О. В. Бесов, Оценки погрешности кубатурных формул по гладкости функций,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 11–23

https://www.mathnet.ru/tm2476

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

О. В. БЕСОВ

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ПО ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ

В работе устанавливаются оценки быстроты убывания погрешности при «дроблении» (усложнении) сеточной кубатурной формулы для фиксированной функции, а также аналогичные оценки для последовательностей функционалов несколько более общего вида. Оценки проводятся либо через полунормы, представляющие интегралы от L_p-норм разностей различных порядков, либо через L_p-модули непрерывности различных порядков. Оценки через модули непрерывности первого порядка в метрике C в некоторых случаях известны (см. [1, 2]).

Для пояснения сущности вопроса рассмотрим квадратурную формулу

$$(l, f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{K} c_k f(x_k), \qquad 0 \leqslant x_k \leqslant 1,$$

точную для многочленов P_s степени s. При усложнении («дроблении») такой формулы на множестве функций f с $\int_0^1 |f^{(s)}(x)|^2\,dx \leqslant 1$ выполняется равенство

$$\sup_f |(l^{\frac{1}{k}}, f)| = Ck^{-s} \sup_f |(l, f)| + o(k^{-s}), \qquad k \to \infty,$$

(см. [1, 3]).

В то же время для каждой фиксированной функции рассматриваемого множества

$$|(l^{\frac{1}{k}}, f)| = o(k^{-s}), \qquad k \to \infty$$

(подобное утверждение для метрики C имеется в [1, с. 49, 70,] а для периодических функций в метрике L_2 — в [3, с. 775]).

С. Л. Соболев установил недавно с использованием равенства Парсеваля, что для периодической функции n переменных погрешности усложненной формулы прямоугольников подчиняются оценке

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |k^s (l^{\frac{1}{k}}, f)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|f\|_{\tilde{L}_2^{(s)}}, \qquad q \geqslant 2, \quad q > \frac{2n}{2s-n}, \quad s > \frac{n}{2}. \tag{1}$$

В данной работе установлена, в частности, суммируемость с весом степеней $k^s\,|\,(l^{1/k}, f)\,|$ для функций f с определенными дифференциально-разностными свойствами в L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, показана неулучшаемость некоторых из полученных оценок и проведено сравнение с оценкой С. Л. Соболева (1).

Будем пользоваться следующими обозначениями: E^n — n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $Q=[0,\ 1)^n\subset E^n$; $h=(h_1,\ldots,h_n)$ при $h_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$; $h^{-1}=(h_1^{-1},\ldots,h_n^{-1})$; s, m_i, k k_i — натуральные числа, $m=(m_1,\ldots,m_n)$; $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, γ_i — целые. числа; $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, α_i — целые неотрицательные числа;

$$h\gamma=(h_1\gamma_1,\ldots,h_n\gamma_n),\qquad \frac{x}{h}=\left(\frac{x_1}{h_1},\ldots,\frac{x_n}{h_n}\right);$$

при $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $v>0$ $v^\lambda=(v^{\lambda_1},\ldots,v^{\lambda_n})$, $v_x^\lambda=(v^{\lambda_1}x_1,\ldots v^{\lambda_n}x_n)$, $|\lambda|=\sum\limits_1^n\lambda_i$; для $G\subset E^n$ $hG=\left\{x\colon \frac{x}{h}\in G\right\}$, $h\gamma+G=\{x: x-h\gamma\in G\}$, $\sum\limits_{\gamma h\in G}$ — суммирование по $\gamma\in h^{-1}G$;

$$Q^{(N)}=\bigcup_{|\gamma_i|\leqslant N-1}(\gamma+Q)=[-N+1,\ N)^n,\qquad Q_\gamma^{(N)}=\gamma+Q^{(N)};$$

$$1\leqslant p\leqslant\infty,\ \|f\|_p=\|f\|_{p,\,E^n};\qquad \|f\|_{p,\,G}=\left\{\int\limits_G|f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$(1\leqslant p<\infty),\qquad \|f\|_{\infty,\,G}=\operatorname*{ess\,sup}_G|f(x)|.$$

В случае $h=(v,\ldots,v)$, $v>0$, вместо $h\gamma$, hG, Ω_h и т. д. будем писать просто $v\gamma$, vG, Ω_v и т. д.

$$\Delta^s(y)f(x)=\sum_{j=0}^s(-1)^{s-j}C_s^jf(x+jy),$$

$\Delta_i^{m_i}(t)f(x)=\Delta^{m_i}(te^{(i)})f(x)$, $e^{(i)}$ — i-й орт; $\Delta^s(y,G)f(x)=\Delta^s(y)f(x)$, если G содержит отрезок $[x,\ x+sy]$, $\Delta^s(y,\ G)f(x)=0$ в противном случае.

При $e\in E^n$, $|e|=1$, $v>0$

$$\omega_e^s(v,G,f)=\sup_{|t|\leqslant v}\|\Delta^s(te,G)f\|_p,\quad \omega^s(v,G,f)_p=$$

$$=\sup_{|e|=1}\omega_e^s(v,G,f)_p,\qquad \omega_i^s(v,G,f)_p=\omega_{e^{(i)}}^s(v,G,f)_p.$$

$$P_{m-1}(x)=\sum_{\alpha_1<m_1}\cdots\sum_{\alpha_n<m_n}c_\alpha x^\alpha,\qquad P_{s-1}(x)=\sum_{|\alpha|<s}c_\alpha x^\alpha.$$

На кубируемой области $G\subset E^n$ будем рассматривать банаховы пространства $B_{p,\theta}^r(G)$ функций (см. [5]), имеющих соответствующие частные производные и конечную норму

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r(G)}=\|f\|_{p,\,G}+\|f\|_{b_{p,\,\theta}^r(G)},\tag{2}$$

$$\|f\|_{b_{p,\,\theta}^r(G)}=\sum_{i=1}^n\left\{\int\limits_0^1[t^{k_i-r_i}\|\Delta_i^{m_i}(t,G)D_i^{k_i}f\|_p]^\theta\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $r=(r_1,\ldots,r_n)$, $0<r_i-k_i<m_i$ $(i=1,\ldots,n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Нормы $B_{p,\theta}^r(G)$ эквивалентны при различных допустимых m_i, k_i, сохраняющих суммы m_i+k_i, а если G удовлетворяет слабому условию r-рога, то нормы $B_{p,\theta}^r(G)$ эквивалентны при любых допустимых значениях параметров m_i, k_i (см. [5, с. 294]). При $\theta=\infty$ $B_{p,\infty}^r(G)$ обращается в пространство $H_p^r(G)$ С. М. Никольского.

