \in W^u(\pi_i) : \phi^k(x) \in U, k \leq 0\}$$

  лежит в подпространстве $\mathcal{U}_i$;
- ϕ является сжатием в $\mathcal{S}_i$ и растяжением в $\mathcal{U}_i$.

Будем считать, что выполнены включения

$$\phi\left(\overline{W^s(\pi_i, U)}\right) \subset W^s(\pi_i, U)$$

и

$$\phi^{-1}\left(\overline{W^u(\pi_i, U)}\right) \subset W^u(\pi_i, U).$$

Рассмотрим соответствующие фундаментальные области

$$\Gamma^s(U) = W^s(\pi_i, U) \setminus \phi\left(\overline{W^s(\pi_i, U)}\right)$$

и

$$\Gamma^u(U) = W^u(\pi_i, U) \setminus \phi^{-1}\left(\overline{W^u(\pi_i, U)}\right).$$

Будем обозначать через y координаты в $\mathcal{S}_i$, а через z — координаты в $\mathcal{U}_i$. В случае точки π_0 будем обозначать через y координаты в $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{N}_0$, а через z — координаты в $\mathcal{U}_0$.

Пусть точка q лежит в окрестности U и имеет координаты $q = (q_y, q_z)$ в соответствии с принятой договоренностью. Фиксируем число $r > 0$ и будем называть s-диском радиуса r с центром в точке q в окрестности U график функции f класса C^1, отображающей множество

$$Y_r(q) = \{y : |y - q_y| < r\}$$

в $\mathcal{U}_i$ (далее слова „в окрестности U“ будут часто опускаться).

Пусть $\mathcal{D}$ — определенный выше s-диск. Введем число

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}_i) = \sup_{y \in Y_r(q)} \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|,$$

в случае точки π_0 аналогично вводится число $\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}'_0)$.

Аналогично будем называть u-диском радиуса r с центром в точке q в окрестности U график функции g класса C^1, отображающей множество

$$Z_r(q) = \{z : |z - q_z| < r\}$$

в $\mathcal{S}_i$ (в $\mathcal{S}'_0$ в случае точки π_0).

Пусть $\mathcal{H}$ — u-диск. Введем число

$$\Delta(\mathcal{H}, \mathcal{U}_i) = \sup_{z \in Z_r(q)} \left\| \frac{\partial g}{\partial z} \right\|.$$

Лемма 3. *Существуют числа $\beta > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, обладающие следующим свойством. Для любой достаточно малой окрестности U точки покоя π_0 можно указать такие положительные числа R, δ, C, что если $\Gamma^u(U)$ — фундаментальная область в $W^u(\pi_0)$, соответствующая U, а для точки $q \in U$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{dist}(q, \Gamma^u(U)) < 2\delta,$$

то существует такой s-диск $\mathcal{D}$ радиуса R с центром в точке q, что

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}'_0) \le \beta,$$

и для любых точек $x, x' \in \mathcal{D}$ выполнены неравенства

$$|\phi^k(x) - \phi^k(x')| \le C\lambda^k |x - x'|, \quad k \ge 0. \tag{18}$$

При доказательстве леммы 3 мы применим рассуждение, близкое к использованному в [13]. Будут использованы следующие стандартные утверждения.

Лемма 4. *Пусть π_i — гиперболическая точка покоя системы (4). Существуют такие окрестность U_i точки π_i и числа $C_i, \rho_i, \nu_i > 0$, $\mu_i \in (0,1)$, что если $q \in U_i$, $\mathcal{D}'$ — s-диск в U_i радиуса $r \le \rho_i$ с центром в точке q, выполнено неравенство*

$$\Delta(\mathcal{D}', \mathcal{S}_i) \le 2\nu_i$$

и

$$\phi^{-k}(q) \in U_i, \quad 0 \le k \le m,$$

при некотором $m > 0$, то существует такой s-диск $\mathcal{D} \subset \phi^{-m}(\mathcal{D}')$ радиуса r с центром в точке $\phi^{-m}(q)$, что

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}_i) \to 0 \quad \textit{при } m \to \infty,$$

и для любых точек $x, x' \in \mathcal{D}$ выполнены неравенства

$$|\phi^k(x) - \phi^k(x')| \leq C_i \mu_i^k |x - x'|, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Доказательство леммы 4 использует стандартные оценки из доказательства λ-леммы [14, с. 60–63].

Лемма 5. *Предположим, что для двух гиперболических точек покоя π и π' системы (4) существуют такие последовательность точек $q_m \in W^s(\pi')$ и точка $q \in W^s(\pi)$, что*

$$q_m \to q, \quad m \to \infty.$$

Тогда существуют (с точностью до перенумерации) гиперболические точки покоя $\pi_2, \ldots, \pi_l$ со следующим свойством. По любым окрестностям $V_1, \ldots, V_{l+1}$ точек $\pi_1, \ldots, \pi_{l+1}$ (считаем, что $\pi_1 = \pi$, $\pi_{l+1} = \pi'$) можно указать такие числа $\tau_{i,m}, \theta_{i,m}, m \geq 0$, $i = 1, \ldots, l+1$, и χ_i, $i = 1, \ldots, l$, что

$$\phi^{\tau_{i,m}}(q_m) \to q_i^s \in W^s(\pi_i, V_i) \quad \textit{при } m \to \infty,$$
$$\phi^{\theta_{i,m}}(q_m) \to q_i^u \in W^u(\pi_i, V_i) \quad \textit{при } m \to \infty$$

и $\phi^{\chi_i}(q_i^u) = q_{i+1}^s$.

Доказательство леммы 5 повторяет рассуждение, использованное в доказательстве леммы 11.5 в [14, с. 99–100].

Лемма 6. *Пусть π — гиперболическая точка покоя системы (4). Существует такая окрестность V точки π, что если $q \in V \cap W^s(\pi)$, то $q \in W^s(\pi, V)$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что если точка x принадлежит пересечению

$$W^u(\pi) \cap W^s(\pi') \tag{19}$$

для некоторой точки покоя π', то выполнены неравенства

$$\mathcal{V}(\pi) > \mathcal{V}(x) > \mathcal{V}(\pi').$$

Пусть v — максимальное значение $\mathcal{V}(\pi')$ по всем точкам покоя π', для которых пересечение (19) непусто. Выберем такую окрестность V_0 точки π, чтобы было выполнено неравенство

$$\min_{x \in V_0} \mathcal{V}(x) > v.$$

Предположим, что утверждение нашей леммы неверно. Тогда существуют окрестность $V \subset V_0$ точки π и такая последовательность точек

$$q_m \in (W^s(\pi) \setminus W^s(\pi, V)) \cap V,$$

что $\phi^k(v_m)$ покидают окрестность V при возрастании k. Стандартное рассуждение (см. доказательство леммы 11.5 в [14]) показывает, что, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно указать точку покоя π', для которой пересечение (19) непусто, и такую последовательность $k_m \to \infty$, что

$$\phi^{k_m}(q_m) \to \pi',$$

следовательно,

$$\lim \mathcal{V}(\phi^{k_m}(q_m)) \leq v.$$

Из выбора V_0 вытекает, что при достаточно больших m положительная полутраектория точки $\phi^{k_m}(q_m)$ не может пересечь V_0, а это противоречит включениям

$$q_m \in W^s(\pi).$$

Лемма доказана. •

Рассмотрим s-диск $\mathcal{D}$ радиуса r с центром в точке q в окрестности U точки покоя π_i, являющийся графиком функции f, отображающей множество $Y_r(q)$ в $\mathcal{U}_i$. Пусть $\mathcal{D}_m$ — s-диски радиуса r с центрами в точках q_m, являющиеся графиками функций f_m, отображающих множества $Y_r(q_m)$ в $\mathcal{U}_i$. Будем писать

$$\mathcal{D}_m \xrightarrow{C^1} \mathcal{D},$$

если $q_m \to q$ и

$$\sup_{y \in Y_r(q) \cap Y_r(q_m)} \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_m}{\partial y} \right\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Лемма 7. *Пусть π_j — точка покоя системы (4). Существует окрестность U точки π_j, обладающая следующим свойством.*

Предположим, что π, π' — гиперболические точки покоя, что многообразие $W^s(\pi)$ содержит s-диск $\mathcal{D}$ радиуса r с центром в точке $q \in U$, являющийся графиком функции f, отображающей множество $Y_r(q)$ в $\mathcal{U}_j$, и что для последовательности точек $q_m \in W^s(\pi')$ выполнено соотношение $q_m \to q$ при $m \to \infty$.

Тогда существует такая последовательность s-дисков $\mathcal{D}_m \subset W^s(\pi')$ радиуса $\rho \in (0, r)$ с центрами в точках q_m, что

$$\mathcal{D}_m \xrightarrow{C^1} \mathcal{D}',$$

где диск $\mathcal{D}'$ является графиком сужения функции f на множество $Y_\rho(q)$.

Доказательство. Применим (изменив в случае необходимости нумерацию точек покоя) лемму 5 и выберем окрестности V_i точек $\pi_i, i = 1, \ldots, l+1$, так, чтобы для них выполнялись утверждения лемм 4 и 6.

