

УДК 517.946

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛОЕ С ПОЗИЦИЙ ПРОБЛЕМЫ О. А. ОЛЕЙНИК

© 1997 г. С. А. Назаров

Представлено академиком О.А. Олейник 06.02.95 г.

Поступило 08.02.95 г.

1. ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ

Пусть Π – слой $\mathbb{R}^2 \times (-1/2, 1/2)$ и Ω – область в \mathbb{R}^3 , совпадающая с Π вне шара $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| < R\}$, причем для простоты $\partial\Omega$ – гладкая поверхность. В Ω рассмотрим задачу линейной теории упругости

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(u; x) = f_j(x), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$v_k(x) \sigma_{jk}(u; x) = g_j(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Всюду считаем, что индексы j, k, p, q и α, β принимают значения 1, 2, 3 и 1, 2 соответственно; по повторяющимся производим суммирование. Кроме того, $v = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\sigma(u)$ и $\varepsilon(u)$ – тензоры напряжений и деформаций с декартовыми компонентами

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}(u) &= a_{kq}^{jp} \varepsilon_{pq}(u), \\ \varepsilon_{pq}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Модули упругости a_{kq}^{jp} – измеримые функции, подчиненные условиям

$$\begin{aligned} a_{kq}^{jp}(x) &= a_{qk}^{pj}(x) = a_{pk}^{jq}(x), \\ c_a \xi_{jk} \xi_{jk} &\leq a_{kq}^{jp}(x) \xi_{jk} \xi_{pq} \leq C_a \xi_{jk} \xi_{jk}, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых $\xi = (\xi_{jk})$ – любая симметрическая (3×3) -матрица, x – произвольная точка в $\bar{\Omega}$, c_a и C_a – положительные постоянные. Все величины вещественные.

Положим $E(u, v) = (\sigma_{jk}(u), \varepsilon_{jk}(u))_{\Omega}$, где $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$. Обозначим: \mathcal{H} – гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^{\infty}(\bar{\Omega})^3$ по норме

$$\|u; \mathcal{H}\| = (E(u, u) + \|u; L_2(\Omega \cap B_R)\|^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Предложение 1 (см. [1, 2]). Для любой вектор-функции $u \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$c_{\Omega} \|u; \mathcal{H}\|^2 \geq I_0(u)$, в котором

$$\begin{aligned} I_k(u) &= \int_{\Omega} |\ln(2+r^2)|^{-2k} \left\{ \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right|^2 + (1+r^2)^{-2} \times \right. \\ &\times |\ln(2+r^2)|^{-2} |u_3|^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \left[(1+r^2)^{-1} |\ln(2+r^2)|^{-2} \times \right. \\ &\times \left. \left(\left| \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_{\alpha}} \right|^2 + |u_{\alpha}|^2 \right) + \sum_{\beta=1}^2 \left| \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right|^2 \right] \Big\} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

(r, φ) – полярные координаты на плоскости $y = (x_1, x_2)$, а c_{Ω} – постоянная, не зависящая от поля смещений $u = (u_1, u_2, u_3)$.

В силу (2) тензоры σ и ε аннулируются на линейном жестком смещении $\mathcal{R} = \{a + b \times x: a, b \in \mathbb{R}^3\}$ (крестом обозначено векторное произведение). Считая, что $b \in \mathbb{R}^2 \times 0$, т.е. $b_3 = 0$, сужаем \mathcal{R} до \mathcal{R}' ($\dim \mathcal{R} = 6$ и $\dim \mathcal{R}' = 5$). Можно проверить, что $\mathcal{R}' \subset \mathcal{H}$. Вектор $\omega(x) = e^3 \times x$ (поворот вокруг орта e^3 оси x_3), принадлежащий $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$, не попадает в \mathcal{H} хотя бы потому, что интеграл $I_0(\omega)$ расходится.

Как обычно, под обобщенным решением задачи (1) понимается элемент u пространства \mathcal{H} , удовлетворяющий интегральному тождеству

$$E(u, v) = (f_j, v_j)_{\Omega} + (g_j, v_j)_{\partial\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (6)$$

Исследование разрешимости задачи (6) проводится по стандартной схеме (теорема Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве).