Через $B_{p,\theta}^{(\rho)}(G)$, $\rho > 0$, будем обозначать банахово пространство функций с нормой

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{(\rho)}(G)} = \|f\|_{p,G} + \|f\|_{b_{p,\theta}^{(\rho)}(G)},$$

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^{(\rho)}(G)} = \sum_{|\alpha|=k} \left\{ \int_{|y|<1} [|y|^{k-\rho} \|\Delta^s(y, G) D^\alpha f\|_p]^\theta \frac{dy}{|y|^n} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3}$$

где $0 < \rho - k < s$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Для области G со слабым условием конуса норма $B_{p,\theta}^{(\rho)}(G)$ эквивалентна норме $B_{p,\theta}^r(G)$ при $r_1 = \ldots = r_n = \rho$ (см. [5, с. 297]). При $\theta = \infty$ $B_{p,\infty}^{(\rho)}(G)$ обращается в пространство $H_p^{(\rho)}(G)$ С. М. Никольского. Будем для определенности считать $k_i = 0$ в (2), $k = 0$ в (3).

В дальнейшем будет использована

Теорема А. *Пусть открытое множество $G \subset E^n$ удовлетворяет условию r-рога, $1 \leqslant p \leqslant \infty, \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} < 1$ ($\leqslant 1$ при $\theta = 1$). Тогда*

$$B_{p,\theta}^r(G) \subset C(G), \tag{4}$$

т. е. функция $f \in B_{p,\theta}^r(G)$ после возможного изменения на множестве нулевой меры непрерывна на G и справедлива оценка

$$\sup_G |f| \leqslant C \|f\|_{B_{p,\theta}^r(G)}.$$

При этом при $\theta = 1$, $m_i > r_i$

$$\sum_{i=1}^n \sup_{0<\tau\leqslant 1} \sup_{x\in G} |\Delta_i^{m_i}(\tau, G) f(x)| \leqslant C \sum_{i=1}^n \int_0^1 \|\Delta_i^{m_i}(t, G) f\|_p t^{-r_i-1} dt,$$

а при $\theta = 1$, $r_1 = \ldots = r_n = \rho < s$

$$\sup_{|y|\leqslant 1} \sup_{x\in G} |\Delta^s(y, G) f(x)| \leqslant C \int_0^1 \sup_{|y|\leqslant t} \|\Delta^s(y, G) f\|_p t^{-\rho-1} dt.$$

В неравенствах постоянная C не зависит от f.

Доказательство имеется в [5, с. 264, 272, 297, 303]. Правую часть последнего неравенства можно заменить, по-видимому, на $C \int_{|y|\leqslant 1} \|\Delta^s(y, G) f\|_p |y|^{-\rho-n} dy$.

Заметим, что область $G = \operatorname{int} Q^{(N)}$ удовлетворяет условию r-рога (при любом r), а функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, эквивалентна равномерно непрерывной на $Q^{(N)}$.

В дальнейшем, говоря о функции f, удовлетворяющей условиям теоремы A, или вообще о функции f, к которой применяется функционал погрешности, мы всегда будем иметь в виду непрерывную функцию (непрерывного представителя класса эквивалентных).

Приведем еще два проекционных разложения функции через разности [6]:

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{v} \iint R_i(x, y, z) \Delta_i^{m_i}(bv^{\lambda_i} y_i) f(x - v^\lambda x + v^\lambda y + v^\lambda z)\, dy dz dv, \tag{5}$$

$$f(x)=P_{s-1}(x)+\int_0^1\frac{1}{v}\iint R(x, y, z)\,\Delta^s(bvy)\,f(x-vx+vy+vz)\,dydzdv. \qquad (6)$$

Здесь при наперед заданных $x^{(0)}\in E^n$, $\varepsilon>0$ и достаточно малом $b>0$ P_{m-1}, P_{s-1} — многочлены, построенные по значениям f из шара $C_\varepsilon(x^{(0)})=\{x: |x-2x^{(0)}|<\varepsilon\}$, $R_i(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — многочлены степеней не выше $m_j-1+\delta_{ij}$ по x_j, соответственно не выше s по x, с коэффициентами из $C_0^\infty(E^n)$ по y и по z, сосредоточенными в $\{(y, z): |y-x^{(0)}|<\varepsilon, |z-x^{(0)}|<\varepsilon\}$. Разложения справедливы для почти каждой (а если f непрерывна, то для каждой) точки области, $1/\lambda$-звездной относительно шара, соответственно звездной относительно шара. К таким областям относится, в частности, куб

Для непрерывных на $\overline{Q^{(N)}}$ функций рассмотрим кубатурную формулу с функционалом погрешности

$$(l, f)=\int_Q f(x)\,dx-\sum_{|\gamma_i|\leqslant N-1}c_\gamma f(\gamma), \qquad (7)$$

точную для многочленов $P_{m-1}(x)$.