Так как многообразия $W^s(\pi_{i+1})$ трансверсальны к $\mathcal{U}_i$ в точках q_i^u, $i = 1, \ldots, l$, из λ-леммы следует, что, заменяя точки q_i^u на точки $\phi^{-k}(q_i^u)$ с достаточно большими k, можно считать, что $W^s(\pi_{i+1})$ содержат s-диски $\mathcal{D}'_i$ с центрами в точках q_i^u, для которых выполнены неравенства

$$\Delta(\mathcal{D}'_i, \mathcal{S}_i) < \nu_i. \tag{20}$$

Обозначим

$$q^s_{i,m} := \phi^{\tau_{i,m}}(q_m), \quad q^u_{i,m} := \phi^{\theta_{i,m}}(q_m), \quad \kappa_{i,m} := \theta_{i,m} - \tau_{i,m},$$
$$i = 1, \ldots, l+1, \quad m \geq 0.$$

Построим s-диски $\mathcal{D}_{i,m}$ радиусов $r_i \leq \rho_i$ с центрами в точках $q^s_{i,m}$ и s-диски $\mathcal{D}'_{i,m}$ радиусов r_i с центрами в точках $q^u_{i,m}$ соответственно так, чтобы при $i = 1, \ldots, l$ и при достаточно больших m выполнялись следующие соотношения:

$$\Delta(\mathcal{D}'_{i,m}, \mathcal{S}_i) < 2\nu_i, \tag{21}$$
$$\mathcal{D}_{i,m} \subset \phi^{-\kappa_{i,m}}(\mathcal{D}'_{i,m}), \tag{22}$$
$$\mathcal{D}'_{i,m} \subset \phi^{-\chi_i}(\mathcal{D}_{i+1,m}). \tag{23}$$

Опишем процесс построения искомых дисков, начиная с $i = l$.

Выберем такое число $r_l \leq \rho_l$, что $W^s(\pi_{l+1})$ содержит s-диск $\mathcal{D}'_l$ радиуса r_l с центром в точке q^u_l, для которого выполнено неравенство (20).

Рассмотрим гладкий диск

$$\mathcal{D}''_l = \phi^{\chi_l}(\mathcal{D}'_l) \subset W^s(\pi_{l+1}).$$

Так как $q^s_{l+1,m} \in W^s(\pi_{l+1})$ и $q^s_{l+1,m} \to q^s_{l+1}$, из леммы 6 следует, что

$$q^s_{l+1,m} \in W^s(\pi_{l+1}, V_{l+1})$$

при достаточно больших m. Поэтому найдутся такие гладкие диски $\mathcal{D}_{l+1,m}$, лежащие в $W^s(\pi_{l+1})$ и проходящие через точки $q^s_{l+1,m}$, что множества

$$\phi^{-\chi_l}(\mathcal{D}_{l+1,m})$$

содержат диски $\mathcal{D}'_{l,m}$ радиуса r_l с центрами в точках $q^u_{l,m}$, для которых выполнено соотношение

$$\mathcal{D}'_{l,m} \xrightarrow{C^1} \mathcal{D}'_l.$$

Ясно, что при достаточно больших m выполнены неравенства (21) с $i = l$, поэтому по лемме 4 найдутся такие s-диски

$$\mathcal{D}_{l,m} \subset \phi^{-\kappa_{l,m}}(\mathcal{D}'_{l,m})$$

радиуса r_l с центрами в точках $q^s_{l,m}$, что

$$\Delta(\mathcal{D}_{l,m}, \mathcal{S}_l) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Найдем число $r_{l-1} \le \rho_{l-1}$ со следующими свойствами:

- $W^s(\pi_l)$ содержит s-диск $\mathcal{D}'_{l-1}$ радиуса r_{l-1} с центром в точке q^u_{l-1}, для которого выполнено неравенство (20);
- гладкий диск
$$\phi^{\chi_{l-1}}(\mathcal{D}'_{l-1}) \subset W^s(\pi_l)$$
лежит в шаре радиуса r_l в $\mathcal{S}_l$ с центром в точке q^s_l.

Ясно, что существуют такие гладкие диски

$$\mathcal{D}''_{l-1,m} \subset \mathcal{D}_{l,m},$$

что множества

$$\phi^{-\chi_{l-1}}(\mathcal{D}''_{l-1,m})$$

содержат s-диски $\mathcal{D}'_{l-1,m}$ радиуса r_{l-1} со свойством

$$\mathcal{D}'_{l-1,m} \xrightarrow{C^1} \mathcal{D}'_{l-1}$$

и т. д. Продолжая этот процесс, мы докажем лемму 7.

Рассмотрим точку $q \in \mathcal{U}_i \cap W^s(\pi_j)$. Пусть $\mathcal{T}$ — ортогональное дополнение к

$$T_q W^s(\pi_j) \cap \mathcal{U}_i$$

в $T_q W^s(\pi_j)$.

Будем говорить, что s-диск $\mathcal{D} \subset W^s(\pi_j)$ с центром в точке q является нормальным, если

$$T_q \mathcal{D} = \mathcal{T}.$$

Лемма 8. *Существует такое $\gamma > 0$, что если окрестность U_i точки π_i достаточно мала, то для любой точки*

$$q \in W^u(\pi_i, U_i) \cap W^s(\pi_j)$$

существует нормальный s-диск $\mathcal{D} \subset W^s(\pi_j)$ с центром в точке q, для которого выполнено неравенство

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}_i) \leq \gamma \tag{24}$$

(*или неравенство*

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}'_0) \leq \gamma$$

в случае $i = 0$).

Доказательство. Возьмем две такие окрестности U_i и U'_i, что

$$\overline{U_i} \subset U'_i.$$

Покажем вначале, что наше утверждение верно для точек q из $\Gamma^u(U_i)$. Предположив противное, мы найдем последовательность точек

$$q_m \in \Gamma^u(U_i) \cap W^s(\pi_j)$$

с одним и тем же j и последовательность таких нормальных s-дисков $\mathcal{D}_m \subset W^s(\pi_j)$ с центрами в q_m, что

$$\angle(T_{q_m}\mathcal{D}_m, \mathcal{U}_i) \to 0, \quad m \to \infty \tag{25}$$

(здесь $\angle(\cdot)$ — угол между подпространствами). Пусть

$$q \in W^u(\pi_i, U'_i) \cap W^s(\pi_l)$$

— предельная точка последовательности q_m. Рассмотрим нормальный s-диск $\mathcal{D}$ в $W^s(\pi_l)$ с центром в точке q. Из трансверсальности следует, что

$$\alpha := \angle(T_q\mathcal{D}, \mathcal{U}_i) > 0.$$

Применяя лемму 7 (и уменьшая радиус $\mathcal{D}$, если необходимо), найдем такую последовательность дисков $\mathcal{D}'_m \subset W^s(\pi_j)$ с центрами в точках q_m, что

$$\mathcal{D}'_m \xrightarrow{C^1} \mathcal{D}.$$

Поэтому
$$\angle(T_q\mathcal{D}'_m, \mathcal{U}_i) > \frac{\alpha}{2}$$
при больших m, а это противоречит (25).

Следовательно, существует такое $\gamma_0 > 0$, что неравенство (24) верно для всех $q \in \Gamma^u(U_i)$ с γ_0 вместо γ. В случае $i \neq 0$ утверждение леммы вытекает теперь из λ-леммы.

Покажем, что оно верно и в случае точки π_0. Мы применим рассуждение, аналогичное основной части доказательства стандартной λ-леммы [14]. Отметим, что полный аналог λ-леммы для ϕ^{-1} в окрестности точки π_0 неверен (например, нельзя утверждать, что под действием ϕ^{-1} происходит равномерное растяжение дисков с малым наклоном к $\mathcal{S}'_0$).

Из наших предположений следует, что в соответствии с представлением $x = (y, z), y \in \mathcal{S}'_0, z \in \mathcal{U}_0$, мы можем записать производную $D\phi^{-1}(\pi_0)$ в виде
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$
и при этом выбрать координаты так, что
$$\|A^{-1}\| = 1, \quad b_0 := \|B\| < 1.$$

Выберем такое число $c > 0$, что $b_0 + 2c < 1$, и уменьшим, если необходимо, окрестность U_0 так, чтобы для точки $q \in U_0$ производная $D\phi^{-1}(q)$ представлялась в виде
$$\begin{bmatrix} A + f_1 & f_2 \\ f_3 & B + f_4 \end{bmatrix}$$
с $\|f_i\| < c$.

Так как подпространство $\mathcal{U}_0$ инвариантно относительно ϕ^{-1} в U_0, для выписанной выше матрицы при $q \in U_0$ выполнено равенство $f_2 = 0$.

Рассмотрим вектор $v = (v_y, v_z)$ с $v_y \neq 0$ и определим его наклон к $\mathcal{S}'_0$ равенством
$$I(v) = \frac{|v_z|}{|v_y|}.$$

Возьмем точку $q \in \mathcal{U}_0$ и подействуем на вектор $v = (v_y, v_z)$ с $v_y \neq 0$ матрицей $D\phi^{-1}(q)$. Оценим наклон вектора $v^1 = (v_y^1, v_z^1) = D\phi^{-1}(q)v$ к $\mathcal{S}'_0$. Очевидно,
$$|v_z^1| \leq |f_3 v_y| + |(B + f_4)v_z| \leq c|v_y| + b|v_z|,$$
где $b = b_0 + c$. Из равенства
$$A^{-1}v_y^1 = v_y + A^{-1}f_1 v_y$$

следует, что

$$|v_y^1| \geq (1-c)|v_y|,$$

поэтому

$$I(v^1) \leq \frac{b|v_z| + c|v_y|}{(1-c)|v_y|}. \tag{26}$$

Положим

$$\alpha = \frac{b}{1-c}, \quad \alpha_1 = \frac{c}{1-c}.$$

Из выбора c вытекает неравенство $\alpha < 1$.

