Т. Гичев, Р. Ангелова, Квазилинейные мгновенные процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 306–311

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 306–311

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ МГНОВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2005 г. Т. Гичев, Р. Ангелова

Процессы коммутации в теории электрических цепей, процесс соударения двух материальных точек и процесс быстрого сбрасывания массы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Во всех этих процессах некоторые из входящих в уравнения параметров быстро увеличиваются по абсолютной величине. Это вызывает почти скачкообразное изменение состояния процесса. Математической абстракцией таких процессов является мгновенный процесс, в котором изменение состояния осуществляется в фиксированный момент времени. Один из классических подходов к его построению состоит в использовании дополнительных постулатов и соотношений. Таковы, например, законы коммутации и законы сохранения зарядов и потокосцеплений в теории цепей [1, с. 271–275] и закон сохранения количества движения в механике.

Естественным образом возникает проблема создания математических моделей мгновенных процессов, которые описываются дифференциальными уравнениями. Модели мгновенных процессов в линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях рассматривались в [2]. К анализу процессов коммутации в линейных цепях с сосредоточенными и с распределенными параметрами такие модели применялись в [3, 4]. Мгновенное сбрасывание массы движущейся точки и колеблющейся струны анализировалось в [5].

В настоящей работе исследуются модели мгновенных процессов, которые описываются двумя типами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные мгновенные процессы возникают при моделировании коммутации в электрических цепях с нелинейными элементами. Так как при этих процессах конечное состояние процесса похоже на соответствующее состояние мгновенного процесса в линейных цепях, то рассматриваемые мгновенные процессы называются квазилинейными. В качестве приложения изучается мгновенный процесс в некоторых уравнениях с частными производными. Возможность практического применения полученных результатов иллюстрируется на конкретном примере коммутации.

1. Основные результаты. В дальнейшем через $|p|$ обозначается евклидова норма вектора p, а через p_i – его i-я координата. Пусть $\|A\|$ – норма квадратной матрицы A, соответствующая векторной норме $|\cdot|$. Если $p(t)$ и $q(t)$ – определенные на отрезке $[t_0,T]$ вектор-функции одинаковой размерности, то $\rho_T(p,q) = \max\limits_{t_0\le t\le T}|p(t)-q(t)|$.

При $T\in(t_0,T_0)$ и $t\in(t_0,T)$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot x = (Ax+By+C)\alpha_T(t) + f_T(x,y,t), \quad x\in R^m, \quad \dot y = g_T(x,y,t), \quad y\in R^n, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0)=x_0, \quad y(t_0)=y_0. \tag{2}$$

Здесь A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что A имеет обратную матрицу A^{-1}. Функции-столбцы $f_T(x,y,t)$ и $g_T(x,y,t)$ имеют размеры соответственно переменных x и y. Скалярная функция $\alpha_T(t)$ определена и непрерывна либо на промежутке $[t_0,T)$, причем допускается равенство $\lim\limits_{t\to T-0}|\alpha_T(t)|=+\infty$, либо на промежутке $(t_0,T]$, причем допускается равенство $\lim\limits_{t\to t_0+0}|\alpha_T(t)|=+\infty$.

Пусть $\Phi_T(t,\tau)$ – нормированная при $t=\tau$ фундаментальная матрица однородной системы $\dot x = Ax\alpha_T(t)$.

Условие 1. Для матрицы $\Phi_T(t,\tau)$ существуют пределы

$$\Phi_T(T,\tau)=\lim_{t\to T}\Phi_T(t,\tau);\quad \Phi_T(t,t_0)=\lim_{\tau\to t_0}\Phi_T(t,\tau)$$

и при некоторой постоянной M_1 выполнено неравенство $\sup\limits_{t_0\le\tau\le t\le T<T_0}\|\Phi_T(t,\tau)\|\le M_1$.