Для погрешности кубатурной формулы (7), точной для многочленов $P_{m-1}(x)$, получаем с помощью (5) и неравенства Гёльдера оценку

$$|(l, f)|=|(l, f-P_{m-1})|\leqslant C_1\max_{\overline{Q^{(N)}}}|f(x)-P_{m-1}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{i=1}^n\int_0^1\frac{1}{v}\int_0^1\int_{Q^{(N)}}|\Delta_i^{m_i}(bv^{\lambda_i}y_i, Q^{(N)})\,f(v^\lambda z)|\,dzdy_idv=$$

$$=C_2\sum_{i=1}^n\int_0^1\frac{1}{v^{1+|\lambda|}}\int_0^1\|\Delta_i^{m_i}(bv^{\lambda_i}y_i, Q^{(N)})\,f\|_{1,\,v^{-\lambda}Q^{(N)}}\,dy_i\,dv\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_0^1 v^{-1-\frac{|\lambda|}{p}}\|\Delta_i^{m_i}(bv^{\lambda_i}y_i, Q^{(N)})\,f\|_p\,dv\,dy_i.$$

При $\lambda_i=\frac{1}{r_i}$, $0<\sum_{i=1}^n\frac{1}{r_i}=|\lambda|\leqslant p$ получаем отсюда с помощью замен переменных оценку

$$|(l, f)|\leqslant C_4\sum_{i=1}^n\int_0^1 y_i^{-\frac{|\lambda|}{p\lambda_i}}\int_0^1 u^{-1-\frac{|\lambda|}{p}}\|\Delta_i^{m_i}(bu^{\lambda_i}, Q^{(N)})\,f\|_p\,du\,dy_i\leqslant$$

$$\leqslant C_5\sum_{i=1}^n\int_0^1\|\Delta_i^{m_i}(t, Q^{(N)})\,f\|_p\,t^{-r_i\frac{|\lambda|}{p}-1}\,dt\leqslant C_5\sum_{i=1}^n\int_0^1\|\Delta_i^{m_i}(t, Q^{(N)})\,f\|_p\,t^{-r_i-1}\,dt, \qquad (8)$$

из которой при $\varepsilon_i>0$ с помощью неравенства Гёльдера следует, что

$$|(l, f)|\leqslant C_6\sum_{i=1}^n\left\{\int_0^1\|\Delta_i^{m_i}(t, Q^{(N)})\,f\|_p^\theta\,t^{-\theta(r_i+\varepsilon_i)-1}\,dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Эти оценки и аналогичные им для изотропного случая приводят к следующей лемме.

Лемма 1. *Функционал погрешности* (7) *точной для* $P_{m-1}(x)$ *кубатурной формулы линеен и непрерывен над* $b^r_{p,\theta}(Q^{(N)})$, *если* $0<r_i<m_i$ $(i=1,\ldots,n)$,

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}<1 \qquad (\leqslant 1 \text{ при } \theta=1).$$

Функционал погрешности (7) *точной для* $P_{s-1}(x)$ *кубатурной формулы линеен и непрерывен над* $b^{(\rho)}_{p,\theta}(Q^{(N)})$, *если*

$$0<\rho<s,\ n/p<\rho\ (\leqslant \rho \text{ при } \theta=1).$$

В дальнейшем наряду с функционалом погрешности (7) мы будем изучать и более общие функционалы над $b^r_{p,\theta}(Q^{(N)})$ или $b^{(\rho)}_{p,\theta}(Q^{(N)})$.

Для кубируемой области $\Omega\subset E^n$ построим при $h=(h_1,\ldots,h_n)>0$ множества

$$\Omega_h=\bigcup_{\gamma h\in\Omega_h}(h\gamma+hQ),\ \ \Omega_h+hQ^{(N)}\subset\Omega,\ \ \operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_h)\to 0\quad (h\to 0),$$

$$\Omega^h=\{x: x\in h\gamma+hQ,\ \operatorname{mes}[\Omega\cap(h\gamma+hQ)]>0\},$$

так что $\Omega_h\subset\Omega\subset\Omega^h$.

Пусть $l\in b^{r*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$. Значение функционала l на функции f, заданной на $G\supset Q^{(N)}$, определим как его значение на сужении f на $Q^{(N)}$; аналогичное соглашение примем и в других подобных случаях.

Положим $(l(x), f(x))=(l,f)$,

$$\left(l\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),\ f(x)\right)=\left(\prod_1^n h_i\right)(l(x), f(hx+h\gamma)).$$

Оценим $\left(l\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),\ f(x)\right)$ для $\gamma h\subset\Omega_h$, $f\in b^r_{p,\theta}(hQ^{(N)}+h\gamma)$. В силу (8)

$$\left|\left(l\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),\ f(x)\right)\right|=\left(\prod_1^n h_i\right)|(l(x), f(hx+h\gamma)|\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\prod_1^n h_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^1\|\Delta^{m_i}_{x_i}(t, Q^{(N)})f(h\cdot+h\gamma)\|^\theta_p t^{-\theta r_i-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=C\left(\prod_1^n h_i\right)^{1-\frac{1}{p}}\sum_{i=1}^{n}h_i^{r_i}\left\{\int_0^{h_i}\|\Delta^{m_i}_i(t, hQ^{(N)}+h\gamma)f\|^\theta_p t^{-\theta r_i-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{9}$$

Пусть теперь

$$(l^h, f)=\Big(\sum_{\gamma h\in\Omega^h} l^h_\gamma, f\Big), \tag{10}$$

$$l^h_\gamma\in b^{r*}_{p,\theta}(\Omega\cap hQ^{(N)}_\gamma),$$

$$|(l^h_\gamma, f)|\leqslant C\left(\prod_1^n h_i\right)^{1-\frac{1}{p}}\sum_{i=1}^{n}h_i^{r_i}\left\{\int_0^{h_i}\|\Delta^{m_i}_i(t,\Omega\cap hQ^{(N)}_\gamma)f\|^\theta_p t^{-\theta r_i-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{11}$$

где C и параметры полунорм не зависят от f, h, γ.