Из (26) следует, что

$$I(v^1) \leq \alpha I(v) + \alpha_1,$$

поэтому если мы обозначим $v^k = D\phi^{-k}(q)v$ (и учтем, что $\phi^{-k}(q) \in U_0$ при $k > 0$), то справедливы оценки

$$I(v^k) \leq \alpha^k I(v) + \alpha_1(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{k-1}) \leq \alpha^k I(v) + \frac{\alpha_1}{1-\alpha}, \quad k > 0. \tag{27}$$

Пусть точка $q' \in W^u(\pi_0, U_0)$. Для нее существуют такие число $k \geq 0$ и точка $q \in \Gamma^u(U_0)$, что $q' = \phi^{-k}(q)$. Пусть $q \in W^s(\pi_i)$. Обозначим через $\mathcal{T}$ ортогональное дополнение к $\mathcal{U}_0 \cap T_q W^s(\pi_i)$ в точке $T_q W^s(\pi_i)$.

Как уже было показано выше, существует такое число γ_0 (зависящее только от $\Gamma^u(U_0)$), что $I(v) \leq \gamma_0$ для любого вектора $v \in \mathcal{T}$.

Так как $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{S}_0'$, $T_{q'} W^s(\pi_i)$ содержит подпространство $\mathcal{T}' = D\phi^{-k}\mathcal{T}$ с $\dim \mathcal{T}' = \dim \mathcal{S}_0'$. Из оценок (27) следует, что для любого ненулевого вектора $v \in \mathcal{T}'$ его наклон к $\mathcal{S}_0'$ ограничен сверху числом

$$\gamma_0 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha}$$

(на самом деле эти наклоны стремятся к нулю при $q' \to \pi_0$, но для дальнейшего нам достаточно их ограниченности).

Тем самым лемма 8 доказана. Докажем теперь лемму 3.

Из леммы 8 следует, что существует такая окрестность U_0 точки покоя π_0, что если точка q лежит в

$$\overline{\Gamma^u(U_0)} \cap W^s(\pi),$$

то существует нормальный s-диск $\mathcal{D} \subset W^s(\pi)$ с центром в q, для которого выполнено неравенство

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}_0') < \frac{\beta}{2}, \tag{28}$$

где $\beta = 4\gamma$ (здесь γ — константа из леммы 8).

Если утверждение леммы 3 неверно, найдется такая последовательность точек q_m, сходящаяся к точке
$$q \in \overline{\Gamma^u(U_0)},$$
что не существует описанных в лемме s-дисков с центрами в точках q_m. Пусть $q \in W^s(\pi)$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что все точки q_m лежат в устойчивом многообразии $W^s(\pi')$.

Применим (изменив в случае необходимости нумерацию точек покоя) лемму 5 и выберем окрестности U_i точек $\pi_i, i = 1, \dots, l+1$, в которых выполняются утверждения лемм 4 и 8. Из λ-леммы следует, что существуют такие числа t_i, зависящие только от U_i, что для любой точки
$$p \in W^u(\pi_i, U_i) \cap W^s(\pi_{i+1})$$
найдется число $t \in (0, t_i)$ со следующим свойством: через точку $p' = \phi^{-t}(p)$ проходит лежащий в $W^s(\pi_{i+1})$ нормальный s-диск $\mathcal{D}'_i$, удовлетворяющий неравенствам (21).

Поэтому мы будем считать, что точки q_i^u выбраны так, чтобы выполнялись неравенства (21) и
$$\operatorname{card}\{k \geq 0 : \phi^k(q_i^u) \in U_i\} \leq t_i. \tag{29}$$

Будем, кроме того, считать, что точки q_i^s удовлетворяют условию
$$\phi^{-1}(q_i^s) \notin U_i. \tag{30}$$

Так как времена χ_i и t_i зависят лишь от набора окрестностей $\{U_i\}$, мы можем повторить доказательство леммы 7, выбирая радиусы r_i дисков $\mathcal{D}'_i$ зависящими лишь от $\{U_i\}$. Это доказательство показывает, что для достаточно больших m существуют такие s-диски $\mathcal{D}_{0,m} \subset W^s(\pi')$ радиуса R (зависящего лишь от $\{U_i\}$) с центрами в точках q_m, что
$$\Delta(\mathcal{D}_{0,m}, \mathcal{S}'_0) \leq \beta$$
и
$$\mathcal{D}_{0,m} \subset \phi^{-\tau_{i,m}}(\mathcal{D}_{i,m}), \quad i = 1, \dots, l+1.$$

Рассмотрим две точки x и x', лежащие в диске $\mathcal{D}_{0,m}$ (где m столь велико, что $\mathcal{D}_{i,m}$ обладают свойствами, описанными в лемме 7). Обозначим
$$x_{i,m} = \phi^{\tau_{i,m}}(x), \quad x'_{i,m} = \phi^{\tau_{i,m}}(x').$$

Из леммы 4 следует, что
$$|\phi^k(x_{i,m}) - \phi^k(x'_{i,m})| \leq C_i \mu_i^k |x_{i,m} - x'_{i,m}|, \quad 0 \leq k \leq \kappa_{i,m},$$

при $i = 1, \ldots, l$ и

$$|\phi^k(x_{l+1,m}) - \phi^k(x'_{l+1,m})| \leq C_{l+1}\mu_{l+1}^k |x_{l+1,m} - x'_{l+1,m}|, \quad k \geq 0.$$

Дополним выбранный набор окрестностей точек покоя $\pi_0, \ldots, \pi_{l+1}$ окрестностями остальных точек из P и введем так называемую константу Биркгофа [15] для набора окрестностей $U_0, \ldots, U_N$ — число κ, для которого выполнено неравенство

$$\operatorname{card}\{k : \phi^k(x) \notin \bigcup_{i=1}^{N} U_i\} \leq \kappa$$

при любом $x \in \mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{L}$ — константа Липшица отображения ϕ в области $\mathcal{G}$.

Так как $q \in \overline{\Gamma^u(U_0)}$,

$$\phi^2(q) \notin \overline{U_0},$$

поэтому и

$$\phi^2(q_m) \notin \overline{U_0} \tag{31}$$

для больших m.

Положим $\theta_{0,m} = 0$, тогда в силу (29)–(31) справедлива оценка

$$\sum_{i=0}^{l} (\tau_{i+1,m} - \theta_{i,m}) \leq \kappa_0 := 2 + \kappa + \sum_{i=1}^{l} t_i,$$

при этом число κ_0, стоящее в правой части, зависит только от окрестностей U_i.

Пусть

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq N} \mu_i \quad \text{и} \quad C' = \max_{1 \leq i \leq N} C_i.$$

Стандартное рассуждение показывает, что для $x, x' \in \mathcal{D}_{0,m}$ при больших m выполнено неравенство (18) с

$$C = C' \mathcal{L}^{\kappa_0} \lambda^{-\kappa_0}$$

(см., например, [10, п. 2.2]).

Для завершения доказательства леммы 3 осталось заметить, что число возможных наборов точек $\pi_1, \ldots, \pi_{l+1}$ конечно.

Рассуждение, использованное при доказательстве леммы 3, соединенное с техникой статьи [13], позволяющей рассматривать окрестности базисных множеств вместо окрестностей гиперболических точек покоя, и с леммой 11 (см. ниже), показывает, что верно следующее утверждение (представляющее, на наш взгляд, самостоятельный интерес).

Теорема 5. *Пусть диффеоморфизм ϕ гладкого замкнутого многообразия M (с римановой метрикой d) структурно-устойчив. Тогда существуют такие константы $C, \Delta > 0$ и $\mu \in (0,1)$, что если для точек $p, q \in M$ выполнено неравенство*

$$d(p,q) < \Delta,$$

то существует такая точка $r \in M$, что

$$d(\phi^k(p), \phi^k(r)) \leq C\mu^k d(p,q), \quad k \geq 0,$$

и

$$d(\phi^k(q), \phi^k(r)) \leq C\mu^{-k} d(p,q), \quad k \leq 0.$$

Лемма 9. *Существуют числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, обладающие следующим свойством. По любому числу $\nu > 0$ можно указать такие окрестность U_0 точки покоя π_0 и число $R > 0$, что если точка q лежит в U_0, то существует такой u-диск $\mathcal{H}$ радиуса R с центром в точке q, что*

$$\Delta(\mathcal{H}, \mathcal{U}_0) < \nu.$$

Если при этом для точек $x, x' \in \mathcal{H}$ выполнены включения $\phi^k(x), \phi^k(x') \in U_0$ при $k_0 \leq k \leq 0$, то

$$|\phi^k(x) - \phi^k(x')| \leq C\lambda^{-k}|x - x'|$$

для $k_0 \leq k \leq 0$.

Доказательство этого утверждения сводится к следующей лемме, доказанной в [16] (см. теорему 1.4.1).