Введем обозначения

$$z=(x^*,y^*)^*,\quad z_0=(x_0^*,y_0^*)^*,\quad F_T(z,t)=(f^*(x,y,t),g^*(x,y,t))^*, \tag{3}$$

где звездочка обозначает транспонирование, и положим

$$\tilde z_T(t)=\begin{pmatrix}(\Phi_T(t,t_0)-E)(x_0+A^{-1}(By_0+C))\\ y_0-y_0\end{pmatrix},\quad \frac{\delta}{2}=\sup_{t_0\le t\le T<T_0}|\tilde z_T(t)|.$$

Здесь и в дальнейшем через E обозначается единичная матрица. Пусть U – множество $(m+n)$-мерных векторов z, для которых $|z-z_0|\le\delta$. Тогда через Ω_T обозначим множество определенных на отрезке $[t_0,T]$ $(m+n)$-мерных вектор-функций $z(t)$, для которых при каждом $t\in[t_0,T]$ значение $z(t)$ принадлежит множеству U.

Условие 2. Пусть при $T\to t_0$ функция $F_T(z,t)$ определена и непрерывна для $z\in U$, $t\in[t_0,T]$ и при некоторой постоянной M_2 имеет место неравенство $|F_T(z,t)|\le M_2$.

Условие 3. Пусть при $T\to t_0$ существует такая постоянная K_2, что при всех $z\in U$, $\tilde z\in U$ и $t\in[t_0,T]$ справедлива оценка $|F_T(z,t)-F_T(\tilde z,t)|\le K_2|z-\tilde z|$.

Пусть $z_T(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда с учетом введенных обозначений это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$x(t)=\Phi_T(t,t_0)x_0+(\Phi_T(t,t_0)-E)A^{-1}(By_0+C)+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_T(t,\tau)f_T(x(\tau),y(\tau),\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}(\Phi_T(t,\tau)-E)A^{-1}Bg_T(x(\tau),y(\tau),\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

$$y(t)=y_0+\int\limits_{t_0}^{t}g_T(x(\tau),y(\tau),\tau)\,d\tau,$$

которую можно рассматривать при всех $t\in[t_0,T]$.

Теорема 1. *При $T\to t_0$ и при выполнении условий 1, 2, 3 система (4) имеет единственное решение $z_T(t)=(x_T^*(t),y_T^*(t))^*$, $t\in[t_0,T]$, во множестве Ω_T и существует $y^+=\lim\limits_{T\to t_0}y_T(T)=y_0$. Если существует предел $\Phi^+=\lim\limits_{T\to t_0}\Phi_T(T,t_0)$, то имеет место и равенство*

$$x^+=\lim_{T\to t_0}x_T(T)=\Phi^+x_0+(\Phi^+-E)A^{-1}(By_0+C).$$

Решение системы (4) принимается в качестве решения задачи (1), (2).

Далее при $T\in(t_0,T_0)$ и $t\in(t_0,T)$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot x=Ax\alpha_T(t)+f_T(x,y,t),\quad x\in R^m,\quad \dot y=A_1x\alpha_T(t)+g_T(x,y,t),\quad y\in R^n, \tag{5}$$

с начальными условиями (2). Матрицы A, A_1 постоянные соответствующих размеров; матрица A имеет обратную A^{-1}. Скалярная функция $\alpha_T(t)$ определяется, как и выше.

Предполагается, что нормированная при $t = \tau$ фундаментальная матрица $\Phi_T(t,\tau)$ системы $\dot{x} = Ax\alpha_T(t)$ удовлетворяет условию 1. Снова будем использовать обозначения (3), положим

$$\tilde{z}_T(t) = \begin{pmatrix} (\Phi_T(t,t_0) - E)x_0 \\ A_1A^{-1}(\Phi_T(t,t_0) - E)x_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\delta}{2} = \sup_{t_0 \le t \le T < T_0} |\tilde{z}_T(t)|$$

и для этого δ аналогично предыдущему определим новые множества U и Ω_T. Пусть при определенных здесь δ и U для функции $F_T(z,t)$ выполняются условия 2 и 3.

