



Общероссийский математический портал

К. Ю. Осипенко, О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным,  
*Владикавказ. матем. журн.*, 2004, том 6, номер 4, 55–62

<https://www.mathnet.ru/vmj223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

21 апреля 2025 г., 19:54:04



УДК 517.51

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
ПО НЕТОЧНЫМ ИСХОДНЫМ ДАННЫМ<sup>1</sup>

Осипенко К. Ю.

*Владимиру Михайловичу Тихомирову  
с благодарностью за внимание и дружбу*

Исследуется задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для единичного круга, когда информация о граничной функции задана в виде конечного набора ее коэффициентов Фурье, вычисленных с фиксированной погрешностью в средне квадратичной или равномерной метрике.

Большинство конкретных результатов, касающихся задач оптимального восстановления, получено для восстановления линейных функционалов — это, например, задачи оптимального восстановления значений функций, их производных или интегралов от них (общую постановку задач оптимального восстановления и соответствующие результаты для конкретных задач можно найти в [1–5] и цитируемой там литературе). Оптимальное восстановление операторов изучено значительно меньше. Отметим в связи с этим работы [6–9]. В данной работе используется метод, предложенный в работе [7]. Этот метод уже применялся к оптимальному восстановлению решения уравнения с частными производными (см. [10]), а именно, к задаче оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре. Подобным образом могут исследоваться многие краевые задачи математической физики. В данной работе мы рассматриваем одну из таких задач — задачу Дирихле.

Рассмотрим задачу Дирихле в единичном круге  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u(\cos t, \sin t) &= f(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Хорошо известно, что решение этой задачи дается равенством

$$u(\rho \cos t, \rho \sin t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt),$$

где  $a_k(f)$  и  $b_k(f)$  — коэффициенты Фурье функции  $f$ . Нас будет интересовать вопрос как наилучшим образом восстановить решение задачи (1), если вычислено лишь конечное число коэффициентов Фурье  $a_0(f), a_1(f), \dots, a_N(f), b_1(f), \dots, b_N(f)$  и вычисления проведены с некоторой погрешностью.

---

© 2004 Осипенко К. Ю.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 02-01-00386 и № 02-01-39012; программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ-304.2003.1 и программы «Университеты России», УР.04.03.067.

Для корректной постановки этой задачи необходимо иметь априорную информацию о том, какой может быть исходная функция  $f$ . Положим

$$\mathscr{W}_2^r = \{ f : f^{(r-1)} \text{ — абс. непр. на } \mathbb{T}, \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} < \infty \},$$

где  $\mathbb{T}$  — отрезок  $[-\pi, \pi]$  с идентифицированными концами, а

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы будем предполагать, что

$$f \in W_2^r = \{ f \in \mathscr{W}_2^r : \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1 \}.$$

Уточним, что понимается под погрешностью вычисления коэффициентов Фурье. Мы считаем, что для любой функции  $f \in W_2^r$  нам известен вектор  $a = (a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)$  такой, что

$$\|a^N(f) - a\|_{l_p^{2N+1}} \leq \delta,$$

где  $a^N(f) = (a_0(f), a_1(f), \dots, a_N(f), b_1(f), \dots, b_N(f))$ , а

$$\|c\|_{l_p^{2N+1}} = \begin{cases} \left( \sum_{k=-N}^N |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|k| \leq N} |c_k|, & p = \infty, \end{cases} \quad c = (c_{-N}, \dots, c_N).$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы  $\varphi: \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow L_2(D)$ , где

$$\|u\|_{L_2(D)} = \left( \frac{1}{\pi} \iint_D |u(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Погрешностью восстановления для данного метода  $\varphi$  назовем величину

$$e_{N,p}(W_2^r, \delta, \varphi) = \sup_{f \in W_2^r} \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^{2N+1} \\ \|a^N(f) - a\|_{l_p^{2N+1}} \leq \delta}} \|u - \varphi(a)\|_{L_2(D)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^r, \delta) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow L_2(D)} e_{N,p}(W_2^r, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань называется оптимальным.

Начнем со случая  $p = 2$ .