В частности, в качестве l^h можно взять $l^h(x)=\sum_{\gamma h\in\Omega_h} l\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)$ с функционалом $l\in b^{r*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$, как это видно из (9).

Введем еще при $v > 0$ функционал

$$(l^v, f) = \Big(\sum_{\gamma v \in \Omega^v} l^v_\gamma, f \Big), \tag{12}$$

$$l^v_\gamma \in b^{(\rho)*}_{p,\theta}(\Omega \cap vQ^{(N)}_\gamma),$$

$$|(l^v_\gamma, f)| \leqslant Cv^{n-\frac{n}{p}+\rho} \Big\{ \int\limits_{|y|<v} \| \Delta^s(y, \Omega \cap vQ^{(N)}_\gamma) f \|^\theta_p \frac{dy}{|y|^{\theta\rho+n}} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{13}$$

где C и параметры полунормы не зависят от f, v, γ.

С помощью неравенства Гёльдера по γ имеем для функционала l^h из (10):

$$|(l^h, f)| \leqslant C\Big(\prod_1^n h_i\Big)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n h_i^{r_i} \Big\{ \int\limits_0^{h_i} \Big[\sum_{\gamma h \in \Omega^h} \| \Delta_i^{m_i}(t, \Omega \cap hQ^{(N)}_\gamma) f \|_p \Big]^\theta \frac{dt}{t^{\theta r_i+1}} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C(\operatorname{mes} \Omega^h)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n h_i^{r_i} \Big\{ \int\limits_0^{h_i} \| \Delta_i^{m_i}(t, \Omega) f \|^\theta_p \frac{dt}{t^{\theta r_i+1}} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{14}$$

Полагая

$$\Lambda(h) = \Lambda(h, f) = \sup_{0<\tilde h \leqslant h} |(l^{\tilde h}, f)|, \quad \Lambda(v) = \Lambda(v, f) = \sup_{0<\tilde v \leqslant v} |(l^{\tilde v}, f)|,$$

из (14) получаем

$$\Lambda(v^{\frac{1}{r}}, f) \leqslant C_1 \sum_{i=1}^n v \Big\{ \int\limits_0^v \| \Delta_i^{m_i}(t^{\frac{1}{r_i}}, \Omega) f \|^\theta_p t^{-\theta-1} dt \Big\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{15}$$

Отсюда при $f \in b^r_{p,\theta}(\Omega)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $v \to 0$

$$\frac{1}{v} \Lambda(v^{\frac{1}{r}}, f) \leqslant C \sum_{i=1}^n \Big\{ \int\limits_0^v \| \Delta_i^{m_i}(t^{\frac{1}{r_i}}, \Omega) f \|^\theta_p t^{-\theta-1} dt \Big\}^{\frac{1}{\theta}} = o(1). \tag{16}$$

Средняя часть (16) может стремиться к нулю на элементах $b^r_{p,\theta}(\Omega)$ сколь угодно медленно. Скорость сходимости можно оценить на определенных подмножествах из $b^r_{p,\theta}(\Omega)$. Выведем соответствующие оценки. При $\varepsilon \geqslant 0$ в силу (15)

$$\Big\{ \int\limits_0^1 [v^{-1-\varepsilon} \Lambda(v^{\frac{1}{r}})]^\theta \frac{dv}{v} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C \sum_{i=1}^n \Big\{ \int\limits_0^1 v^{-\varepsilon\theta} \int\limits_0^v \| \Delta_i^{m_i}(t^{\frac{1}{r_i}}, \Omega) f \|^\theta_p t^{-\theta-1} dt \frac{dv}{v} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем оценки:

$$\Big\{ \int\limits_0^1 [v^{-1} \Lambda(v^{\frac{1}{r}}, f)]^\theta \frac{dv}{v} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C \sum_{i=1}^n \Big\{ \int\limits_0^1 \| \Delta_i^{m_i}(t^{\frac{1}{r_i}}, \Omega) f \|^\theta_p t^{-\theta-1} \ln\frac{1}{t}\, dt \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{17}$$

$$\Big\{ \int\limits_0^1 [v^{-1} \Lambda(v^{\frac{1}{r+r\varepsilon}}, f)]^\theta \frac{dv}{v} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant \frac{C}{(\varepsilon\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \| f \|_{b^{r+r\varepsilon}_{p,\theta}(\Omega)}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{18}$$

причем в (18) порядки разностей в полунорме $b^{r+r\varepsilon}_{p,\theta}(\Omega)$ те же, что и в $b^r_{p,\theta}(\Omega)$.

Переобозначив $r(1+\varepsilon)$ через r и используя монотонность $\Lambda(h)$, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для функционала l^h из (10) с оценками (11) справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}[k\Lambda(k^{-\frac{1}{r}}, f)]^{\theta}\frac{1}{k}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^1 \|\Delta_i^{m_i}(t^{\frac{1}{r_i}}, \Omega) f\|_p^{\theta} t^{-\theta-1}\ln\frac{1}{t}\,dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (19)$$

Если же оценки (11) *выполняются с* $r' = \delta r < r$ *вместо* r *при некотором* $\delta \in (0, 1)$, *то*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}[k\Lambda(k^{-\frac{1}{r}}, f)]^{\theta}\frac{1}{k}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\|f\|_{b^{r}_{p,\,\theta}(\Omega)}. \quad (20)$$

Аналогично (16) получаем для l^v, определенного в (12), (13), оценку с $\varepsilon \geqslant 0$:

$$v^{-\rho}\Lambda(v, f) \leqslant C\left\{\int_{|y|<v}\|\Delta^s(y, \Omega) f\|_p^{\theta}|y|^{-\theta\rho-n}dy\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad (21)$$