Пусть $z_T(t)$ – решение задачи (5), (2). Это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$x(t) = \Phi_T(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_T(t,\tau) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau,$$

$$y(t) = y_0 + A_1A^{-1}(\Phi_T(t,t_0) - E)x_0 + A_1A^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} (\Phi_T(t,\tau) - E) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau + \tag{6}$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} g_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Теорема 2. *При $T \to t_0$ и выполнении условий 1–3 система (6) имеет единственное решение $z_T(t) = (x_T^*(t), y_T^*(t))^*$, $t \in [t_0, T]$, во множестве Ω_T. Если существует предел $\Phi^+ = \lim\limits_{T \to t_0} \Phi_T(T, t_0)$, то имеет место равенство*

$$z^+ = \lim_{T \to t_0} z_T(T) = \begin{pmatrix} \Phi^+ x_0 \\ y_0 + A_1A^{-1}(\Phi^+ - E)x_0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (6) принимается в качестве решения задачи (5), (2).

2. Доказательство теорем. Так как доказательство обеих теорем проводится одинаково, то приведем только доказательство первой из них.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение определенный на множестве Ω_T интегральный оператор $w = P_T(z) = (w_x^*, w_y^*)^*$, где

$$w_x(t,z) = \Phi_T(t,t_0)x_0 + (\Phi_T(t,t_0) - E)A^{-1}(By_0 + C) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_T(t,\tau) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} (\Phi_T(t,\tau) - E)A^{-1}B g_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau,$$

$$w_y(t,z) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g_T(x(\tau), y(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Докажем, что при $T \to t_0$ этот интегральный оператор отображает множество Ω_T в себя и $P_T(z)$ – оператор сжатия.

Если $z(t)$ принадлежит множеству Ω_T, то введем обозначение

$$w(t,z) - z_0 = \begin{pmatrix} w_x(t,z) - x_0 \\ w_y(t,z) - y_0 \end{pmatrix}.$$

В силу сделанных предположений при $T \to t_0$ существует такая постоянная γ, что $|w(t,z) - z_0| \le \delta/2 + \gamma(T - t_0)$. Из этого неравенства следует, что при $T - t_0 < \delta/(2\gamma)$ оператор $P_T(z)$ отображает множество Ω_T в себя.

Пусть, далее, $z(t)$ и $\tilde{z}(t)$ – две функции из множества Ω_T. Так как

$$w(t,z) - w(t,\tilde{z}) = \begin{pmatrix} w_x(t,z) - w_x(t,\tilde{z}) \\ w_y(t,z) - w_y(t,\tilde{z}) \end{pmatrix},$$

то найдется такая постоянная γ_1, что при $T \to t_0$ выполняется неравенство

$$\rho_T(w(\cdot,z), w(\cdot,\tilde{z})) \le \gamma_1(T-t_0)\rho_T(z,\tilde{z}),$$

из которого следует, что при $T-t_0 < 1/\gamma_1$ оператор $P_T(z)$ является оператором сжатия. Тогда в силу теоремы о сжатых отображениях [6, с. 605–626] при $T \to t_0$ система интегральных уравнений (4) имеет единственное решение $z_T(t)$, $t \in [t_0,T]$, во множестве Ω_T. Равенства в теореме при соответствующих предположениях получаются после предельного перехода при $T \to t_0$ в системе (4). Теорема 1 доказана.

3. Приложения. Сначала теорема 1 применяется к анализу мгновенного процесса в гиперболическом дифференциальном уравнении с частными производными.

Пусть $T \in (t_0,T_0)$ и через H_T обозначено множество точек (x,t), где $x \in [a,b]$ и $t \in (t_0,T)$. При $T \to t_0$ на множестве H_T рассматривается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$Q_T(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\varphi Q_T'(t) + q_1(t))\frac{\partial u}{\partial t} - (\psi Q_T'(t) + q_2(t))u = k_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Здесь $Q_T(t)$ – скалярная функция, которая определена и непрерывна на отрезке $[t_0,T]$, имеет непрерывную производную $Q_T'(t)$ на промежутке $[t_0,T)$ и такая, что $Q_T(t_0) = Q_1$, $Q_T(T) = Q_2$, $Q_T(t) > 0$ при $t \in (t_0,T)$. Далее, при некоторой постоянной l_0 для $t_0 \le s \le t \le T$ и при $T \to t_0$ справедливо неравенство $(Q_T(t)Q_T^{-1}(s))^\varphi \le l_0$. Наконец, k_0 – положительное число, φ и ψ – постоянные, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – непрерывные на $[t_0,T_0)$ функции.

