Е. Ю. Захарова, С. В. Яблонский, Некоторые свойства невырожденных суперпозиций в $P_k$, *Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 1, 3–12

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 1 (1972), 3—12

УДК 519.95

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ СУПЕРПОЗИЦИЙ В $P_k$

Е. Ю. Захарова, С. В. Яблонский

Исследуется возможность получения функции, существенно зависящей от произвольного числа аргументов из функций некоторой конечной системы в $P_k$. Вводится характеристика исходной конечной системы, при помощи которой выражается сложность получения простейшей функции от заданного числа переменных. Получена нижняя оценка функции Шеннона для реализации функций из $P_k$ формулами, более высокая, чем известная ранее. Библ. 4 назв.

Во многих задачах синтеза требуется с помощью суперпозиций функций заданной конечной системы получить наиболее простым в каком-либо смысле способом функцию, существенно зависящую от $r \geqslant N$ аргументов, где $N$ произвольно велико (см. [1] — [3]). В данной работе показано, что многозначный случай в этом вопросе отличается от двузначного по существу.

Известно, что из любой конечной системы $\mathfrak{N}^{(2)} \subset P_2$, содержащей функцию, существенно зависящую от $m \geqslant 2$ аргументов, можно получить функцию, существенно зависящую от сколь угодно большого числа аргументов. Важным свойством двузначных функций является то, что при подстановке некоторой функции вместо существенного аргумента другой функции, все существенные аргументы внутренней функции оказываются существенными аргументами всей суперпозиции. Сложность порождения «длинных» функций в системе $\mathfrak{N}^{(2)}$ характеризуется приведенным весом $\rho_{\mathfrak{N}^{(2)}}$ системы $\mathfrak{N}^{(2)}$. Сложность $L^*(N)$ самой «дешевой» функции, существенно зависящей от $N$ аргументов, удовлетворяет следующему асимптотическому равенству:

$$L^*(N) \sim N \cdot \rho_{\mathfrak{N}^{(2)}}, \tag{1}$$

где $\rho_{\mathfrak{N}^{(2)}} = \min\limits_{m_i \geqslant 2} \frac{p_i}{m_i - 1}$, $p_i$ — вес $i$-й функции системы $\mathfrak{N}^{(2)}$, $m_i$ — число существенных аргументов этой функции.

Ниже будет показано, что указанное определение приведенного веса неприменимо в $P_k$ при $k > 2$. Будет введено новое определение приведенного веса $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}}$ для $\mathfrak{N}^{(k)} \subset P_k$, основанное на аналоге соотношения (1). Будет получена нижняя оценка для сложности реализации функций из $P_k$ формулами, более высокая, чем в [4].

Пусть задана произвольная конечная система $\mathfrak{N}^{(k)}$ функций из $P_k$, каждая из которых существенно зависит от всех своих аргументов. При $k \geqslant 3$ возможны следующие явления:

1°. Суперпозициями функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$ можно реализовать функцию, существенно зависящую от $r \geqslant N$ аргументов, где $N$ сколь угодно велико, причем полученная функция существенно зависит от всех своих аргументов. Такие системы назовем невырожденными.

Пример 1. $\mathfrak{N}_1^{(k)} = \{\max(x, y), \min(x, y)\}$ — невырожденная система.

2°. Суперпозициями функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$ можно реализовать функцию, существенно зависящую от сколь угодно большого числа аргументов, однако полученная функция не зависит существенно от некоторых своих аргументов. Это явление назовем потерей аргументов.

Пример 2. $\mathfrak{N}_2^{(3)} = \{f(x, y, z)\}$ — где $f$ задается следующим образом:

| | $y$ | $x$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| $z=0,1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 2 |

$$f(x, y, 2) \equiv 0,$$

$$f(f(x, y, z), u, v) \text{ не зависит существенно от } x,$$
$$f(x, f(y, z, u), v) \quad » \quad » \quad y,$$
$$f(x, y, f(z, u, v)) \quad » \quad » \quad z.$$

3°. Из функций системы $\mathfrak{N}^{(k)}$ с помощью суперпозиций нельзя получить функцию, существенно зависящую более чем от $N(\mathfrak{N}^{(k)})$ аргументов, где $N(\mathfrak{N}^{(k)})$ — константа. Такие системы назовем вырожденными.