**Теорема 1.** При всех  $\delta > 0$

$$E_{N,2}(W_2^r, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(a)(\rho \cos t, \rho \sin t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \rho^k \left( 1 + \frac{2k^{2r}}{(N+2)(N+1)^{2r}} \right)^{-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (2)$$

является оптимальным.

◁ Из общих результатов о задачах восстановления (см., например, лемму 1 из работы [7]) вытекает следующая оценка снизу

$$E_{N,2}(W_2^r, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in W_2^r \\ \|a^N(f)\|_{l_2^{2N+1}} \leq \delta}} \|u\|_{L_2(D)}. \quad (3)$$

Экстремальная задача, стоящая в правой части неравенства (3), может быть переписана в виде (для удобства мы переходим к квадрату ее значения)

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2(f) + b_k^2(f)}{k+1} &\rightarrow \max, \\ a_0^2(f) + \sum_{k=1}^N (a_k^2(f) + b_k^2(f)) &\leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) k^{2r} &\leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим  $u_0 = a_0^2(f)$ ,  $u_k = a_k^2(f) + b_k^2(f)$ . Тогда задача (4) примет вид

$$\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k+1} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^N u_k \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^{2r} \leq 1, \quad u_k \geq 0. \quad (5)$$

Для решения этой задачи рассмотрим ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^{\infty}, \lambda_1, \lambda_2) = \left( -\frac{1}{4} + \lambda_1 \right) u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2k+2} + \lambda_1 \chi_k + \lambda_2 k^{2r} \right) u_k,$$

где

$$\chi_k = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если существует допустимая в (5) последовательность  $\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty}$  и такие  $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$ , что

$$\min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^{\infty}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \quad (6)$$

и

$$\widehat{\lambda}_1 \left( \sum_{k=0}^N \widehat{u}_k - \delta^2 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k k^{2r} - 1 \right) = 0, \quad (7)$$

то  $\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty}$  — решение задачи (5).

Положим

$$\widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^{2r}}, \quad \widehat{u}_k = 0, \quad k \neq 0, N+1,$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{4}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}.$$

Легко проверить, что для так определенных  $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$  и  $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$  выполнены равенства (6) и (7). Следовательно, решение задачи (5) есть величина

$$\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}.$$

Отметим, что из тех же соображений вытекает, что  $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$  — решение задачи

$$\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k+1} \rightarrow \max,$$

$$\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=0}^N u_k + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^{2r} \leq \widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2, \quad u_k \geq 0.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. При фиксированном  $a = (a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$  рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|a^N(f) - a\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow \min, \quad f \in \mathscr{W}_2^r. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция

$$\widehat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 k^{2r}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Из того, что  $\widehat{f}$  — решение задачи (8), вытекает справедливость при всех  $f \in \mathscr{W}_2^r$  равенства (которое может быть проверено и непосредственно)

$$\widehat{\lambda}_1 \|a^N(f) - a^N(\widehat{f})\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f^{(r)} - \widehat{f}^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \widehat{\lambda}_1 \|a^N(\widehat{f}) - a\|_{l_2^{2N+1}}^2$$

$$+ \widehat{\lambda}_2 \|\widehat{f}^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \widehat{\lambda}_1 \|a^N(f) - a\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2.$$

Если  $f \in W_2^r$  и  $\|a^N(f) - a\|_{l_2^{2N+1}} \leq \delta$ , то из этого равенства, положив  $g = f - \widehat{f}$ , получаем

$$\widehat{\lambda}_1 \|a^N(g)\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|g^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \|a^N(f) - a\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2.$$

Оценим погрешность метода (2). Имеем

$$\|u - \widehat{\varphi}(a)\|_{L_2(D)}^2 = \frac{a_0^2(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2(g) + b_k^2(g)}{k+1}$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k+1} : \widehat{\lambda}_1 \sum_{k=0}^N u_k + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^{2r} \leq \widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2, \quad u_k \geq 0 \right\}.$$

Так как значение последней задачи совпадает со значением задачи (5), то полученная оценка сверху для погрешности оптимального восстановления совпадает с оценкой снизу и метод (2) является оптимальным. Подставляя в него выражения для  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$ , получаем утверждение теоремы.  $\triangleright$

Рассмотрим теперь случай  $p = \infty$ .