При $T \to t_0$ через $u_T(x,t)$ обозначим решение уравнения (7) с начальными условиями

$$u(x,t_0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = F(x), \quad x \in [a,b], \tag{8}$$

и условиями на границе

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad t \ge t_0. \tag{9}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$k_0\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda X, \quad X(a) = X(b) = 0.$$

Пусть λ_k и $X_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$, – собственные значения и ортонормированная система соответствующих им собственных функций этой задачи. Разложения в ряды Фурье функций $f(x)$ и $F(x)$ имеют вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k(x).$$

При $T \to t_0$, $t \in (t_0,T)$, $k = 1,2,\ldots$, решение начальной задачи

$$Q_T(t)Y'' - (\varphi Q_T'(t) + q_1(t))Y' - (\psi Q_T'(t) + q_2(t))Y = \lambda_k Y, \quad Y(t_0) = a_k, \quad Y'(t_0) = b_k$$

обозначим через $Y_{kT}(t)$. Применяя к этой задаче после приведения уравнения к системе первого порядка теорему 1, получаем равенства

$$\lim_{T\to t_0} Y_{kT}(T) = a_k, \quad \lim_{T\to t_0} Y_{kT}'(T) = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^\varphi b_k + \frac{Q_2^\varphi - Q_1^\varphi}{\varphi Q_1^\varphi}\psi a_k. \tag{10}$$

При $s = 1, 2, \ldots$ и $T \to t_0$ функция $u_{sT}(x,t) = \sum_{k=1}^{s} X_k(x) Y_{kT}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7) и граничным условиям (9). Кроме того, она удовлетворяет начальным условиям

$$u_{sT}(x,t_0) = \sum_{k=1}^{s} a_k X_k(x), \qquad \frac{\partial u_{sT}(x,t_0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} b_k X_k(x).$$

А это означает, что функция $u_{sT}(x,t)$ приближенно удовлетворяет начальным условиям (8).

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число* N, *что при каждом* $s > N$ *найдется число* $T_0(s) > t_0$ *такое, что для* $T \in (t_0, T_0(s))$ *выполняется неравенство*

$$\|u_{sT}(x,T) - f(x)\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Здесь

$$\frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{\varphi} F(x) + \frac{Q_2^{\varphi} - Q_1^{\varphi}}{\varphi Q_1^{\varphi}} \psi f(x),$$

а $\|\cdot\|_{L_2}$ *– среднеквадратическая норма определенных на отрезке* $[a,b]$ *функций.*

Доказательство. Введем обозначение

$$\frac{\partial u_s(x,t_0^+)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} X_k(x) \left(\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{\varphi} b_k + \frac{Q_2^{\varphi} - Q_1^{\varphi}}{\varphi Q_1^{\varphi}} \psi a_k \right),$$

и пусть ε – фиксированное положительное число. Из свойств разложений в ряды Фурье функций $f(x)$ и $F(x)$ следует существование такого натурального числа N, что при $s > N$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} a_k X_k(x) - f(x) \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_s(x,t_0^+)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

В силу равенств (10) для каждого $s > N$ можно найти такое число $T_0(s) > t_0$, что если $T \in (t_0, T_0(s))$, то

$$\left\| u_{sT}(x,T) - \sum_{k=1}^{s} a_k X_k(x) \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x,T)}{\partial t} - \frac{\partial u_s(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Тогда из (11) и (12) следует, что при $s > N$ и $T \in (t_0, T_0(s))$ имеет место оценка

$$\|u_{sT}(x,T) - f(x)\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x,T)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left\| u_{sT}(x,T) - \sum_{k=1}^{s} a_k X_k(x) \right\|_{L_2} + \left\| \sum_{k=1}^{s} a_k X_k(x) - f(x) \right\|_{L_2} +$$