Пример 3. $\mathfrak{N}_3^{(4)} = \{g(x, y)\}$, где $g(x, y)$ задается следующей таблицей:

$g(x, y) =$

| $y$ | $x$: 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |

$$g(x, g(y, z)) \equiv g(x, z),$$

$g(g(g(x, y), z)\ u)$ не зависит существенно от $x$,

$$N(\mathfrak{N}_3^{(4)}) = 3.$$

Возникает вопрос: можно ли за конечное число шагов выяснить, способна ли данная система функций $\mathfrak{N}^{(k)} \subset P_k$ порождать функции, существенно зависящие от $r \geqslant N$ аргументов, где $N$ произвольно велико.

Введем некоторые определения. Пусть $\mathfrak{N}^{(k)} \subset P_k$ — произвольная система функций, каждой из которых приписана константа — ее вес. Возьмем некоторую суперпозицию $S$ функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$. Обозначим через $f_S(x_1, \ldots, x_{n_S})$ функцию, реализуемую суперпозицией $S$. Рассмотрим ориентированное дерево $D_S$, соответствующее суперпозиции $S$. В этом дереве возможны отождествления входных вершин. Каждой внутренней вершине дерева приписан символ некоторой функции системы $\mathfrak{N}^{(k)}$, а входным вершинам — символы аргументов. Глубиной дерева $D_S$ (а также суперпозиции $S$) назовем максимальную длину пути от входной вершины к выходной.

Перенумеруем некоторым способом вершины дерева $D_S$. Рассмотрим произвольную вершину $i$ и поддерево $D_S^i$, соответствующее этой вершине. Обозначим через $f_S^i$ функцию, соответствующую поддереву $D_S^i$. Пусть $x_{i_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i_{n_i}}$ — существенные аргументы функции $f_S^i$. Для вершины $i$ определим следующим образом множество $R_S^i$ неупорядоченных пар $(m, l)$, где $m, l \in E_k$: и $m \neq l$ $(m, l) \in$ $\in R_S^i$ тогда и только тогда, когда существуют два набора $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ значений аргументов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$, соседних по некоторому аргументу и таких, что $f_S^i(\tilde{\alpha}_1) = m, \quad f_S^i(\tilde{\alpha}_2) = l$. Через $\mu_S^i$ обозначим множество значений функции $f_S^i$. Припишем вершине $i$ пару $(R_S^i, \mu_S^i)$. Назовем вершины $i$ и $j$ одинаковыми, если они расположены на одном пути от входа к выходу дерева и если $R_S^i = R_S^j$, $\mu_S^i = \mu_S^j$. Рассмотрим некоторые вершины $i$ и $j$, расположенные в дереве в одном пути от входа к выходу. Пусть вершина $i$ находится ближе к выходу, чем вершина $j$. Частью дерева, расположенной между вершинами $i$ и $j$, назовем поддерево, соответствующее вершине $i$, из которого удалено поддерево, соответствующее вершине $j$ (если $j$ — входная вершина, то $D_S^j$ представляет собой одну вершину $j$). Пара одинаковых вершин называется положительной, если в части дерева, расположенной между ними, есть хотя бы один существенный аргумент функции $f_S$, и нулевой в противном случае.

Нетрудно проверить, что имеет место следующая

ЛЕММА 1. *При отождествлении одинаковых вершин и удалении части дерева, расположенной между ними, существенные аргументы функции $f_S$ в оставшемся дереве не изменяются.*

Возьмем произвольную суперпозицию $S$ и отождествим все нулевые пары вершины в дереве $D_S$. Полученное дерево и соответствующую ему суперпозицию назовем каноническими.

Пусть $c_1(\mathfrak{N}^{(k)})$ — число различных пар вида $(R, \mu)$, которые могут встретиться в деревьях, соответствующих каноническим суперпозициям функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$. Очевидно, что $c_1(\mathfrak{N}^{(k)}) \leqslant 2^{C_k^2} \cdot (2^k - 1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы система $\mathfrak{N}^{(k)} \subset P_k$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы нашлась суперпозиция $S$ функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$ глубины не более чем $c_1(\mathfrak{N}^{(k)})$, такая, что в дереве $D_S$ имеется хотя бы одна положительная пара вершин.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $D_S$ — дерево глубины не более чем $c_1(\mathfrak{N}^{(k)})$, содержащее положительную пару вершин $(i, j)$, и $N$ — произвольное натуральное число. Повторим $N$ раз часть дерева, расположенную между вершинами $i$ и $j$. Полученному дереву соответствует функция, существенно зависящая от $r \geqslant N$ аргументов.