Лемма 10. *Рассмотрим систему вида*

$$\dot{y} = Ay + Y(t,y,z), \quad \dot{z} = Bz + Z(t,y,z), \tag{32}$$

где собственные числа λ_i матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i \geq 0$, а собственные числа λ_i матрицы B удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Предположим, что $Y(t,0,0) = 0, Z(t,0,0) = 0$.

Тогда найдутся такие константы $C, l_0 > 0$, $\lambda \in (0,1)$, зависящие только от матриц A и B, что если Y и Z удовлетворяют условию Липшица по y и z с константой $l \leq l_0$, то в подпространстве $\{t = 0\}$ существует поверхность, задаваемая уравнением $y = g(z)$ с $g(0) = 0$ и обладающая следующим свойством.

Функция g имеет константу Липшица, не превосходящую Cl, и если $(y(t), z(t))$ — такое решение системы (32), что $y(0) = g(z(0))$, то выполнено неравенство

$$|(y(t), z(t))| \leq C\lambda^t |(y(0), z(0))|, \quad t \geq 0.$$

Доказательство (леммы 9). Сделав замену t на $-t$ в системе (4), мы получаем в окрестности точки покоя π_0 систему вида

$$\dot{y} = Ay + Y(y,z), \quad \dot{z} = Bz + Z(y,z), \tag{33}$$

в которой матрицы A и B удовлетворяют предположениям леммы 10 и выполнены равенства $Y(0,0) = 0, Z(0,0) = 0$. Найдем по матрицам A и B соответствующие константы $C, l_0 > 0$, $\lambda \in (0,1)$.

Фиксируем произвольное $\nu > 0$ и найдем такое $l' \in (0, l_0)$, что $Cl' < \nu$. Существуют окрестности U_0, V' и V точки покоя π_0, число $R > 0$ и функции $Y'(y,z), Z'(y,z)$ со следующими свойствами:

- функции Y' и Z' совпадают соответственно с Y и Z в V';
- функции Y' и Z' тождественно равны нулю вне V, и их константы Липшица в $\mathbf{R}^n$ меньше l';
- окрестность U_0 радиуса CR лежит в V'.

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay + Y'(y,z), \quad \dot{z} = Bz + Z'(y,z). \tag{34}$$

Предположим, что решение $\chi(t)$ системы (4) с $q = \chi(0) \in U_0$ таково, что $\chi(t) \in U_0$ при $0 \le t \le T$. Тогда $\chi(t)$ является решением системы (34) при $0 \le t \le T$. Пусть $q = (q_y, q_z)$. Замена $x = \xi + \chi(t)$ приводит систему (34) к виду (32), переводит решение $\chi(t)$ в начало координат и не меняет констант Липшица у нелинейностей.

Следовательно, существует поверхность $y = g(z)$, обладающая описанными в лемме 10 свойствами. Ясно, что

$$\mathcal{H} = \{(q_y + g(z - q_z), z) : |z - q_z| < R\}$$

— требуемый u-диск.

Замечание 2. Леммы 3 и 9 доказаны для случая отображения $\phi(x) = \Phi(1,x)$. Легко понять, что они справедливы и в случае отображения $\phi(x) = \Phi(T,x)$ с произвольным $T \ge 1$; в этом случае константы C в соответствующих неравенствах зависят от T, а константа λ заменяется на λ^T.

Следующее техническое утверждение является стандартным; мы приводим его доказательство потому, что в дальнейшем нам нужны получаемые в нем явные оценки.

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{D}$ — такой s-диск радиуса R с центром в точке $q \in U_0$, что*

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}'_0) \le a,$$

а $\mathcal{H}$ — такой u-диск радиуса R с центром в точке $p \in U_0$, что

$$\Delta(\mathcal{H}, \mathcal{U}_0) \leq b.$$

Предположим, что

$$ab < 1. \tag{35}$$

Тогда существует такое положительное число H, зависящее лишь от a и b, что если

$$\rho := |p - q| \leq \rho_0 := \frac{R}{H},$$

то найдется точка $s \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}$, для которой выполнены неравенства

$$|p - s|, |q - s| \leq H\rho. \tag{36}$$

Доказательство. Найдем такое положительное число c, что

$$b(a + c) + c < 1. \tag{37}$$

Положим

$$H_0 = \frac{\max\{1, a + c\}}{c} \quad \text{и} \quad H = \max\{(1 + a), (1 + b)\}H_0.$$

Пусть $\rho \leq \rho_0$. Будем, как и выше, писать $p = (p_y, p_z)$ и $q = (q_y, q_z)$.

Введем число $\rho' = \rho/c$ и рассмотрим множество

$$Y_{\rho'}(q) = \{y : |y - q_y| < \rho'\}.$$

Пусть диск $\mathcal{D}$ задается отображением f на множестве

$$Y_R(q) = \{y : |y - q_y| < R\}.$$

Из выбора H_0 и ρ_0 следует, что $\rho' \leq R$.

Для $y \in Y_{\rho'}(q)$ выполнено неравенство

$$|f(y) - f(q_y)| < a\rho'.$$

Так как $f(q_y) = q_z$,

$$|f(y) - p_z| < a\rho' + |p - q| = \rho'' := \rho\frac{a + c}{c}.$$

Пусть диск $\mathcal{H}$ задается отображением g на множестве

$$Z_R(p) = \{z : |z - p_z| < R\}.$$

Из выбора H_0 и ρ_0 следует, что $\rho'' \leq R$. Для $z \in Z_{\rho''}(p)$ выполнено неравенство

$$|g(z) - g(p_z)| < b\rho'',$$

поэтому из неравенства (37) вытекает оценка

$$|g(z) - q_y| < b\rho'' + |p - q| = \rho\frac{b(a+c)+c}{c} < \rho'.$$

Следовательно, суперпозиция $g \circ f$ отображает множество $Y_{\rho'}(q)$ в себя. Из (35) следует, что в $Y_{\rho'}(q)$ есть единственная неподвижная точка s_y отображения $g \circ f$. Обозначим $s_z = f(s_y)$ и $s = (s_y, s_z)$.

Ясно, что $s \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}$. Из неравенств

$$|s - p| \leq (1+b)\rho'' \quad \text{и} \quad |s - q| \leq (1+a)\rho'$$

следует неравенство (36).

Лемма 12. *Для любой достаточно малой окрестности U^0 точки покоя π_0 найдутся такие числа τ и d^0, что если $\xi = \{x_k : k \geq 0\}$ — d^0-псевдотраектория отображения ϕ в $\mathcal{G}$ и $x_m \in U^0$, а $x_{m-1} \notin U^0$, то $m \leq \tau$.*

Доказательство. Пусть U_0 — окрестность π_0, а y и z — координаты соответственно в $\mathcal{S}'_0$ и в $\mathcal{U}_0$.

Введем обозначения

$$Y(c) = \{y : |y| < c\}, \quad Y'(c) = \mathcal{S}'_0 \setminus Y(c), \quad Z(c) = \{z : |z| < c\}$$

для достаточно малого $c > 0$.

Будем параметризовать окрестность U^0 параметром $\alpha > 0$. Так как

$$W^s(\pi_0) \cap W^u(\pi_i) = \varnothing \quad \text{при } i = 1, \ldots, N,$$

существует число $a > 0$, обладающее следующим свойством. Для любого достаточно малого $\alpha > 0$ найдется такое $\tau = \tau(\alpha)$, что

$$\operatorname{dist}(\phi^{-\tau}(x), \mathcal{G}) \geq 3a$$

для $x \in (W^s(\pi_0) \cap U_0) \setminus (Y(\alpha) \times \{0\})$.

Для любого малого $\alpha > 0$ найдем такое $\beta = \beta(\alpha) \in (0, \alpha)$, что

$$\operatorname{dist}(\phi^{-\tau}(x), \mathcal{G}) \geq 2a$$

для $x \in U_0 \cap (Y'(\alpha) \times Z(\beta))$.

Из наших предположений о структуре ϕ в окрестности U_0 следует, что если α достаточно мало, то найдется такое $\beta_1 = \beta_1(\alpha) > 0$, что

$$\phi^{-1}(Y(\alpha) \times Z(\beta)) \subset S_0' \times Z(\beta - \beta_1).$$

Рассмотрим окрестность U^0 вида $Y(\alpha) \times Z(\beta)$ со столь малым $\alpha > 0$, чтобы выполнялись сформулированные выше свойства и, кроме того, чтобы β_1-окрестность множества $\phi^{-1}(U^0)$ лежала в U_0.

Будем считать, что число $\mathcal{L}$ — общая константа Липшица для ϕ и ϕ^{-1} в $\mathcal{G}$.

Пусть $\xi = \{x_k : k \geq 0\}$ — d^0-псевдотраектория отображения ϕ в $\mathcal{G}$ с $\mathcal{L}d^0 < \beta_1$ и пусть $x_m \in U^0$, а $x_{m-1} \notin U^0$. Будем считать, кроме того, что d^0 выбрано столь малым, что выполняется следующее свойство: если $k \geq \tau$, то

$$|\phi^{-\tau}(x_k) - x_{k-\tau}| < a.$$

Обозначим $\phi^{-1}(x_m) = (y, z)$ и $x_{m-1} = (y', z')$. Из неравенств

$$|\phi^{-1}(x_m) - x_{m-1}| \leq \mathcal{L}|x_m - \phi(x_{m-1})| < \mathcal{L}d^0 < \beta_1$$

и $|z| \leq \beta - \beta_1$ следует, что $|z'| < \beta$. Поэтому $|y'| \geq \alpha$ (напомним, что по нашему предположению $(y', z') \notin U^0$). Следовательно, $x_{m-1} \in U_0 \cap (Y'(\alpha) \times Z(\beta))$.