из которой вытекает

Теорема 2. *Для функционала l^v из* (12) *с оценками* (13) *справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^{\rho}\Lambda\left(\frac{1}{k}, f\right)\right]^{\theta}\frac{1}{k}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\left\{\int_{|y|<1}\|\Delta^s(y, \Omega) f\|_p^{\theta}|y|^{-\theta\rho-n}\ln\frac{1}{|y|}dy\right\}^{\frac{1}{\theta}} du. \quad (22)$$

Если же оценки (13) *выполняются с некоторым* ρ' *вместо* ρ, $0 < \rho' < \rho$, *то*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^{\rho}\Lambda\left(\frac{1}{k}, f\right)\right]^{\theta}\frac{1}{k}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\|f\|_{b^{(\rho)}_{p,\,\theta}(\Omega)}. \quad (23)$$

Определение. *Дроблением с пограничным слоем функционала* $l \in b^{r*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$ $(l \in b^{(\rho)*}_{p,\theta}(Q^{(N)}))$ *в* $b^{r}_{p,\theta}(\Omega)$ (*в* $b^{(\rho)}_{p,\theta}(\Omega)$) *назовем функционал* $l^h = \sum_{\gamma h \in \Omega^h} l^h_\gamma$, *где* $l^h_\gamma(x) = l\left(\frac{x}{h} - \gamma\right)$ *при* $\gamma h \in \Omega_h$, l^h_γ *удовлетворяют условиям* (11) ((13)) *при* $\gamma h \in \Omega^h \setminus \Omega_h$.

Дроблением с пограничным слоем функционала погрешности $l \in b^{r*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$ $(\in b^{(\rho)*}_{p,\theta}(Q^{(N)}))$ *вида* (7) *назовем дробление с пограничным слоем функционала l, при котором функционалы* l^h_γ $(\gamma h \in \Omega^h \setminus \Omega_h)$ *также имеют вид функционалов погрешности с интегрированием по* $\Omega \cap (hQ + h\gamma)$.

Теоремы 1, 2 верны, в частности, и для дроблений с пограничным слоем функционалов погрешностей $l \in b^{r*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$ $(b^{(\rho)*}_{p,\theta}(Q^{(N)}))$. Нужно лишь, чтобы, во-первых, кубатурная формула была точна для многочленов, аннулируемых полунормой $b^{r}_{p,\theta}$ $(b^{(\rho)}_{p,\mu})$, и, во-вторых, параметры полунормы должны подчиняться ограничениям леммы 1. Ниже будет показано существование таких дроблений с пограничным слоем функционалов погрешности при определенных геометрических условиях на область Ω.

Применим полученные результаты к кубатурной формуле для интегрирования по единичному кубу Q функции f, периодической по каждому переменному с единичным периодом, принадлежащей локально $b^{(\rho)}_{p,\theta}$ или $L_2^{(s)}$.

Введем полунормы для таких функций

$$\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\,\theta}} = \|f\|_{b^{(\rho)}_{p,\,\theta}(Q)}, \qquad \|f\|_{\tilde{L}_2^{(s)}} = \|f\|_{L_2^{(s)}(Q)} = \sum_{|\alpha|=s}\|D^{\alpha}f\|_{2,\,Q}.$$

Пусть l имеет вид (7), $l^v = \sum_{\gamma v \in Q} l\left(\frac{x}{v} - \gamma\right)$, $1/v$ — натуральное число. В силу периодичности f функционал l^v совпадает с функционалом погрешности формулы прямоугольников. Таким образом, функционал погрешности l^v формулы прямоугольников можно считать дроблением с пограничным слоем функционала погрешности l кубатурной формулы (7), точной для многочленов любой наперед заданной степени. Применяя лемму 1 и теорему 2, получаем, что при $0 < n/p < \rho$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^{\rho}\Lambda\left(\frac{1}{k}, f\right)\right]^{\theta}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\,\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}}. \tag{24}$$

В силу монотонности $\Lambda(v)$ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}[2^{k\rho}\Lambda(2^{-k}, f)]^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_1\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}}, \tag{25}$$

из которого тривиально следует, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|2^{k\rho}(l^{2^{-k}}, f)|^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_1\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}}. \tag{26}$$

Покажем что оценка (26) не усиливаема в том смысле, что она перестает быть верной, если в ее левой части заменить θ на $\theta' < \theta$ или ряд домножить почленно на $a_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$.

Пусть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a(2^k) \sum_{\beta_j = \pm 2^k} e^{2\pi i(\beta, x)}, \qquad a(2^k) \geqslant 0. \tag{27}$$

Покажем, что для нее справедлива оценка

$$\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}} \leqslant C\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a^{\theta}(2^k)\,2^{k\rho\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty. \tag{28}$$

Заметим, что

$$|\Delta^s(y)\,e^{2\pi i(\beta, x)}| \leqslant |y|^s \max_x \left|\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{|y|}D_i\right)^s e^{2\pi i(\beta, x)}\right| \leqslant (2\pi)^s|(\beta, y)|^s \leqslant (2\pi)^s|\beta|^s|y|^s,$$

так что

$$|\Delta^s(y)\,e^{2\pi i(\beta, x)}| \leqslant (2\pi)^s[|\beta||y|]_1^s,$$

где $[\xi]_1 = \min[\xi, 1]$ — срезка единицей.