Необходимость. Допустим, что из функций системы $\mathfrak{N}^{(k)}$ можно получить функцию, существенно зависящую от $r \geqslant N$ аргументов, где $N$ произвольно велико. Рассмотрим множество всех канонических суперпозиций, образованных из функций системы $\mathfrak{N}^{(k)}$, и соответствующее множество деревьев. Заметим, что если имеется последовательность функций $\{f_S(x_1, \ldots, x_{n_S})\}$, где $n_S \to \infty$, то глубина суперпозиций $S$ также увеличивается. Это следует из того, что суперпозициями глубины не более чем $l$ нельзя реализовать функцию, существенно зависящую более чем от $\eta^l$ аргументов, где $\eta$ — порядок системы $\mathfrak{N}^{(k)}$. В каноническом дереве расстояние между положительными вершинами (если между ними нет другой положительной пары) не превосходит $c_1(\mathfrak{N}^{(k)})$. Поэтому в любом пути длины более чем $c_1(\mathfrak{N}^{(k)})$ встречается по крайней мере одна положительная пара вершин. Теорема доказана.

Перейдем теперь к определению приведенного веса системы $\mathfrak{N}^{(k)}$. Как обычно, назовем весом $L(S)$ суперпозиции $S$ сумму весов входящих в нее функций. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция, существенно зависящая от $n$ аргументов, которую можно реализовать суперпозицией функций системы $\mathfrak{N}^{(k)}$. Вес $L(f(x_1, \ldots, x_n))$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ положим равным $\min L(S)$, где $\min$ берется по всем суперпозициям, реализующим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что $\min L(S)$ достигается на канонической суперпозиции, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только канонические суперпозиции.

Определение. Приведенным весом системы $\mathfrak{N}^{(k)}$ называется число

$$\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{L(f_n(x_1, \ldots, x_{m_n}))}{m_n},$$

где $\varliminf$ берется по всем последовательностям $\{f_n(x_1, \ldots, x_{m_n})\}$ таким, что $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть дано произвольное дерево $D_S$. Назовем приведенным весом $\rho_{D_S}^{(ij)}$ положительной пары вершин $(ij)$ в дереве $D_S$ отношение $L/m$, где $L$ — вес части дерева, расположенной между вершинами $i$ и $j$, $m$ — число существенных аргументов функции $f_S$ в этой части дерева.

(Вес дерева $D_S$ полагаем равным весу суперпозиции $S$).

ЛЕММА 2. *Пусть $S$ — произвольная суперпозиция и $D_S$ — ее дерево. Тогда существет дерево $D'_S$ глубины не более чем $c_2(\mathfrak{N}^{(k)})$, где $c_2(\mathfrak{N}^{(k)})$ — константа, такое, что минимальный приведенный вес положительных пар у него не больше, чем в дереве $D_S$.*

Доказательство. Пусть положительная пара $(ij)$ вершин в дереве $D_S$ имеет минимальный приведенный вес. Отождествим в дереве $D_S$ все такие пары одинаковых вершин, что обе вершины лежат вне пути от вершины $i$ к вершине $j$. После этого отождествляем все внутренние пары. В результате получим дерево $D'_S$, глубина которого не превосходит

$$3 \cdot c_1(\mathfrak{N}^{(k)}) = c_2(\mathfrak{N}^{(k)}).$$

Покажем, что при указанном отождествлении одинаковых вершин приведенный вес пары $(ij)$ не увеличится. Если отождествляемые вершины лежат вне пары $(ij)$, то утверждение очевидно. Пусть пара $(i'j')$ лежит между вершинами $i$ и $j$ и $L'$ и $m'$ — ее параметры. Положим $L'' = L - L'$, $m'' = m - m'$. Тогда

$$\frac{L}{m} = \frac{L' + L''}{m' + m''} \geqslant \min\left(\frac{L'}{m'}, \frac{L''}{m''}\right) = \frac{L''}{m''},$$