Докажем, что $m \leq \tau$. В противном случае $m' := m - 1 - \tau \geq 0$, и в силу выбора d^0 выполнено неравенство

$$|\phi^{-\tau}(x_{m-1}) - x_{m'}| < a,$$

из которого следует, что

$$\operatorname{dist}(x_{m'}, \mathcal{G}) \geq a,$$

а это противоречит включению $\xi \subset \mathcal{G}$. Лемма 12 доказана. •

Будем ниже обозначать через $N_a(X)$ a-окрестность множества X.

Лемма 13. *По любой окрестности U_0 точки покоя π_0 и по любому $\delta > 0$ можно указать ее окрестности U^0 и U и положительное число d^0, обладающие следующим свойством. Если $\xi = \{x_k : k \geq 0\}$ — d^0-псевдотраектория отображения*

ϕ в $\mathcal{G}$, для которой существует такой номер m, что $x_{m-1} \in U^0$, а $x_m \notin U^0$, то найдется такое число $l > m$, что $x_k \in U_0$ при $m \le k \le l$ и

$$x_l \in Q := N_{2\delta}(\Gamma^u(U)).$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что окрестность U_0 столь мала, что в ней система (4) топологически сопряжена с системой (8) (см. доказательство леммы 1). Пусть h — гомеоморфизм, топологически сопрягающий потоки Φ и Ψ, и пусть $\psi = h \circ \phi \circ h^{-1}$.

Найдем (уменьшая δ в случае необходимости) такую окрестность V_0 начала координат, что

$$N_\delta(h^{-1}(V_0)) \subset U_0. \tag{38}$$

Линейная система вида

$$\dot{x} = Cx,$$

у которой матрица C гиперболическая, топологически сопряжена с системой вида

$$\dot{x_1} = -x_1, \quad \dot{x_2} = x_2,$$

поэтому из вида системы (8) следует, что окрестность V_0 можно выбрать траекторно выпуклой относительно диффеоморфизма ψ, т.е. такой, что если $\psi^l(x), \psi^m(x) \in V_0$, то $\psi^k(x) \in V_0$ для $l < k < m$.

Найдем теперь такую окрестность U, что

$$h(N_{2\delta}(U)) \subset V_0. \tag{39}$$

Обозначим

$$Q' = N_\delta(\Gamma^u(U)).$$

Очевидно, h отображает фундаментальную область $\Gamma^u(U)$ относительно отображения ϕ на фундаментальную область в $W^u(0)$ для окрестности $h(U)$ относительно ψ. Пусть $W_l^s(0)$ — локальное устойчивое многообразие начала координат для системы (8). Повторяя стандартное рассуждение для случая гиперболической точки покоя [17] и используя вид системы (8), легко показать, что при любом $\delta > 0$ множество

$$W_l^s(0) \cup \left(\bigcup_{k \ge 0} \psi^{-k}(h(Q')) \right)$$

содержит окрестность $V(\delta)$ точки покоя π_0.

Найдем такое $\alpha > 0$ (зависящее от δ), чтобы окрестность вида

$$U^0 = Y(\alpha) \times Z(\alpha)$$

(см. доказательство предыдущей леммы) обладала следующим свойством:

$$h\left(\overline{N_\alpha(\phi(U^0))}\right) \subset V(\delta).$$

Множество

$$Q'' = \overline{h\left(N_\alpha(\phi(U^0)) \setminus (\mathcal{S}_0' \times Z(\alpha))\right)}$$

является компактным подмножеством $V(\delta)$, не пересекающимся с $W_l^s(0)$, поэтому оно покрывается конечным числом множеств $\psi^{-k}(h(Q'))$. Следовательно, существует такое τ (зависящее от U^0 и U), что если $h(x) \in Q''$, то найдется $l \le \tau$, для которого выполнено включение

$$\psi^l(h(x)) \in h(Q'). \tag{40}$$

Поэтому для любого

$$x \in N_\alpha(\phi(U^0)) \setminus (\mathcal{S}_0' \times Z(\alpha)) \tag{41}$$

найдется $l \le \tau$, для которого $\phi^l(x) \in Q'$.

Для достаточно малого $\alpha > 0$ найдется такое $\alpha_1 > 0$, что

$$\phi(U^0) \subset Y(\alpha - \alpha_1) \times \mathcal{U}_0. \tag{42}$$

Возьмем $d^0 < \min(\alpha_1, \delta)$ и рассмотрим d^0-псевдотраекторию $\xi = \{x_k : k \ge 0\}$ отображения ϕ. Будем, кроме того, считать, что если ξ — d^0-псевдотраектория, то выполнены неравенства

$$|\phi^k(x_m) - x_{k+m}| < \delta$$

при $0 \le k \le \tau$.

Если $x_{m-1} \in U^0$, то $x_m \in N_\alpha(\phi(U^0))$. Обозначим $x_m = (y_m, z_m)$. Из (42) следует, что если $x_m \notin U^0$, то $|z_m| \ge \alpha$, поэтому для x_m выполнено включение (41).

Так как окрестность V_0 траекторно выпукла относительно ψ, для любой точки x, для которой выполнены включения (41) и (40), выполнены и включения $h(\phi^k(x)) \in V_0$ при $0 \le k \le l$, а тогда из (38) следует, что

$$N_\delta(\phi^k(x)) \subset h^{-1}(V_0) \subset U_0, \quad 0 \le k \le l.$$

Таким образом, U, U^0 и d^0 — искомые. Лемма доказана.

Лемма 14. *По любой окрестности U точки покоя π_0 можно указать ее окрестность U^0 и положительные числа δ и d^0, обладающие следующим свойством. Если $\xi = \{x_k : k \ge 0\}$ — d^0-псевдотраектория отображения ϕ в $\mathcal{G}$, для которой $x_0 \in Q$ (где множество Q введено в предыдущей лемме), то $x_k \notin U^0$ при $k \ge 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}(x)$ — функция из условия (I). Для каждого $\delta > 0$ выберем такие окрестности $U^i = U^i(\delta)$ и $V^i = V^i(\delta)$ точек π_i, что

$$U^i \subset N_\delta(\pi_i) \quad \text{и} \quad N_\delta(U^i) \subset V^i.$$

Выберем положительные числа δ и a со следующими свойствами. Если

$$v' = \sup_{x\in Q} \mathcal{V}(x), \quad v^0 = \inf_{x\in U^0} \mathcal{V}(x)$$

и

$$v^i = \sup_{x\in V^i} \mathcal{V}(x), \quad i = 1, \dots, N,$$

то

$$\max(v', v^1, \dots, v^N) + a < v^0.$$

Обозначим

$$U' = \bigcup_{i=0}^{N} U^i.$$

Найдем такое число κ, что для любого $x \in \mathcal{G}$ существует $l \in [0, \kappa]$ со свойством $\phi^l(x) \in U'$.

Будем считать, что δ таково, что для $x, x' \in \mathcal{G}$ из неравенства

$$|x - x'| < \delta$$

следует неравенство

$$|\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x')| < a.$$

Выберем число d^0 так, чтобы для любой d^0-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ выполнялись неравенства

$$|\phi^k(x_m) - x_{k+m}| < \delta$$

для любых $m \geq 0$ и для $0 \leq k \leq \kappa + 1$.

Предположим, что для d^0-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ выполнено включение $x_0 \in Q$. Найдем такое число $l_1 \in [0, \kappa]$, что $y_1 := \phi^{l_1}(x_0) \in U'$ и $\phi^k(x_0) \notin U'$ при $0 \leq k < l_1$. Так как $\mathcal{V}(y_1) < v' < v^0$, то $y_1 \in U^i$ при некотором $i \neq 0$.

В силу выбора d^0 выполнено неравенство

$$|y_1 - x_{l_1}| < \delta.$$

Следовательно, $x_{l_1} \in V^i$ и $\mathcal{V}(x_{l_1}) \leq v^i$.

Если $x_k \in U^i$ при $k \geq l_1$, то $x_k \notin U^0$ при $k \geq 0$. В противном случае найдется такое число $m_1 \geq l_1$, что $x_{m_1} \in U^i$ и $z_1 := x_{m_1+1} \notin U^i$.

Из неравенств $\mathcal{V}(x_{m_1}) \leq v^i$ и

$$|\mathcal{V}(\phi(x_m)) - \mathcal{V}(z_1)| < a$$

следует, что $\mathcal{V}(z_1) < v^i + a$. Найдем такое число $l_2 \in [0, \kappa]$, что $y_2 := \phi^{l_2}(z_1) \in U'$ и $\phi^k(z_1) \notin U'$ при $0 \leq k < l_2$. Так как $\mathcal{V}(y_2) < v^i + a < v^0$, то $y_2 \in U^j$ при некотором $j \neq 0$ и т. д.

Продолжая этот процесс, мы покажем, что $x_k \notin U^0$ при $k \geq 0$.

Лемма доказана.

§3. Доказательства основных теорем

Докажем теорему 1.

Применим лемму 1 и найдем окрестность U_0 точки покоя π_0, в которой ϕ обладает свойством отслеживания.

