С. А. Степанов, И. Е. Шпарлинский, Оценка неполной суммы мультипликативных характеров от многочленов, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 115–119

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.517

ОЦЕНКА НЕПОЛНОЙ СУММЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ХАРАКТЕРОВ ОТ МНОГОЧЛЕНОВ

С. А. Степанов, И. Е. Шпарлинский

В работе получена оценка суммы

$$S(P)=\sum_{x=1}^{P}\chi(f(x))$$

с мультипликативным характером χ по модулю $q=p^{\alpha}$, равному степени фиксированного простого числа p, от значений многочлена $f\in\mathbf{Z}[x]$. Указанная оценка нетривиальна начиная со значений $P=q^{\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$ и обобщает ряд ранее известных оценок.

1. Пусть $p\geqslant 3$ — фиксированное простое число, α — натуральное, χ — произвольный неглавный мультипликативный характер по модулю p^{α}, $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом степени $n\geqslant 1$.

Для натурального P определим сумму

$$S(P)=\sum_{x=1}^{P}\chi(f(x)).$$

В случае $n=1$ такие суммы впервые рассматривались А. Г. Постниковым [1]. Затем его исследования были продолжены в работах [2—5]. В работе Д. Исмоилова [6] оценивались суммы с произвольным n и $P=p^{\alpha}$, т. е. полные суммы.

Здесь получена оценка суммы $S(P)$, нетривиальная при достаточно малых по сравнению с модулем p^{α} значениях P. В отличие от случая рациональных тригонометрических сумм, исследованного Н. М. Коробовым в [7], здесь удается получить нетривиальные оценки начиная со значений $P>p^{\alpha\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$ (для тригонометрических сумм это возможно только при $\varepsilon>1/n$).

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — все различные корни многочлена f. Положим

$$\Delta(f)=\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j).$$

Очевидно, что $\Delta(f)$ — целое число.

В дальнейшем будем предполагать, что многочлен f удовлетворяет условию $(\Delta(f),\ p)=1$.

Кроме того будем предполагать, что характер χ является первообразным.

Отметим, что сумму $S(P)$ можно оценить и без этих предположений, однако получающаяся оценка будет зависеть от максимальной степени p, делящей $\Delta(f)$, и от порядка характера χ.

Теорема. *Определим величину r из равенства $P^r = p^\alpha$. Тогда справедлива оценка*

$$S(P) = O(P^{1-\rho}),$$

где $\rho = \delta \min(1/r^2, 1/n)$, $\delta > 0$ — *некоторая абсолютная постоянная.*

2. Пусть g — такой первообразный корень по модулю p^α, что при $(u, p) = 1$

$$\chi(u) = e(\operatorname{ind} u/(p-1)\,p^{\alpha-1}),$$

где $e(z) = \exp(2\pi i z)$.

Для целого $t \neq 0$ через $\nu(t)$ обозначим максимальную степень p, делящую t,

$$p^{\nu(t)} \| t.$$

Тогда при любом натуральном s найдется такое максимальное m, для которого

$$sm - \nu(m) < \alpha \leqslant s(m+1) - \nu(m+1). \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть s натуральное, m является максимальным натуральным числом, удовлетворяющим соотношению* (1). *Тогда существует такое целое a, $(a, p) = 1$, что для любого целого u выполнено сравнение*

$$\operatorname{ind}(1 + p^s u) \equiv a(p-1) \sum_{i=1}^{m} (-1)^i p^{si} u^i / i \pmod{(p-1)\,p^{\alpha-1}}.$$

Доказательство см. [4, 5].

Лемма 2. *Пусть s натуральное, m является максимальным натуральным числом, удовлетворяющим соотношению* (1), *$F(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n, удовлетворяющий условию $F(0) = 1$. Тогда существует такое целое a, $(a, p) = 1$, что для любого целого y выполнено сравнение*

$$\operatorname{ind}(F(p^s y)) \equiv a(p-1) \sum_{i=1}^{m} S_i p^{si} y^i / i \pmod{(p-1)\,p^{\alpha-1}},$$

где S_i — i-я степенная сумма корней многочлена $G(y) = F(1/y)\,y^n$.

Доказательство. Пусть $F(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + 1$. Тогда в силу леммы 1

$$\operatorname{ind}(F(p^s y)) \equiv a(p-1) \sum_{i=1}^{m} (-1)^i p^{si} ((F(p^s y) - 1)/p^s)^i / i \equiv$$

$$\equiv a(p-1) \sum_{i=1}^{m} (-1)^i (F(p^s y) - 1)^i / i \pmod{(p-1)\,p^{\alpha-1}}.$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i (F(p^s y) - 1)^i / i = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j p^{js} y^j \right)^i \Big/ i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^i i^{-1} \left[\sum_{k_1 + \ldots + k_n = i} \frac{i!}{k_1! \ldots k_n!} b_{k_1} \ldots b_{k_n} (p^s y)^{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n} \right],$$

где внутренняя сумма распространена на все целые неотрицательные решения уравнения $k_1 + \ldots + k_n = i$. Собирая вместе слагаемые с одинаковым значением $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = j$ и меняя порядок суммирования, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i (F(p^s y) - 1)^i / i = \sum_{j=1}^{mn} Q_j p^{js} y^j,$$

где

$$Q_j = \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = j} (-1)^{k_1 + \ldots + k_n} \frac{i!}{k_1! \ldots k_n!} b_{k_1} \ldots b_{k_n}.$$

Отсюда, используя для многочлена $G(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$ формулы Варинга (см. [8, теорема 1.76]), получаем, что

$$Q_j=S_j/j.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^i(F(p^s y)-1)^i/i=\sum_{j=1}^{mn}S_j p^{js}y^j/j.$$

Учитывая, что S_j — целые числа, в силу выбора m получаем требуемое сравнение.