так как

$$\frac{L}{m} \leqslant \frac{L'}{m'}.$$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Из леммы 2 следует, что положительная пара вершин, обладающая минимальным приведенным весом, содержится в некотором дереве ограниченной глубины.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathfrak{N}^{(k)}$ *— произвольная невырожденная система функций из* $P_k$. *Тогда*

$$\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}} \sim \min \rho_{D_S}^{(ij)},$$

$\min$ *берется по всем деревьям глубины не более чем* $c_2\,(\mathfrak{N}^{(k)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}} \leqslant \min \rho_{D_S}^{(ij)}$. Пусть $D_S$ — каноническое дерево глубины не более чем $c_2\,(\mathfrak{N}^{(k)})$, в котором находится положительная пара $(ij)$ вершин, обладающая минимальным приведенным весом. Возьмем последовательность $\{F_n\}$, $n \to \infty$, где $F_n\,(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{m_n})$ — функция, соответствующая дереву, которое получается из дерева $D_S$ $n$-кратным повторением части, расположенной между вершинами $i$ и $j$. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} L\,(F_n)/m_n = \rho_{D_S}^{(ij)}, \quad \text{т. е.} \quad \overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}} \leqslant \rho_{D_S}^{(ij)}.$$

Покажем, что $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}} \geqslant \rho_{D_S}^{(ij)}$. Возьмем последовательность $\{F_n\}$ функций, для которой

$$\lim_{n\to\infty} L\,(F_n)/m_n = \overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}}, \qquad m_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и рассмотрим соответствующую последовательность деревьев $\{D_{S_n}\}$. В дереве $D_{S_n}$ последовательно, начиная от входов, отождествляем пары одинаковых вершин. Перенумеруем эти пары и запишем вес и число существенных аргументов тех частей дерева $D_{S_n}$, которые удаляются при отождествлении вершин:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-я пара: | вес | $L_1^{(n)}$, | число существенных | аргументов | $m_1^{(n)}$, |
| 2-я »: | » | $L_2^{(n)}$, | » | » | $m_2^{(n)}$, |
| . . . . . | . . . | . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . |
| $q_n$-я »: | » | $L_{q_n}^{(n)}$, | » | » | $m_{q_n}^{(n)}$, |
| остаток: | | $L_0^{(n)}$, | » | » | $m_0^{(n)}$. |

Очевидно, что $L_0^{(n)}$ и $m_0^{(n)}$ ограничены по $n$. Вес $L(F_n)$ функции $F_n$ представляет собой сумму:

$$L(F_n) = \sum_{i=0}^{q_n} L_i^{(n)};$$

аналогично для числа $m_n$ существенных аргументов функции имеем равенство $m_n = \sum_{i=0}^{q_n} m_i^{(n)}$. Таким образом,

$$\frac{L(F_n)}{m_n} = \frac{L_1^{(n)} + L_2^{(n)} + \ldots + L_{q_n}^{(n)} + L_0^{(n)}}{m_1^{(n)} + m_2^{(n)} + \ldots + m_{q_n}^{(n)} + m_0^{(n)}} =$$

$$= \frac{L_1^{(n)} + L_2^{(n)} + \ldots + L_{q_n}^{(n)}}{m_1^{(n)} + m_2^{(n)} + \ldots + m_{q_n}^{(n)}} - \varepsilon_n \geqslant \min_i \left( \frac{L_i^{(n)}}{m_i^{(n)}} \right) - \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{R}^{(k)}} \geqslant \rho_{D_S}^{(ij)}$. Теорема доказана.

Следствие. *Из теоремы 2 следует, что* $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{R}^{(2)}} = \rho_{\mathfrak{R}^{(2)}}$ *для любой системы* $\mathfrak{R}^{(2)} \subset P_2$.

Приведем пример, когда $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{R}^{(k)}} > \rho_{\mathfrak{R}^{(k)}}$ (здесь $\rho_{\mathfrak{R}^{(k)}}$ формально определяется так же, как $\rho_{\mathfrak{R}^{(k)}}$). Рассмотрим систему

$$\mathfrak{R}_4^{(3)} = \{f(x, y, z) \cup M_3\},$$

где $f(x, y, z)$ — функция из примера 2, а $M_3$ — множество всех функций одного аргумента из $P_3$. Пусть

$$L(f(x, y, z)) = 1, \quad L(\varphi(x)) = 2, \quad \varphi(x) \in M_3.$$

Тогда

$$\rho_{\mathfrak{R}_4^{(3)}} = 1/2, \quad \overset{*}{\rho}_{\mathfrak{R}_4^{(3)}} = 1.$$

Применим теперь введенное понятие приведенного веса системы $\mathfrak{R}^{(k)}$ для получения нижней оценки функции Шеннона $L(n)$ при реализации функций из $P_k$ формулами, если $\mathfrak{R}^{(k)}$ произвольный базис.