Следовательно,

$$\|\Delta^s(y) f\|_{\tilde{L}_p} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\beta_j = \pm 2^k} a(2^k)\,|\Delta^s(y)\,e^{2\pi i(\beta, 0)}| \leqslant (2\pi)^s 2^n \sum_{k=0}^{\infty} a(2^k)\,[n2^k|y|]_1^s,$$

откуда при $0 < \rho < s$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $a(2^u) = a(2^{[u]})$

$$\|f\|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}} \leqslant C_1\left\{\int_{|y| \leqslant 1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a(2^k)\,[2^k|y|]_1^s\right)^{\theta}|y|^{-\theta\rho - n}\,dy\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left\{\int_0^1\left(\int_0^{\infty} a(2^u)\,[2^u v]_1^s\,du\right)^{\theta} v^{-\theta\rho - 1}\,dv\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

С помощью замен $u = \log_2 \frac{w}{v}$, $t = \frac{w}{v}$ и неравенства Минковского для интегралов получаем

$$\| f \|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}} \leqslant C_3 \left\{ \int_0^1 \left(\int_v^\infty a\left(\frac{w}{v}\right) [w]_1^s \frac{dw}{w} \right)^\theta v^{-\theta\rho-1}\, dv \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int_0^\infty \left\{ \int_0^w a^\theta \left(\frac{w}{v}\right) v^{-\theta\rho-1}\, dv \right\}^{\frac{1}{\theta}} [w]_1^s \frac{dw}{w} =$$

$$= C_3 \int_0^\infty \left\{ \int_1^\infty a^\theta(t)\, t^{\theta\rho-1}\, dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} w^{-\rho-1} [w]_1^s\, dw,$$

откуда и следует (28) при $\theta < \infty$. Аналогично (28) доказывается и при $\theta = \infty$.

С другой стороны, для функции f вида (27) погрешность формулы прямоугольников имеет вид

$$(l^{2^{-k}}, f) = -2^n \sum_{m=k}^\infty a(2^m) \leqslant -2^n a(2^k). \tag{29}$$

Отсюда при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$

$$\left\{ \sum_0^\infty | 2^{k\rho} (l^{2^{-k}}, f) |^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \geqslant 2^n \left\{ \sum_0^\infty 2^{k\rho\theta} a^\theta (2^k) \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{30}$$

Сравнение (28), (30) и (26) показывает, что для функций вида (27) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$

$$\left\{ \sum_{k=0}^\infty | 2^{k\rho} (l^{2^{-k}}, f) |^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \sim \| f \|_{\tilde{b}^{(\rho)}_{p,\theta}} \sim \left\{ \sum_{k=0}^\infty 2^{k\rho\theta} a^\theta (2^k) \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{31}$$

Отсюда и из (29) следует, что оценка (26) не может быть усилена в указанном выше смысле.

Сравним оценку С. Л. Соболева (1) с оценками (24), (26). Отметим, что $\| f \|_{\tilde{L}^{(s)}_2} \sim \| f \|_{\tilde{b}^{(s)}_{2,2}}$ (см., например, [5]). Из неулучшаемости (24), (26) следует, что в оценке (1) с $q = 2$ нельзя заменить $(l^{1/k}, f)$ на $\Lambda(1/k, f)$. Неулучшаемость (26) влечет неулучшаемость (1) при $q = 2$, $s > n$. В случае $n/2 < s \leqslant n$ ни одна из оценок (1), (25) не содержит другой.

Установим теперь оценки погрешности кубатурных формул и оценки последовательностей функционалов более общего вида через L_p-модули непрерывности первого и высших порядков производных функций. Отметим, что (см. [5])

$$\omega_e^s (v, \Omega, f)_p \leqslant C v \omega_e^{s-1} \left(v, \Omega, \frac{\partial f}{\partial e}\right)_p. \tag{32}$$

Пусть (l, f) — функционал погрешности кубатурной формулы (7), точной для многочленов $P_{m-1}(x)$. Из (8) с помощью (32) получаем, что при $0 < k_i \leqslant m_i$, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} < p$

$$| (l, f) | \leqslant C \sum_{i=1}^n \omega_i^{m_i - k_i} (1, Q^{(N)}, D_i^{k_i} f)_p, \tag{33}$$

а если кубатурная формула (7) точна для многочленов $P_{s-1}(x)$, то при $n/p < k \leqslant s$

$$|(l, f)| \leqslant C \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(1, Q^{(N)}, D^{\alpha} f)_p. \tag{34}$$

Для оценки погрешности кубатурной формулы в равномерной метрике можно получить и более общий результат, если вместо проекционных разложений (5), (6) воспользоваться соответственно проекционными разложениями (20) из [7] и (5) из [6] (первое из них представляет, в сущности суперпозицию n одномерных разложений (5) из [6]). При оценке погрешности (7) с помощью этих разложений мы можем считать функцию f заданной на $Q^{(N)} + Q \subset Q^{(N+1)}$ и получить следующие аналоги оценок (33), (34).

Если кубатурная формула (7) точна для многочленов $P_{m-1}(x)$, то при $0 \leqslant k_i \leqslant m_i$ (и непрерывных f, если некоторые $k_i = 0$)

$$|(l, f)| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{m_i - k_i}(1, Q^{(N+1)}, D_i^{k_i} f)_\infty, \tag{35}$$

а если (7) точна для многочленов $P_{s-1}(x)$, то при $0 \leqslant k \leqslant s$ (и непрерывных f, если $k = 0$)

$$|(l, f)| \leqslant C \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(1, Q^{(N+1)}, D^{\alpha} f)_\infty. \tag{36}$$

Заметим, что при $k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $k > 0$, конечность правых частей (35), (36) влечет эквивалентность f непрерывной функции. Требование непрерывности, то же, что и в (35), (36), будем при $p = \infty$ считать выполненным и в дальнейшем.