**Теорема 2.** Положим

$$m = \max \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|k| \leq n} k^{2r} < 1, 0 \leq n \leq N \right\}.$$

Тогда

$$E_{N,\infty}(W_2^r, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{k+1} + \frac{1}{2(m+1)(m+1)^{2r}}},$$

где

$$\alpha_k = 1 - \frac{k+1}{m+2} \left( \frac{k}{m+1} \right)^{2r}, \quad k = 1, \dots, m,$$

а метод

$$\hat{\varphi}(a)(\rho \cos t, \rho \sin t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (9)$$

является оптимальным.

$\triangleleft$  Аналогично неравенству (3) имеем

$$E_{N,\infty}(W_2^r, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in W_2^r \\ \|a^N(f)\|_{l_{\infty}^{2N+1}} \leq \delta}} \|u\|_{L_2(D)}.$$

Экстремальная задача, стоящая в правой части этого неравенства может быть переписана в виде (здесь для удобства мы также переходим к квадрату ее значения)

$$\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq 1} \frac{u_k}{|k|+1} \rightarrow \max, \quad 0 \leq u_k \leq \delta^2, \quad k = -N, \dots, N, \quad \sum_{|k| \geq 1} u_k k^{2r} \leq 1, \quad (10)$$

где  $u_k = a_k^2(f)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) и  $u_{-k} = b_k^2(f)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Рассмотрим функцию Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, \lambda) = \left( -\frac{1}{4} + \lambda_0 \right) u_0 + \sum_{|k| \geq 1} \left( -\frac{1}{2(|k|+1)} + \lambda_{N+1} k^{2r} \right) u_k + \sum_{|k|=1}^N \lambda_k u_k,$$

$\lambda = (\lambda_{-N}, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1})$ . Для решения задачи (10) достаточно найти допустимую в (10) последовательность  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  и такой вектор  $\hat{\lambda}$  с неотрицательными компонентами, что

$$\min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{\lambda}) \quad (11)$$

и

$$\sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k (\hat{u}_k - \delta^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \left( \sum_{|k| \geq 1} \hat{u}_k k^{2r} - 1 \right) = 0. \quad (12)$$

При этом  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  — решение задачи (10).

Положим

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{4}, \quad \hat{\lambda}_{N+1} = \frac{1}{2(m+2)(m+1)^{2r}},$$

$$\hat{\lambda}_k = \begin{cases} \frac{1}{2(|k|+1)} - \hat{\lambda}_{N+1}k^{2r}, & 1 \leq |k| \leq m, \\ 0, & m+1 \leq |k| \leq N. \end{cases}$$

Последовательность  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  определим равенством

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \delta^2, & |k| \leq m, \\ \frac{1 - \delta^2 \sum_{|k|=1}^m k^{2r}}{2(m+1)^{2r}}, & |k| = m+1, \\ 0, & |k| > m+1. \end{cases}$$

Из определения  $m$  следует, что  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  — допустима. Кроме того, при всех  $u_k \geq 0$

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, \hat{\lambda}) = \sum_{|k| \geq m+2} \left( -\frac{1}{2(|k|+1)} + \hat{\lambda}_{N+1}k^{2r} \right) u_k \geq 0 = \mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{\lambda}).$$

Тем самым условие (11) выполнено. Легко убедиться, что условие (12) тоже выполнено. Следовательно,  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  — решение задачи (10). Отсюда

$$E_{N,\infty}(W_2^r, \delta) \geq \sqrt{\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq 1} \frac{\hat{u}_k}{|k|+1}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{k+1} + \frac{1}{2(m+1)(m+1)^{2r}}}.$$