Выберем такое $\nu > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\nu\beta < 1 \tag{43}$$

(здесь β — число, введенное в лемме 3). Уменьшим, если необходимо, окрестность U_0 так, чтобы в ней выполнялось утверждение леммы 9 с выбранным числом ν. Найдем, используя лемму 11, число H, соответствующее $a = \nu$ и $b = \beta$.

По окрестности U_0 выберем такие окрестность U и число δ, что

$$N_{2\delta}(U) \subset U_0,$$

и выполнены утверждения лемм 3 и 13 (пусть U^0, d^0 — соответствующие окрестность и константа из леммы 13). Уменьшая, в случае необходимости, константы R, δ и C и увеличивая λ, будем считать, что для U_0 и U выполнены утверждения лемм 3 и 9 с этими R, δ, λ и C. Кроме того, будем считать, что выполнено неравенство

$$2\delta < \frac{R}{H}. \tag{44}$$

Уменьшим, в случае необходимости, окрестность U^0 и константы δ, d^0 так, чтобы для них выполнялось утверждение леммы 14. Уменьшим, наконец, d^0 и U^0 так, чтобы выполнялось утверждение леммы 12.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и, не ограничивая общности, будем считать, что

$$(1 + 2HC)\delta < \varepsilon. \tag{45}$$

Так как во всех использованных утверждениях можно уменьшать число d^0 (не меняя τ из леммы 12), из леммы 1 следует, что можно выбрать число d^0 так, чтобы оно обладало следующим свойством: если для d^0-псевдотраектории $\xi = \{x_k : k \geq 0\}$ выполнены включения

$$x_k \in U_0, \quad \tau \leq k \leq m,$$

или

$$x_k \in U_0, \quad \tau \leq k < \infty, \tag{46}$$

то найдется такая точка y, что

$$|\phi^k(y) - x_k| < \delta \tag{47}$$

при $0 \le k \le m$ в первом случае и при $0 \le k < \infty$ во втором.

Кроме того, из теоремы 3 вытекает, что можно выбрать число d^0 так, что если для d^0-псевдотраектории $\xi = \{x_k : k \ge 0\}$ выполнены включения

$$x_k \notin U^0, \quad 0 \le k < \infty, \tag{48}$$

то найдется такая точка z, что

$$|\phi^k(z) - x_k| < \delta, \quad 0 \le k < \infty.$$

Покажем, что это d^0 искомое. Рассмотрим d^0-псевдотраекторию $\xi = \{x_k : k \ge 0\} \subset \mathcal{G}$.

Если выполнено одно из включений (46) или (48), то наше утверждение тривиально. Таким образом, остается рассмотреть лишь случай, когда существуют такие индексы l и l', что

$$x_l \in U^0, \quad x_{l'} \notin U_0.$$

Если $x_k \in U_0$ при $k > l$, то из леммы 12 следует, что выполнено включение (46), поэтому можно считать, что $l' > l$.

Из сказанного выше и из леммы 13 вытекает, что остается рассмотреть лишь случай, когда существуют такие индексы l, m и v, что $l \le \tau$,

$$x_{l-1} \notin U^0; \quad x_k \in U^0, \; l \le k \le m-1; \tag{49}$$

$$x_m \notin U^0; \quad x_k \in U_0, \; m \le k \le v; \quad x_v \in N_\delta(\Gamma^u(U)). \tag{50}$$

Найдем такую точку y, что выполнены неравенства (47) при $0 \le k \le v$.

По лемме 14, $x_k \notin U^0$ при $k \ge v$, поэтому существует такая точка z, что

$$|\phi^k(z) - x_{k+v}| < \delta, \quad 0 \le k < \infty.$$

Обозначим $y' = \phi^v(y)$. Из включений

$$y' \in N_{2\delta}(\Gamma^u(U)) \subset U_0$$

и из леммы 9 следует, что существует такой u-диск $\mathcal{H}$ радиуса R, содержащий y', что

$$\Delta(\mathcal{H}, \mathcal{U}_0) \le \nu.$$

Так как

$$z \in N_{2\delta}(\Gamma^u(U)),$$

то из леммы 3 следует, что существует такой s-диск $\mathcal{D}$ радиуса R, содержащий z, что

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}'_0) \leq \beta.$$

Неравенства $|y' - z| < 2\delta$, (44) и лемма 11 показывают, что существует точка $x' \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$, для которой выполнены неравенства

$$|x' - y'|, |x' - z| \leq 2H\delta.$$

Так как

$$|\phi^k(x') - \phi^k(y')| \leq C\lambda^{-k}|x' - y'|, \quad -v \leq k \leq 0,$$

и

$$|\phi^k(x') - \phi^k(z)| \leq C\lambda^k|x' - z|, \quad 0 \leq k \leq \infty,$$

то для точки $x = \phi^{-v}(x')$ выполнены неравенства

$$|\phi^k(x) - x_k| \leq (1 + 2HC)\delta < \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Положим $T_0 = T_1$ (из утверждения (2) теоремы 3) и рассмотрим для $T \geq T_0$ функцию

$$\rho_0(T) = \min(\rho_1(T), \exp(-T\lambda'), \lambda^{-T})$$

(где число λ' введено перед леммой 2, а число λ введено в леммах 3 и 9 для $\phi(x) = \Phi(1, x)$). Отметим, что выражение, стоящее в правой части последней формулы, не зависит от происходящего ниже выбора окрестностей точки π_0. Действительно, в замечании 1 отмечалось, что T_1 и ρ_1 не зависят от окрестности U_0; число λ в леммах 3 и 9 также не зависит от U_0.

Рассмотрим число $T \geq T_0$ и введем отображение $\phi(x) = \Phi(T, x)$. Фиксируем такие $r > 1$, $p \geq 1$, что

$$\rho = r^{1/p} \in (1, \rho_0(T)).$$

Выберем для ϕ, повторяя доказательство теоремы 1, окрестности U_0, U, U^0 точки покоя π_0 и числа H, δ, d^0 так, чтобы для них выполнялись утверждения лемм 3 (с числом ν, удовлетворяющим неравенству (43)), 9, 11 (с числом H, соответствующим β и ν), 12–14. Будем обозначать через C и λ_T соответствующие константы в неравенствах лемм 3 и 9 (в силу замечания 2 $\lambda_T = \lambda^T$, поэтому из выбора $\rho_0(T)$ следует неравенство $r\lambda_T^p < 1$).

Из утверждения (2) теоремы 3 и из леммы 2 следует, что мы можем выбрать U_0 и U^0 так, чтобы отображение ϕ обладало свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания в U_0 и в $\mathcal{G} \setminus U^0$ с одними и теми же константами L_1 и δ_1.

Отметим, что если для последовательности $\xi = \{x_k\}$ выполнено неравенство $\|d(\xi)\|_{r,p} \leq d$, то ξ — d-псевдотраектория ϕ. Поэтому те же соображения, что и в доказательстве теоремы 1, показывают, что достаточно рассматривать псевдотраектории ξ с

$$\|d(\xi)\|_{r,p} \leq \delta_2,$$

где

$$\delta_2 = \min(d^0, \frac{\delta}{L_1}, \delta_1),$$

для которых существуют такие индексы l, m и v, что $l \leq \tau$ и выполнены соотношения (49) и (50). Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что $x_k \in U_0$ при $0 \leq k \leq v$. Из леммы 14 следует, что и $x_k \in \mathcal{G} \setminus U^0$ при $k \geq m$.

Используя лемму 2, найдем такую точку y, что

$$\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k \gamma_k^p(y, \xi) \right)^{1/p} \leq L_1 \left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k d_k^p(\xi) \right)^{1/p}.$$

Положим $y' = \phi^{v-1}(y)$ и $y'' = \phi^v(y)$.

Так как

$$|\phi^v(y) - x_v| < L_1 \delta_2 < \delta,$$

то выполнено включение

$$y'' \in N_{2\delta}(\Gamma^u(U)) \subset U_0.$$

По лемме 3 существует такой s-диск $\mathcal{D}$ радиуса R с центром в точке y'', что

$$\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{S}_0') \leq \beta.$$

Используя утверждение (2) теоремы 3, найдем такую точку z, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \gamma_k^p(z, \xi') \right)^{1/p} \leq L_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k d_k^p(\xi') \right)^{1/p}.$$

Так как

$$|z - x_v| < L_1 \delta_2 < \delta,$$

то выполнено включение

$$x \in N_{2\delta}(\Gamma^u(U)).$$

По лемме 9 существует такой u-диск $\mathcal{H}$ радиуса R с центром в точке z, что

$$\Delta(\mathcal{H}, \mathcal{U}_0) \leq \nu.$$

Из леммы 11 следует, что существует такая точка x', лежащая в $\mathcal{D}\cap\mathcal{H}$, что

$$|x'-y''|, |x'-z| \le \Delta := H|y''-z|.$$

Оценим величину $|y''-z|$:

$$|y''-z| \le |y''-\phi(x_{v-1})| + |\phi(x_{v-1})-x_v| + |x_v-z|.$$

Так как

$$|y''-\phi(x_{v-1})| = |\phi^v(y)-\phi(x_{v-1})| \le \mathcal{L}|\phi^{v-1}(y)-x_{v-1}|,$$

где $\mathcal{L}$ — константа Липшица отображения ϕ, то справедлива оценка

$$|y''-z| \le \mathcal{L}\gamma_{v-1}(y,\xi) + d_{v-1}(\xi) + \gamma_0(z,\xi'). \tag{51}$$

Положим $x=\phi^{-v}(x')$. Так как $x, x' \in \mathcal{H}$, то выполнены неравенства

$$|\phi^k(x')-\phi^k(y'')| \le C\lambda_T^{-k}|x'-y''|, \quad 0 \ge k \ge -v.$$

Следовательно,

$$|\phi^k(x)-\phi^k(y)| \le C\lambda_T^{v-k}|x'-y''| \le C\lambda_T^{v-k}\Delta$$

при $0 \le k \le v$.