Если теперь функционал l^h имеет вид (10) и при $0 \leqslant k_i \leqslant m_i$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\gamma h \in \Omega^h$ справедливы оценки

$$|(l_\gamma^h, f)| \leqslant C \left(\prod_1^n h_i\right)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} h_i^{k_i} \omega_i^{m_i - k_i}(h_i, \Omega \cap hQ_\gamma^{(N)}, D_i^{k_i} f)_p,$$

то с помощью неравенства Гёльдера, как и при выводе (14), получаем оценку

$$|(l^h, f)| \leqslant C (\operatorname{mes} \Omega^h)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} h_i^{k_i} \omega_i^{m_i - k_i}(h_i, \Omega, D_i^{k_i} f)_p. \tag{37}$$

Аналогично в изотропном случае для функционала вида (12) с оценками

$$|(l_\gamma^v, f)| \leqslant C v^{n-\frac{n}{p}+k} \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(v, \Omega \cap vQ_\gamma^{(N)}, D^{\alpha} f)_p$$

при $0 \leqslant k \leqslant s$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\gamma v \in \Omega^v$ получаем оценку

$$|(l^v, f)| \leqslant C (\operatorname{mes} \Omega^v)^{1-\frac{1}{p}} v^k \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(v, \Omega, D^{\alpha} f)_p. \tag{38}$$

Оценкам типа (37), (38) подчиняются погрешности формулы прямоугольников для периодических функций при ограничениях на параметры из (33) — (36) со сколь угодно большими m_i, s.

Оценкам (37), (38) подчиняются и соответствующим образом определенные дробления с пограничным слоем функционала погрешности (7) при ограничениях на параметры из (33) — (36).

Рассмотрим вопрос о существовании в $b^r_{p,\theta}(\Omega)$ дроблений с пограничным слоем функционала погрешности $l \in b^{r^*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$. Для звездных относительно шара областей или их конечных объединений решение подобного вопроса в случае изотропных пространств С. Л. Соболева $L^{(k)}_p(\Omega)$ содержится в результатах С. Л. Соболева [3] и В. И. Половинкина [8].

Пусть l — функционал погрешности (7) кубатурной формулы, точной для многочленов $P_{m-1}(x)$. При достаточно большом N такая кубатурная формула существует (см. [3]). Пусть параметры полунормы $b^r_{p,\theta}$ связаны ограничениями леммы 1. Тогда в силу этой леммы $l \in b^{r^*}_{p,\theta}(Q^{(N)})$. Таким образом, задача сводится к построению при $h = v^{1/r}$ функционалов погрешности $l^h_\gamma \in \in b^{r^*}_{p,\theta}(\Omega \cap hQ^{(N)}_\gamma)$, $\gamma h \in \Omega^h \setminus \Omega_h$ с интегрированием по $\Omega \cap (hQ + h\gamma)$, удовлетворяющих оценкам (11).

Наложим на область Ω дополнительные ограничения геометрического характера. Именно, потребуем, чтобы Ω удовлетворяла слабому условию r-рога, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i > 0$ (см. [5]), т. е. была представима в виде

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} (G_k + \delta^{\frac{1}{r}} V_k(r)), \tag{39}$$

где G_k — открытые множества, $\delta > 0$,

$$V_k(r) = \bigcup_{0<v<1} \left\{x \colon \frac{x_i}{a_i} > 0, \quad v < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{r_i} < (1+\varepsilon)\, v \qquad (i = 1, \ldots, n)\right\},$$

$a_i = a_i(k) \neq 0$, $\varepsilon > 0$.

Для изотропного случая $r_1 = \ldots = r_n$ слабое условие r-рога будем называть также слабым условием конуса.

Будем говорить, что *множество Ω' r-достижимо по множеству Ω из множества B* ($\subset \Omega$), *если*

$$x + \bigcup_{0<\eta\leqslant 1} \eta^{\frac{1}{r}} (B - x) \subset \Omega \quad \forall x \in \Omega'.$$

Если при этом $\Omega' = \Omega$, то множество Ω называется r-звездным относительно B (см. [5]).

Заметим, что вершина x сдвинутого r-рога $x + \delta^{1/r} V_k(r)$ r-достижима по этому сдвинутому r-рогу из любого его подмножества и что объединение конечного числа ограниченных r-звездных областей удовлетворяет слабому условию r-рога.

Обозначим через $\Gamma_k(v)$ множество тех γ, для которых

$$\operatorname{mes}(G_k \cap h(Q + \gamma)) > 0, \ \gamma h \in \Omega^h \setminus \Omega_h, \qquad h = v^{\frac{1}{r}}.$$

Множество $G_k \cap v^{1/r}(Q + \gamma)$ будем называть при этом приграничной ячейкой. В силу (39)

$$G_k \cap v^{\frac{1}{r}} (Q + \gamma) + \delta^{\frac{1}{r}} V_k(r) \subset \Omega \qquad \text{при} \quad \gamma \in \Gamma_k(v). \tag{40}$$

Зафиксируем k ($1 \leqslant k \leqslant K$) и для простоты обозначений будем писать G вместо G_k, V вместо $V_k(r)$, Γ вместо $\Gamma_k(v)$.

Покажем, что для заданного $M > 0$ существует натуральное $N > M$ и $\gamma^{(0)}$, $|\gamma^{(0)}_i| < N - M$, такие, что при всех v, $0 < v < v(M)$, и всех $\gamma \in \Gamma$

приграничная ячейка $G \cap v^{1/r}(Q+\gamma)$ r-достижима по Ω из множества

$$v^{\frac{1}{r}}(B_0+\gamma+\gamma^{(0)}) \subset \Omega \cap v^{\frac{1}{r}} Q_\gamma^{(N)},$$

где $B_0 = \{x : |x| < M\}$.