Предложение 2. Пусть $\rho_{\alpha}(x) = (1 + r^2)^{\alpha/2} |\ln(2+r^2)| u$

$$\begin{aligned} \rho_1 f_{\beta} &\in L_2(\Omega), \quad \rho_2 f_3 \in L_2(\Omega), \\ \rho_1 g_{\beta} &\in L_2(\partial\Omega), \quad \rho_2 g_3 \in L_2(\partial\Omega), \end{aligned}$$

причем $(f_j, v_j)_{\Omega} + (g_j, v_j)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}'$. Тогда существует решение $u \in \mathcal{H}$ задачи (6), которое определено с точностью до слагаемого из \mathcal{R}' .

2. РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ, ОБЛАДАЮЩИЕ КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Ясно, что $E(u, u) = 0$ для $u \in \mathcal{R}$. Предложение 2 уже представило элементы \mathcal{R}' как решения однородной задачи (1). Еще одно такое решение $\omega \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$ появляется в следующем утверждении.

Теорема 1 (см. [1, 3]). *Если для $w \in H_{loc}^1(\bar{\Omega})^3$ сходится интеграл $E(w, w)$, то найдется такая постоянная b_3 , что $I_1(w - b_3\omega) < \infty$.*

В [4] О.А. Олейник был поставлен вопрос: верно ли, что всякое решение однородной задачи (1) (или (6) с $f = 0, g = 0$ и $\forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^3$), удовлетворяющее условиям теоремы 1, попадает в \mathcal{R} ? Подчеркнем, что сформулированные утверждения ответа на него не дают, поскольку неясно, принадлежит ли разность $u = w - b_3\omega$ пространству \mathcal{H} .

Мы докажем включение $u \in \mathcal{H}$ (приблизим u финитными полями по норме (4)) на основе асимптотической формулы для решения, полученной при дополнительном предположении о стабилизации упругих модулей:

$$|\nabla_x^\tau (a_{kq}^{jp}(x) - A_{kq}^{jp}(z))| \leq c_\tau (1+r)^{-1-\tau_1-\tau_2}; \quad (7)$$

здесь $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3), \tau_j = 0, 1, \dots, \nabla_x = \text{grad}, z = x_3, A_{kq}^{jp} \in C^\infty[-1/2, 1/2]$ (очевидно, что набор $\{A_{kq}^{jp}\}$ наследует свойства (3) у $\{a_{kq}^{jp}\}$). Таким образом, при выполнении (7) проблема О.А. Олейник решается положительно и в п. 4 будет доказана

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 $E(w, v) = 0 \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^3$, то в предположении (7) $w \in \mathcal{R}$.*

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Слой Π вырезает на сфере $S^2 = \{x: |x| = \rho\}$ "пояс" Y_ρ , ширина $O(1)$ которого много меньше длины $O(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Возникновение в окрестности бесконечности сечения Y_ρ с малой относительной шириной наводит на мысль, что асимптотические конструкции в задаче (1) подобны тем, которые появляются в задаче о деформации тонкой пластины. Последней задаче посвящено необозримое количество исследований, проводимых на различных уровнях строгости и при помощи разнообразных методик. Типичным оказывается результат для изотропной пластины $G_h = G \times (-h/2, h/2)$, в которой

$$\sigma_{jk}(u) = \mu \varepsilon_{jk}(u) + \delta_{j,k} \lambda (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u) + \varepsilon_{33}(u)),$$

$\lambda \geq 0, \mu > 0$ – модули Ламе, $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, G – область в $\mathbb{R}^2, h > 0$ – малый параметр. Основной факт теории пластин Кирхгофа заключается в том, что поле смещений $U^h(x)$ в пластине G_h с жестко заземленной боковой поверхностью $\partial G \times (-h/2, h/2)$ (условия Дирихле $U^h = 0$) приближенно описывается вектором

$$(V(y) - h^{-1} z \nabla_y W(y), h^{-1} W(y)), \quad (8)$$

где $V = (V_1, V_2)$ и W – решения задач Дирихле в G для двумерного оператора Ламе $-\mu \nabla_y \cdot \nabla_y - (\Lambda + \mu) \nabla_y \nabla_y \cdot$ и бигармонического оператора $3^{-1} M (\nabla_y \cdot \nabla_y)^2$ соответственно (здесь $\Lambda = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, M = \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$). Из этих операторов составим блочно-диагональную (3×3) -матрицу $L(\nabla_y)$.