ТЕОРЕМА 3.

$$L(n) \geqslant \overset{*}{\rho}_{\mathfrak{R}^{(k)}} k^n / \log_k n.$$

Доказательство. Возьмем дерево $D_S$, соответствующее произвольной суперпозиции $S$ в базисе $\mathfrak{R}^{(k)}$, «Расклеим» аргументы и получим дерево $D'_S$, которому соответствует бесповоротная суперпозиция $S'$. Присоединим к входу $x_1$ дерева $D'_S$ все ребра, соответствующие несущественным аргументам. Восстановим первоначальное отождествление существенных аргументов и получим дерево $D''_S$, которому соответствует та же функция, что и дереву $D_S$.

Пусть $Q(n, L)$ — число функций из $P_k$, зависящих от $n$ аргументов и реализуемых формулами в базисе $\mathfrak{N}^{(k)}$ с весом не более чем $L$, $Q'(n, L)$ — число деревьев с $n$ входами веса не более чем $L$, у которых допускается отождествление входов, вершинам приписаны символы функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$, а все несущественные ребра присоединены к входу $x_1$.

Очевидно, что $Q(n, L) \leqslant Q'(n, L)$, так что для получения нижней оценки достаточно подсчитать число $Q'(n, L)$.

Пусть задано произвольное дерево с указанными свойствами. Выделим в нем «дерево-скелет»: в каждом входе берем по одному исходящему существенному ребру, в остальных вершинах берем единственное исходящее ребро. Потом в вершинах, присоединенных к входу, восстанавливаем недостающие ребра — по символам функций, приписанным вершинам, это делается однозначно. Несущественные ребра присоединяем к $x_1$, а остальные произвольно соединяем с входами. Пусть $h$ — число внутренних вершин исходного дерева. Если вес дерева не превосходит $L$, а $\pi = \min_j p_j$, $p_j$ — вес $j$-й функции базиса, то

$$h = \sum_j h_j \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_j h_j p_j = \frac{1}{\pi} L,$$

где $h_j$ — число $j$-х функций в суперпозиции. Число ребер в дереве-скелете не превосходит $h' = h + n$, $n$ — число входов. Число деревьев с $h'$ ребрами не превосходит $b_1^{h_1}$, $b_1$ — константа.

Выберем дерево, имеющее $h'$ ребер и $n$ входов. Число способов приписывания символов функций из $\mathfrak{N}^{(k)}$ вершинам дерева не превосходит числа $b_2^h$, $b_2$ — константа. Восстановление недостающих ребер делается однозначно, число способов переименования входов не превосходит $n!$. Из определения $\overset{*}{\rho}_{\mathfrak{N}^{(k)}}$ следует, что число $N$ ребер, исходящих из существенных входов, не превосходит $L/\rho^*$. Число способов присоединения свободных существенных ребер к входам не превосходит $n^{\frac{L}{\rho^*}-n}-n$. Таким образом,

$$Q'(n, L) \leqslant n!\, b_1^{L/\pi+n} \cdot b_2^{L/\pi} n^{L/\rho^*-n} = \chi(n, L).$$

Нетрудно проверить, что если

$$L \leqslant (1-\varepsilon)\, \rho^* \frac{k^n}{\log_k n},$$

то $\chi(n, L)/k^{k^n} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$L(n) \gtrsim \rho^*_{\mathfrak{N}(k)} \cdot \frac{k^n}{\log_k n}.$$

Теорема доказана.

Институт прикладной
математики АН СССР

Поступило
30.XII.1971

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Яблонский С. В., Функциональные построения в $k$-значной логике, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 51 (1958), 5—142.
[2] Лупанов О. Б., О сложности реализации функций алгебры логики формулами, Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 3, М., 1960, 61—80.
[3] Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10, М., 1963, 63—97.
[4] Кричевский Р. Е., О реализации функций суперпозициями, Сб. Проблемы кибернетики», вып. 2, М., 1960, 123—138.