В силу (40)

$$G \cap v^{\frac{1}{r}}(Q+\gamma) + (vM_0)^{\frac{1}{r}} V \subset \Omega, \quad M_0 > 0, \quad 0 < v < \frac{\delta}{M_0}.$$

Пусть при этом M_0 столь велико, что рог $M_0^{1/r}V$ содержит шар

$$\left(1+\frac{\sqrt{n}}{M}\right)B_0 + \gamma^{(0)} = \{x : |x| < M + \sqrt{n}\} + \gamma^{(0)}.$$

Тогда

$$B_0 + \gamma^{(0)} \subset x + M_0^{\frac{1}{r}} V \qquad \forall x \in Q.$$

Поэтому при $0 < v < \delta/M_0$

$$v^{\frac{1}{r}}(B_0+\gamma+\gamma^{(0)}) \subset x + (vM_0)^{\frac{1}{r}} V \subset \Omega \qquad \forall x \in G \cap v^{\frac{1}{r}}(Q+\gamma).$$

Следовательно, в силу замечания об r-достижимости вершины сдвинутого рога, множество $G \cap v^{1/r}(Q+\gamma)$ r-достижимо по Ω из $v^{1/r}(B_0+\gamma+\gamma^{(0)})$, и требуемое утверждение установлено при $N = M + \max\limits_i |\gamma_i^{(0)}| + 1$.

Построим функционал погрешности, соответствующий приграничной ячейке $G \cap v^{1/r}(Q+\gamma)$. Замена $x = v^{1/r}(x'+\gamma)$ переводит $G \cap v^{1/r}(Q+\gamma)$ во множество $(v^{-1/r}G-\gamma) \cap Q$, r-достижимое по $v^{-1/r}\Omega - \gamma$ из $B_0+\gamma^{(0)} \subset Q^{(N)}$. Рассмотрим функционалы погрешности

$$(l_\gamma, f) = \int\limits_{(v^{-\frac{1}{r}}G-\gamma)\cap Q} f(x')\,dx' - \sum_{\beta\in B_0+\gamma^{(0)}} c_\beta^{(\gamma)} f(\gamma), \tag{41}$$

в которых коэффициенты $c_\beta^{(\gamma)}$ взяты такими, чтобы $(l_\gamma, P_{m-1}) = 0$ для любого многочлена $P_{m-1}(x)$ и чтобы l_γ были равномерно по v, γ ограничены в $C((v^{-1/r}G-\gamma) \cap Q)$. Такой выбор $c_\beta^{(\gamma)}$ осуществим [3, с. 705], если M взять достаточно большим, в силу чего шар B_0 будет содержать необходимый набор узлов единичной решетки [1].

Отсюда получаем так же, как при доказательстве оценки (8), что при $0 < \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \leqslant p$

$$|(l_\gamma, f)| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \|\Delta_i^{m_i}(t, Q^{(N)}) \cap (v^{-\frac{1}{r}}\Omega - \gamma) f\|_p t^{-r_i-1}\,dt,$$

где C не зависит ни от γ, ни от v, $0 < v < \delta/M_0$.

[1] В этом можно убедиться с помощью следующего простого соображения. Узлы кубатурной формулы следует брать такими, чтобы матрица системы линейных уравнений $(l_\gamma, x^\alpha)=0$, $|\alpha| \leqslant m-1$, определяющих коэффициенты $c_\beta^{(\gamma)}$, имела ранг $R = \frac{(n+m)!}{n!m!}$, совпадающий с числом различных α, $|\alpha| \leqslant m-1$ [3, с. 705]. Это достигается, например, при узлах вида $(2^{jm^0}, 2^{jm^1}, \ldots, 2^{jm^{n-1}})$, $j = 0, 1, \ldots, R-1$, когда определитель матрицы является определителем Вандермонда и отличен от нуля, так как среди чисел $\sum\limits_{k=1}^{n} m^{k-1}\alpha_k$ нет одинаковых при различных α, $|\alpha| \leqslant m-1$. В этом случае $c_\beta^{(\gamma)}$ определяются однозначно и равномерно по v, β и γ ограничены.

Положив при $h = v^{1/r}\, l_\gamma^h(x) = l_\gamma\left(\frac{x}{h} - \gamma\right)$, получаем тем же образом, что и при выводе (9), оценку (11), что и приводит к положительному решению для области Ω со слабым условием r-рога вопроса о существовании дроблений с пограничным слоем функционала погрешностей.

Аналогично для области Ω со слабым условием конуса устанавливается существование дроблений с пограничным слоем функционала погрешностей $l \in b_{p,\theta}^{(\rho)*}(Q^{(N)})$.

Дробления с пограничным слоем функционала погрешностей $l \in b_{p,\theta}^{r*}(Q^{(N)})$, соответственно $l \in b_{p,\theta}^{(\rho)*}(Q^{(N)})$, удовлетворяют в силу (10), (13), (32) оценкам, влекущим, как было показано, оценки (37) и соответственно (38). Таким образом, установлено существование дроблений с пограничным слоем функционала погрешностей, удовлетворяющих в области Ω со слабым условием r-рога оценке (37) при $h = v^{1/r}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $0 < \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} < 1$, $0 < r_i < k_i \leqslant m_i$. Как следствие отсюда вытекает существование дроблений с пограничным слоем функционала погрешностей, удовлетворяющих в области Ω со слабым условием конуса оценке (38) при $n/p < k \leqslant s$.

Аналогично для области со слабым условием конуса с помощью проекционного разложения (5) из [6] устанавливается существование дроблений функционала погрешностей с пограничным слоем, удовлетворяющих оценкам (38) (с дополнительным требованием непрерывности функций в случае $p = \infty$, $k = 0$). В качестве следствия отсюда вытекает для области со слабым условием конуса существование дроблений функционала погрешностей с пограничным слоем, удовлетворяющих оценкам (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974.
2. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных.— Мат. заметки, 1968, 3, № 5, с. 565—567.
3. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
4. *Соболев С. Л.* Сходимость кубатурных формул на элементах $\tilde{L}_2^{(m)}$.— ДАН СССР, 1976, 228, № 1, с. 45—47.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Бесов О. В., Ильин В. П.* Проекционные представления функций через разности.— Наст. сб., с. 3—10.
7. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в $\mathscr{L}_{p,\theta}^l$ и распространении функций.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 18—30.
8. *Половинкин В. И.* Кубатурные формулы в пространствах Соболева: Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1975. В надзаг.: Ин-т математики СО АН СССР.