Матрицу $L(\nabla_y) = (L_{pq}(\nabla_y))$ (общего вида) можно вычислить и для пластины с модулями упругости $\{A_{kq}^{jp}(h^{-1}z)\}$ (например, при помощи модификации [5] алгоритма [6]). Свойства L (эллиптичность, формальная самосопряженность, однородность элементов, равенства $\text{ord} L_{pq} = t_p + t_q$, где $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 2$) выводятся из результатов §5.4, 5.7 [7] относительно строения канонической системы жордановых цепочек для пучка, отвечающего эллиптической задаче в полосе. Через Φ обозначаем фундаментальную матрицу для оператора $L(\nabla_y)$ на $\mathbb{R}^2; \Phi^j$ – ее столбцы. В изотропном случае

$$\Phi_{\alpha\beta}(y) = (4\pi\mu^2)^{-1} \{ M y_\alpha y_\beta |y|^{-2} + \delta_{\alpha,\beta} (\Lambda - 3M) \ln |y| \},$$

$$\Phi_{\alpha 3}(y) = \Phi_{3\alpha}(y) = 0,$$

$$\Phi_{33}(y) = 3(8\pi M)^{-1} |y|^2 \ln |y|.$$

Для остальных операторов L свойства функций Φ_{jk} в целом такие же; в частности, $\ln r$ всегда является множителем при полиномах от u и

$$\nabla_y^k \Phi_{jk}(y) = O(r^{t_j+t_k-2-|k|}), \quad (9)$$

$$|k| = \kappa_1 + \kappa_2 > t_j.$$

Теорема 3. *Пусть для решения $u \in H_{loc}^1(\bar{\Omega})^3$ задачи (1) с правыми частями $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^3, g \in C_0^\infty(\partial\Omega)^3$ сходятся: интеграл энергии $E(u, u)$ и для какого-нибудь $t \in (-2, -1)$ весовой интеграл*

$$J_t(u) = \int_\Omega (1+r^2)^t (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2 + (1+r^2)^{-1} |u_3(x)|^2) dx. \quad (10)$$

Тогда при условии (7) верны представления

$$u_\alpha(x) = a_\alpha - b_\alpha z + (1 - \chi(r)) \left[\Psi_\alpha(y) - z \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \Psi_3(y) \right] + u_\alpha^0(x), \tag{11}$$

$$u_3(x) = a_3 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + (1 - \chi(r)) \Psi_3(y) + u_3^0(x),$$

где a_j и b_α – некоторые постоянные; $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция,

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < R, \\ 0 & \text{при } |t| > 2R; \end{cases} \tag{12}$$

$$\Psi(y) = P_1(\nabla_y) \Phi^1(y) + P_2(\nabla_y) \Phi^2(y) + P_3(\nabla_y) \Phi^3(y),$$

P_k – некоторые однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, $\text{ord} P_k = t_k$; для остатка u^0 при любом $\delta > 0$ конечен интеграл $J_{1-\delta}(u^0)$.

Для изотропного слоя подобные асимптотические формулы анонсировались в [8, 9].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Так как $\varepsilon_{jk}(l) = 0$ для всякого $l \in \mathcal{R}$, то разность $u = w - b_3 \omega$, упомянутая в теореме 1, удовлетворяет тем же однородным уравнениям (1), что и w , а потому оказывается гладкой в $\bar{\Omega}$ и подчиняется требованиям теоремы 3. Разложения (11) кратко запишем в виде

$$u(x) = l'(x) + u^A(x) + u^0(x), \tag{13}$$

где $l' \in \mathcal{R}' \subset \mathcal{H}$. Ясно, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u^A) = \frac{1}{2} (1 - \chi) \left\{ \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_\alpha} - 2z \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right\} + \dots,$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}(u^A) = \dots, \quad \varepsilon_{33}(u^A) = 0$$

(многоточием обозначаются слагаемые с носителями в $\overline{B_{2R} \cap \Omega}$). Отсюда при учете (12) и (9) выведем включение $\varepsilon_{jk}(u^A) \in L_2(\Omega)$, т.е. интеграл $E(\cdot, \cdot)$ сходится для u^A , а значит, и для u^0 . Итак, остается приблизить u^A и u^0 в метрике (4) полями с компактными носителями.