$$+ \left\| \frac{\partial u_{sT}(x,T)}{\partial t} - \frac{\partial u_s(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_s(x,t_0^+)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Пример. Применим теорему 2 к анализу одного примера мгновенного процесса коммутации. Пусть в электрической схеме (см. рисунок) в момент t_0 осуществляется скачкообразное изменение емкости конденсатора C со значения $C_н$ до $C_к$. Напряжение на конденсаторе C обозначается u_C. Пусть C_1 – емкость линейного конденсатора, а C_0 – емкость нелинейного конденсатора, напряжение $u_0(q)$ на котором является функцией заряда q вида $u_0(q) = a_0 q + b_0 q^3$ [7, с. 90]. Далее, через R обозначено сопротивление, а $u(t)$ – источник напряжения. Токи в ветвях схемы равны i, i_1, i_2.

Рассматриваемый мгновенный процесс в момент t_0 аппроксимируется при $T \to t_0$ с помощью последовательности процессов на отрезках $[t_0, T]$. В каждом из этих процессов емкость конденсатора C является дифференцируемой функцией $C_T(t)$, для которой $C_T(t_0) = C_{\text{н}}$ и $C_T(T) = C_{\text{к}}$. Кроме того, пусть при некоторой постоянной M для $t_0 \le \tau \le t \le T < T_0$ выполняется неравенство $(C_T(\tau) + C_1)/(C_T(t) + C_1) \le M$. При $t \in [t_0, T]$ процесс в схеме описывается системой вида (5)

$$\frac{du_C}{dt} = -u_C(\ln(C_T(t) + C_1))' + \frac{i}{C_T(t) + C_1},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_C}{R}(\ln(C_T(t) + C_1))' - \frac{i}{R}\left(a_0 + 3b_0 q^2 + \frac{1}{C_T(t) + C_1}\right) + \frac{u'(t)}{R}, \quad \frac{dq}{dt} = i,$$

и пусть $u_C(t_0) = u_{C0}$, $i(t_0) = i_0$, $q(t_0) = q_0$. Нормированное при $t = \tau$ решение $\Phi_T(t, \tau)$ однородного уравнения

$$\frac{du_C}{dt} = -u_C(\ln(C_T(t) + C_1))'$$

имеет вид $\Phi_T(t, \tau) = (C_T(\tau) + C_1)/(C_T(t) + C_1)$. Согласно сделанным предположениям, выполняются соотношения

$$|\Phi_T(t, \tau)| \le M, \quad \Phi^+ = \lim_{T \to t_0} \Phi_T(T, t_0) = (C_{\text{н}} + C_1)/(C_{\text{к}} + C_1).$$

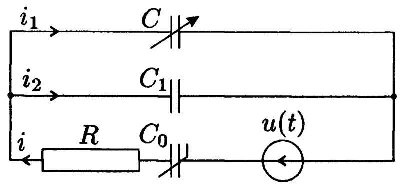

Рисунок.

Поэтому в силу теоремы 2 начальные условия в процессе, следующем за мгновенным процессом, имеют вид

$$u_C^+ = \frac{C_{\text{н}} + C_1}{C_{\text{к}} + C_1} u_{C0}, \quad i^+ = i_0 - \frac{1}{R}\left(\frac{C_{\text{н}} + C_1}{C_{\text{к}} + C_1} - 1\right) u_{C0}, \quad q^+ = q_0.$$

Первое из этих равенств является аналогом закона сохранения зарядов при мгновенной коммутации в линейной цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов В.П.* Основы теории цепей. М., 1985.
2. *Гичев Т.* // Сердика. Българско математическо списание. 1992. Т. 18. С. 79–89.
3. *Ангелова Р., Гичев Т.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1996. № 1/2. С. 15–23.
4. *Ангелова Р., Колев Л., Гичев Т.* // Изв. вузов. Электромеханика. 2001. № 4/5. С. 39–42.
5. *Gichev T.* // J. Theor. Appl. Mech. Sofia, 2001. V. 31. № 4. P. 3–9.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
7. *Филипов Е.* Нелинейна електротехника. София, 1979.

Университет архитектуры, строительства и геодезии,
г. София, Болгария

Поступила в редакцию
10.11.2003 г.