Отметим, что из тех же соображений, которые были использованы выше, вытекает, что  $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$  — решение задачи

$$\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq 1} \frac{u_k}{|k|+1} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k u_k + \hat{\lambda}_{N+1} \sum_{|k| \geq 1} u_k k^{2r} \leq \delta^2 \sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k + \hat{\lambda}_{N+1}, \quad u_k \geq 0.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. При фиксированном  $a = (a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$  рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$\hat{\lambda}_0 |a_0(f) - a_0|^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(f) - a_k|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(f) - b_k|^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow \min, \quad f \in \mathcal{W}_2^r. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\lambda}_k + \hat{\lambda}_{N+1}k^{2r}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Из того, что  $\hat{f}$  — решение задачи (13), вытекает справедливость при всех  $f \in \mathcal{W}_2^r$  равенства (оно может быть проверено и непосредственно)

$$\begin{aligned} & \hat{\lambda}_0 |a_0(f) - a_0(\hat{f})|^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(f) - a_k(\hat{f})|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(f) - b_k(\hat{f})|^2) \\ & \quad + \hat{\lambda}_{N+1} \|f^{(r)} - \hat{f}^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \hat{\lambda}_0 |a_0(\hat{f}) - a_0|^2 \\ & \quad + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(\hat{f}) - a_k|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(\hat{f}) - b_k|^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \|\hat{f}^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \\ & = \hat{\lambda}_0 |a_0(f) - a_0|^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(f) - a_k|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(f) - b_k|^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Если  $f \in W_2^r$  и  $|a_k(f) - a_k| \leq \delta$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $|b_k(f) - b_k| \leq \delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ , то из равенства (14), положив  $g = f - \hat{f}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \hat{\lambda}_0 |a_0(g)|^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(g)|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(g)|^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \|g^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \hat{\lambda}_0 |a_0(f) - a_0|^2 \\ & \quad + \sum_{k=1}^N (\hat{\lambda}_k |a_k(f) - a_k|^2 + \hat{\lambda}_{-k} |b_k(f) - b_k|^2) + \hat{\lambda}_{N+1} \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \delta^2 \sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k + \hat{\lambda}_{N+1}. \end{aligned}$$

Оценим погрешность метода (9). Имеем

$$\begin{aligned} \|u - \hat{\varphi}(a)\|_{L_2(D)}^2 &= \frac{a_0^2(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq 1} \frac{a_k^2(g) + b_k^2(g)}{|k| + 1} \leq \sup \left\{ \frac{u_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq 1} \frac{u_k}{|k| + 1} : \right. \\ & \quad \left. \sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k u_k + \hat{\lambda}_{N+1} \sum_{|k| \geq 1}^{\infty} u_k k^{2r} \leq \delta^2 \sum_{k=-N}^N \hat{\lambda}_k + \hat{\lambda}_{N+1}, u_k \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Так как значение последней задачи совпадает со значением задачи (10), то полученная оценка сверху для погрешности оптимального восстановления совпадает с оценкой снизу и метод (9) является оптимальным. Подставляя в него выражения для  $\hat{\lambda}_{-N}, \dots, \hat{\lambda}_N, \hat{\lambda}_{N+1}$ , получаем утверждение теоремы.  $\triangleright$

Пусть фиксирована погрешность  $\delta > 0$  вычисления коэффициентов Фурье граничной функции  $f$  в задаче Дирихле. Положим

$$N_\delta = \max \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|k| \leq n} k^{2r} < 1 \right\}.$$

Из теоремы 2 вытекает, что для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции  $f$  требуется знание  $2N_\delta + 1$  первых коэффициентов Фурье. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления.

Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [7]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [10]).



### Литература

1. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // In: Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.— New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
2. *Трауб Дж., Вожьянковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.—М: Мир, 1983.—382 с.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93. (Lecture Notes in Math.; V. 1129.)
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
5. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington, New York: Nova Science Publ., 2000.—220 p.
6. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—V. 16, № 1.—P. 87–105.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб.—2002.—Т. 193, № 3.—С. 79–100.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анал. и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление производных на соболевских классах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 1.—С. 39–47.
10. *Magaril-Il'yayev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions // In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov / Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev.—Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.—P. 163–175.

*Статья поступила 25 октября 2004 г.*

ОСИПЕНКО КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ, д. ф.-м. н.  
г. Москва, «МАТИ» — Российский государственный  
технологический университет им. К. Э. Циолковского  
E-mail: konst@osipenko.mcsme.ru