Оценим

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k\gamma_k^p(x,\xi)\right)^{1/p} \\
&\quad\le \left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k\gamma_k^p(y,\xi)\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k|\phi^k(x)-\phi^k(y)|^p\right)^{1/p} \\
&\quad\le L_1\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k d_k^p(\xi)\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k(C\lambda_T^{v-k}\Delta)^p\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Так как $r\lambda_T^{-p} > 1$, то последнее слагаемое в (52) не превосходит

$$C\Delta\lambda_T^v\left(\frac{r^v\lambda_T^{-vp}}{r\lambda_T^{-p}-1}\right)^{1/p} = C_1\Delta r^{v/p},$$

где

$$C_1 = \frac{C}{\left(r\lambda_T^{-p}-1\right)^{1/p}}.$$

Так как

$$
\begin{aligned}
&r^{v/p}d_{v-1}(\xi) = r^{1/p}r^{\frac{v-1}{p}}d_{v-1}(\xi) \le r^{1/p}\|d(\xi)\|_{r,p},\\
&r^{v/p}\gamma_{v-1}(y,\xi) \le r^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k\gamma_k^p(y,\xi)\right)^{1/p} \le L_1 r^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k d_k^p(\xi)\right)^{1/p}\\
&\le L_1 r^{1/p}\|d(\xi)\|_{r,p}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&r^{v/p}\gamma_0(z,\xi') \le r^{v/p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\gamma_k^p(z,\xi')\right)^{1/p}\\
&\le L_1 r^{v/p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k d_k^p(\xi')\right)^{1/p} = L_1 r^{v/p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k d_{k+v}^p(\xi)\right)^{1/p} = L_1\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k d_k^p(\xi)\right)^{1/p}\\
&\le L_1\|d(\xi)\|_{r,p},
\end{aligned}
$$

то из (51) следует оценка

$$
\Delta r^{v/p} \le L_2\|d(\xi)\|_{r,p}, \tag{53}
$$

где

$$
L_2 = H\left(\mathcal{L}L_1 r^{1/p} + r^{1/p} + L_1\right).
$$

Теперь из (52) и (53) следует, что

$$
\left(\sum_{k=0}^{v-1} r^k\gamma_k^p(x,\xi)\right)^{1/p} \le L_3\|d(\xi)\|_{r,p}, \tag{54}
$$

где

$$
L_3 = L_1 + C_1 L_2.
$$

Оценим

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k\gamma_k^p(x,\xi)\right)^{1/p}\\
&\qquad\le \left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k|\phi^k(x)-\phi^{k-v}(z)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k|\phi^{k-v}(z)-x_k|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{55}
$$

Первое слагаемое в (55) оценивается так (мы учитываем, что $r\lambda_T^p < 1$):

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} r^k|\phi^k(x) - \phi^{k-m}(z)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=m}^{\infty} r^k|\phi^{k-m}(x') - \phi^{k-v}(z)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq r^{v/p}\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^{k-v}\left(C\lambda_T^{k-v}\Delta\right)^p\right)^{1/p} = C_2\Delta r^{v/p},$$

где

$$C_2 = C\frac{1}{(1 - r\lambda_T^p)^{1/p}}.$$

Преобразуем второе слагаемое в (55) к виду

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} r^{l+v}|\phi^l(z) - x_l'|^p\right)^{1/p} = r^{v/p}\left(\sum_{l=0}^{\infty} r^l\gamma_l^p(z, \xi')\right)^{1/p}.$$

Из оценки

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} r^l\gamma_l^p(z, \xi')\right)^{1/p}$$
$$\leq L_1\left(\sum_{l=0}^{\infty} r^l d_l^p(\xi')\right)^{1/p}$$
$$= L_1\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^{k-v}|\phi(x_{k-v}') - x_{k-v+1}'|^p\right)^{1/p} = L_1 r^{-\frac{v}{p}}\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k|\phi(x_k) - x_{k+1}|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq L_1 r^{-\frac{v}{p}}\|d(\xi)\|_{r,p}$$

следует, что второе слагаемое в (55) не превосходит $L_1\|d(\xi)\|_{r,p}$. Таким образом, учитывая (53), мы приходим к оценке

$$\left(\sum_{k=v}^{\infty} r^k\gamma_k^p(x, \xi)\right)^{1/p} \leq L_4\|d(\xi)\|_{r,p}, \tag{56}$$

где

$$L_4 = L_1 + C_2L_2.$$

Из оценок (54) и (56) следует оценка

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\gamma_k^p(x, \xi)\right)^{1/p} \leq (L_3^p + L_4^p)^{1/p}\,\|d(\xi)\|_{r,p},$$

завершающая доказательство теоремы 2.

§4. Задача Чэфи–Инфанте

Обозначим через H_0^1 подпространство $H^1(0,\pi)$, состоящее из функций, обращающихся в 0 при $x = 0$ и $x = \pi$, с нормой $\|v\|_1 = \|v_x\|_{L^2(0,\pi)}$.

Рассмотрим задачу (1)–(3) с нелинейностью $f \in C^2$, предполагая, что f удовлетворяет следующим условиям:

(c1) $f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$;

(c2) $uf''(u) > 0$ при $u \neq 0$;

(c3) $\overline{\lim}_{u\to\pm\infty} \frac{f(u)}{u} \geq 0$.

Известно [18], что при условиях (c1)–(c3) задача (1)–(3) порождает полугруппу операторов $S(t)$ в H_0^1 такую, что $u(x,t) = S(t)u_0(x)$, и полугруппа $S(t)$ имеет глобальный аттрактор в H_0^1.

Напомним, что множество $\mathcal{A}$ называется глобальным аттрактором полугруппы $S(t)$ в H_0^1, если $\mathcal{A}$ — компактное подмножество H_0^1, обладающее следующими свойствами:

(a1) $\mathcal{A}$ инвариантно, т.е. $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для $t \in \mathbf{R}$;

(a2) $\mathcal{A}$ равномерно глобально притягивает, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ограниченного множества B существует такое $T > 0$, что

$$\operatorname{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) < \varepsilon \quad \text{для } t \geq T$$

(здесь dist — расстояние, порожденное нормой $\|\cdot\|_1$).

Запишем задачу (1)–(3) в виде эволюционного уравнения

$$\dot{u} = Au + f^*(u), \quad u(0) = u_0. \tag{57}$$

Известно [19], что при наших предположениях о нелинейности f можно так модифицировать эволюционное уравнение (57) вне достаточно большого шара пространства H_0^1, чтобы модифицированное уравнение обладало гладким конечномерным положительно инвариантным многообразием $\mathcal{M}$ (так называемым инерциальным многообразием), которое строится следующим образом.

Существуют такие ортогональный проектор P со свойством $PA = AP$ и с конечномерным пространством PH_0^1 и C^1-отображение $\mathcal{F} : PH_0^1 \to (I - P)H_0^1$, что многообразие $\mathcal{M}$ (график $\mathcal{F}$) имеет следующие свойства:

(i1) $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \quad t \geq 0$;

(i2) $\mathcal{M}$ экспоненциально притягивает, т.е. для любого ограниченного множества $B \subset H_0^1$ существуют такие положительные константы C, α (зависящие от B), что

$$\operatorname{dist}(S(t)u, \mathcal{M}) \leq C \exp(-\alpha t) \operatorname{dist}(u, \mathcal{M}) \tag{58}$$

для $u \in B$ и $t \geq 0$.

Ясно, что если инерциальное многообразие $\mathcal{M}$ существует, то оно содержит глобальный аттрактор $\mathcal{A}$.

Заметим, что при упомянутой выше модификации уравнения (57) траектории полугруппы $S(t)$ и „модифицированной полугруппы" $S'(t)$, начинающиеся в окрестности глобального аттрактора $\mathcal{A}$, совпадают. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $S(t)$ обладает инерциальным многообразием.

Фиксируем такое число $T > 0$, что

$$\nu = C\exp(-\alpha T) < 1. \tag{59}$$

Определим оператор $\sigma(u) = S(T)u$.

Рассмотрим $u_0 \in H_0^1$, положим $p_0 = Pu_0$ и обозначим через $p(t, p_0)$ решение конечномерной системы дифференциальных уравнений на PH_0^1 вида

$$\dot{p} = Ap + Pf^*(p + \mathcal{F}(p)) \tag{60}$$

с начальными данными $p(0, p_0) = p_0$. Обозначим

$$\psi_T(m_0) = p(T, Pm_0) + \mathcal{F}(p(T, Pm_0))$$

при $m_0 \in \mathcal{M}$ (число T было фиксировано выше). Тогда [19] ψ_T является ограничением σ на $\mathcal{M}$.