Пусть $\chi_\rho(r) = \chi(\rho^{-1}r)$, $\rho \in [2, \infty)$ и $\Pi_\rho = \{x \in \Pi: r > \rho R\}$, $T_\rho = \Pi_{2\rho} \setminus \Pi_\rho$. Для вектора v^A с компонентами

$$v_\alpha^A = (1 - \chi) \chi_\rho \Psi_\alpha - z(1 - \chi) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (\chi_\rho \Psi_3),$$

$$v_3^A = (1 - \chi) \chi_\rho \Psi_3$$

получаем, что на T_ρ выполнены равенства

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(v^A) = \frac{1}{2} \left\{ \left(z \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_\alpha} - \Psi_\alpha \right) \frac{\partial \chi_\rho}{\partial y_\beta} + \left(z \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_\beta} - \Psi_\beta \right) \frac{\partial \chi_\rho}{\partial y_\alpha} + z \Psi_3 \frac{\partial^2 \chi_\rho}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right\} + \chi_\rho \varepsilon_{\alpha\beta}(u^A), \tag{14}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}(v^A) = \varepsilon_{\alpha 3}(u^A) = 0, \quad \varepsilon_{33}(v^A) = \varepsilon_{33}(u^A) = 0.$$

Кроме того,

$$E(u^A - v^A, u^A - v^A) \leq \leq 2 \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \int_{T_\rho} |\chi_\rho \varepsilon_{jk}(u^A) - \varepsilon_{jk}(v^A)|^2 dx + \int_{\Pi_\rho} |(1 - \chi_\rho) \varepsilon_{jk}(u^A)|^2 dx \right\}. \tag{15}$$

Поскольку $E(u^A, u^A) < \infty$, то интеграл по Π_ρ есть бесконечно малая при $\rho \rightarrow +\infty$. Замечая, что $|\partial_r \chi_\rho(r)| \leq c_k \rho^{-k}$, при помощи (14) и (9) вычисляем мажоранту $C\rho^{-2}$ для интеграла по T_ρ . Следовательно, $u^A \in \mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь u^0 . При $v^0 = \chi_\rho u^0$ на T_ρ имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(v^0) = \chi_\rho \varepsilon_{\alpha\beta}(u^0) + \frac{1}{2} \left(u_\alpha^0 \frac{\partial \chi_\rho}{\partial y_\beta} + u_\beta^0 \frac{\partial \chi_\rho}{\partial y_\alpha} \right),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}(v^0) = \chi_\rho \varepsilon_{\alpha 3}(u^0) + \frac{1}{2} u_3^0 \frac{\partial \chi_\rho}{\partial y_\alpha}, \quad \varepsilon_{33}(v^0) = \chi_\rho \varepsilon_{33}(u^0).$$

Таким образом, первый интеграл справа в формуле (15), где u^A, v^A заменены на u^0, v^0 , оценивается сверху величиной

$$c\rho^{-2} \int_{T_\rho} |u^0|^2 dx \leq c \int_{T_\rho} (1 + r^2)^{-1} |u^0|^2 dx \leq c\rho^{\delta-1} J_{1-\delta}(u^0)$$

(см. (10) с $t = 1 - \delta \in (0, 1)$). По прежним причинам второй интеграл также исчезает при $\rho \rightarrow +\infty$, т.е. $u^0 \in \mathcal{H}$.

Итак, вектор (13) попадает в \mathcal{H} и, будучи решением однородной задачи (6), оказывается жестким смещением (в силу предложения 2). Вспоминая, что $w = u + b_3 \omega$, завершаем доказательство теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Конструкции полей v^A и v^0 , приближающих u^A и v^A , различны. При этом от u^A требуется специальная структура (член $z \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_\alpha}$ в (11) – подчеркиваем его присутствие в (8)), а от u^0 – убывание на бесконечности (интеграл (10) с

$t \in (0, 1)$). Предложение 2 не наделяет само решение u ни одним из этих свойств и без теоремы 3, вводящей дополнительное условие (7), использованная схема доказательства теоремы 2 не годится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* In: *Elasticity. Mathematical Methods and Applications*. West Sussex: Ellis Horwood, 1990. P. 211–233.
2. *Назаров С.А.* // *Вестн. СПбГУ*. 1992. № 8. С. 19–24.
3. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* // *Rend. math. Ser. VII*. 1990. V. 10. P. 641–666.
4. *Арнольд В.И., Вишик М.И., Олейник О.А. и др.* // *УМН*. 1989. Т. 44. № 4. С. 191–202.
5. *Гольденвейзер А.Л.* // *ПММ*. 1962. Т. 27. № 5. С. 1057–1074.
6. *Леора С.Н., Назаров С.А., Проскура А.В.* // *ЖВМ и МФ*. 1986. Т. 26. № 7. С. 1032–1048.
7. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*. B.: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
8. *Назаров С.А.* // *Докл. АН АрмССР*. 1988. Т. 87. № 4. С. 156–159.
9. *Назаров С.А.* // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1990. № 5. С. 57–65.