Очевидно, $\mathcal{A}$ является глобальным аттрактором для ψ_T в $\mathcal{M}$ (соответствующее определение аналогично приведенному выше).

Стандартные соображения [20] показывают, что существует такая ограниченная окрестность W_0 глобального аттрактора $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$, что

$$\psi_T(u) \in \mathcal{M} \quad \text{для } u \in W_0.$$

Будем дальше рассматривать такие окрестности W глобального аттрактора $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$, что $PW \subset PW_0$.

Рассмотрим последовательность $\{u_k : k \geq 0\} \subset H_0^1$ и обозначим

$$d_k = \|\sigma(u_k) - u_{k+1}\|_1.$$

Рассмотрим точки $u'_k = Pu_k$ и определим $v_k \in \mathcal{M}$ по формулам $v_k = u'_k + \mathcal{F}(u'_k)$.

Из доказательства теоремы 1 в [4] и из лемм 1, 2 и 6 в [6] следует, что существуют такие положительные константы K_0, K_1, зависящие от W_0 (и от r и p в лемме 16), что если $Pu_k \in PW_0$, то выполнены следующие два утверждения.

Лемма 15. *Существует такое $d^0 > 0$, что если при некотором $d \leq d^0$ последовательность $\{u_k\}$ является d-псевдотраекторией отображения σ и выполнено неравенство*

$$\operatorname{dist}(u_0, \mathcal{M}) \leq 2d, \tag{61}$$

то

$$|\psi_T(v_k) - v_{k+1}|_{in} < K_0 d, \quad k \geq 0$$

(здесь $|v - v'|_{in}$ — расстояние между точками v и v' во внутренней метрике многообразия $\mathcal{M}$, индуцированной нормой $\|\cdot\|_1$).

Если при этом существуют такие точка $v \in \mathcal{M}$ и число ε_0, что

$$|\psi_T^k(v) - v_k|_{in} < \varepsilon_0, \quad k \geq 0,$$

то

$$\|\sigma^k(v) - u_k\|_1 < \varepsilon_0 + K_1 d, \quad k \geq 0.$$

Лемма 16. *Пусть даны $r > 1, p \geq 1$. Существует такое $d^0 > 0$, что если выполнены неравенства*

$$\nu r^{1/p} < 1, \tag{62}$$

$\|\{d_k\}\|_{r,p} \leq d$ *при некотором* $d \leq d^0$, *а также условие* (61), *то*

$$\|\{|\psi_T(v_k) - v_{k+1}|_{in}\}\|_{r,p} < K_0 d.$$

Если при этом существуют такие точка $v \in \mathcal{M}$ и число $L > 0$, что

$$\|\{|\psi_T^k(v) - v_k|_{in}\}\|_{r,p} \leq Ld,$$

то

$$\|\{\|\sigma^k(v) - u_k\|_1\}\|_{r,p} \leq (1 + L)K_1 d.$$

Рассмотрим конечномерную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u), \tag{63}$$

являющуюся ограничением системы (57) на инерциальное многообразие $\mathcal{M}$. Из сказанного выше следует, что для $u \in \mathcal{M}$ траектория $\Phi(t, u)$ системы (63) с $\Phi(0, u) = u$ задается формулой

$$\Phi(t, u) = p(t, Pu) + \mathcal{F}(p(t, Pu)),$$

следовательно, $\Phi(T, u) = \psi_T(u)$ при $T > 0$.

Лемма 17. *Если в уравнении* (1) $b = m^2, m = 1, 2, \ldots$, *то система* (63) *удовлетворяет предположениям* (I)–(IV) §1 *(с естественной заменой $\mathbf{R}^n$ на $\mathcal{M}$).*

Доказательство. В [3] показано, что для функции

$$V(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{b}{2}\|u\|^2 + (G(u), 1), \quad u \in H_0^1,$$

где G — первообразная f, а $(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $L^2(0, \pi)$, выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}V(u) = -\|u_t\|^2,$$

следовательно, функция $\mathcal{V}$, ограничение V на $\mathcal{M}$, удовлетворяет предположению (I).

Там же показано, что полугруппа $S(t)$ имеет конечное число неподвижных точек, все ненулевые неподвижные точки гиперболические, и для любой ненулевой точки покоя z выполнено неравенство

$$V(z) < V(0)$$

(см. теорему 5.4).

Трансверсальность устойчивых и неустойчивых многообразий точек покоя $S(t)$ (как гиперболических, так и негиперболических) в H_0^1 доказана в [1]. Там же (см. с. 193) показано, что при $b = m^2$ точка покоя $\pi_0 = 0$ имеет одномерное центральное многообразие, для которого выполнено соотношение (6).

Доказательство, аналогичное [4, с. 10], показывает, что для системы (63) выполнены предположения (II)–(IV) (заметим, что включение $W^c(0) \subset \mathcal{M}$ следует из соотношения (58) и из того, что стремление траекторий на $W^c(0)$ к началу не может быть экспоненциальным).

Лемма доказана. •

Так как любое отображение $S(\tau), \tau > 0$, липшицево в любом ограниченном множестве $B \subset H_0^1$, утверждение, аналогичное лемме 15, справедливо для отображений $\phi = \psi_1$ и $\sigma = S(1)$. Поэтому из теоремы 1 и из леммы 17 следует, что полугруппа $S(t)$ обладает описанным ниже свойством отслеживания приближенных траекторий в окрестности своего глобального аттрактора $\mathcal{A}$.

Теорема 6. *Если $b = m^2$, то существует окрестность W глобального аттрактора $\mathcal{A}$ со следующим свойством. По любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что если последовательность $\{u_k\} \subset W$ является d-псевдотраекторией отображения σ, для которой выполнено неравенство* (61), *то найдется такая точка $v \in \mathcal{M}$, что*

$$\|\sigma^k(v) - u_k\|_1 < \varepsilon, \quad k \geq 0.$$

Так как существует такое $\tau = \tau(r, p)$, что неравенство (62) выполнено при $T \geq \tau$, из теоремы 2 и из лемм 16, 17 вытекает, что полугруппа $S(t)$ обладает описанным ниже свойством липшицевого $\mathcal{L}_{r,p}$-отслеживания приближенных траекторий в окрестности своего глобального аттрактора $\mathcal{A}$.

Теорема 7. *Если $b = m^2$, то существуют окрестность W глобального аттрактора, число $T' > 0$ и функция*

$$\rho' : [T', \infty) \to (1, \infty),$$

обладающие следующим свойством. Если $T \geq T'$, и для чисел $r > 1, p \geq 1$ выполнено включение

$$r^{1/p} \in (1, \rho'(T)),$$

то существуют такие числа $L, d^0 > 0$, что если для последовательности $\{u_k\} \subset W$ выполнены неравенства (61) *и*

$$\|\{\|\sigma(u_k) - u_{k+1}\|_1\}\|_{r,p} \leq d$$

при некотором $d \leq d^0$, то найдется такая точка $v \in \mathcal{M}$, что

$$\|\{\|\sigma^k(v) - u_k\|_1\}\|_{r,p} \leq Ld$$

(здесь $\sigma = S(T)$).

Список литературы

[1] Henry D. B., *Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations*, J. Differential Equations **59** (1985), 165–205.

[2] Chafee N., Infante E., *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*, Appl. Anal. **4** (1974/1975), 17–37.

[3] Kostin I. N., *Lower semicontinuity of a non-hyperbolic attractor*, J. London Math. Soc. (2) **52** (1995), 568–582.

[4] Kostin I. N., *Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor*, Asymptot. Anal. **16** (1998), 203–222.

[5] Larsson S., Pilyugin S. Yu., *Numerical shadowing near the global attractor for a semilinear parabolic equation* (в печати).

[6] Wiggins S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Texts Appl. Math., vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] Колбина С. А., Пилюгин С. Ю., *Предельное отслеживание и дискретизации параболических уравнений*, Нелинейные динамические системы, №1, СПбГУ, СПб, 1997, сс. 131–158.

[8] Pilyugin S. Yu., *The space of dynamical systems with the c^0-topology*, Lecture Notes in Math., vol. 1571, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[9] Рейнфелд А., *Теорема сведения*, Дифференц. уравнения **10** (1974), №5, 838–843.

[10] Pilyugin S. Yu., *Shadowing in dynamical systems*, Lecture Notes in Math., vol. 1706, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[11] Sacker R. J., Sell G. R., *A spectral theory for linear differential systems*, J. Differential Equations **27** (1978), 320–358.

[12] Eirola T., Nevanlinna O., Pilyugin S. Yu., *Limit shadowing property*, Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997), 75–92.

[13] Плисс В. А., *О расположении устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических систем*, Дифференц. уравнения **20** (1984), 779–785.

[14] Пилюгин С. Ю., *Введение в грубые системы дифференциальных уравнений*, ЛГУ, Л., 1988.

[15] Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

[16] Плисс В. А., *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1977.

[17] Palis J., de Melo W., *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.

[18] Хенри Д., *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.

[19] Foiaş C., Sell G. R., Temam R., *Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations*, J. Differential Equations **73** (1988), 309–353.

[20] Pilyugin S. Yu., *Complete families of pseudotrajectories and shape of attractors*, Random Comput. Dynam. **2** (1994), 205–226.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198904, Санкт-Петербург, Петродворец
Библиотечная пл., 2
E-mail: sp@spil.usr.pu.ru

Поступило 14 октября 1999 г.