Лемма 3. *Пусть $N>300$, $\lambda\geqslant N$ натуральные, $\mu=[\lambda/10]+1$, $\varphi(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени N. Для натурального $Q\leqslant p^\lambda$ определим t равенством $Q^t=p^\lambda$. Тогда при $t\leqslant(N-1)/300$ справедлива оценка*

$$\sum_{x=1}^{Q}e(\varphi(x)/p^\lambda)=O(Q^{1-\gamma/t^2}+T),$$

где $\gamma>0$ — абсолютная постоянная, T — максимум числа решений сравнения

$$\varphi^{(\nu)}(x)\equiv 0 \pmod{p^\mu},\qquad 1\leqslant x\leqslant Q,$$

при $25t\leqslant\nu\leqslant 27t$.

Доказательство см. [7, теорема 2].

В [7] была получена оценка величины T, однако там требовалось выполнение условия $p>N^2$, тогда как в дальнейшем нам понадобятся оценки величины T и при достаточно больших значениях N.

Лемма 4. *Пусть $\psi(x)$ — многочлен степени k с целыми коэффициентами, среди которых хотя бы один не делится на p, Q и τ натуральные. Тогда для числа решений $T(Q, p^\tau)$ сравнения*

$$\psi(x)\equiv 0 \pmod{p^\tau},\qquad 1\leqslant x\leqslant Q,$$

справедлива оценка

$$T(Q, p^\tau)=O(Q^{1-1/k}+Qp^{-\tau/k}).$$

Доказательство. Обозначим $T(p^\tau)=T(p^\tau, p^\tau)$. Для $T(p^\tau)$ справедлива оценка

$$T(p^\tau)=O(p^{\tau-\tau/k})$$

(см. [9, 10]). Тогда при $Q\geqslant p^\tau$

$$T(Q, p^\tau)\leqslant T(p^\tau)[Q/p^\tau+1]=O(Qp^{-\tau/k}),$$

так что в этом случае оценка доказана. При $Q\leqslant p^\tau$ определим натуральное ω условиями $p^{\omega-1}\leqslant Q\leqslant p^\omega$. Ясно, что $\omega\leqslant\tau$, следовательно,

$$T(Q, p^\tau)\leqslant T(Q, p^\omega)\leqslant T(p^\omega)=O(p^{\omega-\omega/k})=O(Q^{1-1/k}),$$

так как $p^\omega\leqslant pQ$. Тем самым лемма доказана.

3. Перейдем теперь к доказательству теоремы. Положим

$$s=[\alpha/400(r+n)],\qquad Q=[P/p^s],\qquad Q^t=p^{\alpha-1},$$

и m определим соотношением (1). Тогда при достаточно большом α справедливы неравенства

$$\begin{aligned}&300t+1\leqslant m\leqslant 500t,\qquad 27t<m-n,\qquad (27t+n)s<\alpha/11;\\ &p^s<P^{1/2}<Q,\qquad t<2r.\end{aligned}\tag{2}$$

Далее,

$$S(P)=S(p^sQ)+O(p^s)=\sum_{x=1}^{p^s}\sigma(x)+O(p^s),$$

где

$$\sigma(x)=\sum_{y=0}^{Q-1}\chi(f(x+p^s y)).$$

Пусть сумма $\sigma(x)$ принимает наибольшее значение при $x=x_0$. Соответствующую сумму обозначим через σ, так что

$$S(P)\leqslant p^s\sigma+O(p^s). \qquad (3)$$

Очевидно, можно считать, что $f(x_0)\not\equiv 0 \pmod p$, так как иначе $\sigma=0$. В таком случае определим Ψ из сравнения

$$\Psi f(x_0)\equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Тогда

$$\operatorname{ind} f(x_0+p^s y)=\operatorname{ind} f(x_0)+\operatorname{ind}(\Psi f(x_0+p^s y)).$$

Следовательно,

$$\sigma=\chi(f(x_0))\sum_{y=0}^{Q-1}\chi(F(p^s y)),$$

где многочлен $F(y)$ выберем так, чтобы $F(y)\equiv\Psi f(x_0+y) \pmod{p^\alpha}$ и $F(0)=1$, так что к нему можно применять утверждение леммы 2. Отсюда вытекает равенство

$$\sigma=\chi(f(x_0))\sum_{y=0}^{Q-1}e(\varphi(y)/p^{\alpha-1}),$$

где

$$\varphi(y)=a\sum_{i=1}^{m}S_i p^{si}y^i/i.$$

Покажем, что для величин S_i справедливо соотношение

$$\min(\nu(S_i),\ \ldots,\ \nu(S_{i+n-1}))<n. \qquad (4)$$

В самом деле, пусть $\vartheta_1^{-1}, \ldots, \vartheta_k^{-1}$ — корни $F(y)$ с кратностями $m_1, \ldots, m_k$ соответственно. Тогда

$$S_i=\sum_{j=1}^{k}m_j\vartheta_j^i.$$

Из определения $F(y)$ вытекает, что

$$\Delta(F)\equiv\Delta(f) \pmod p, \qquad (5)$$

а также, что $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ — целые алгебраические числа.

Через $\mathbf{R}$ обозначим кольцо целых чисел поля $\mathbf{Q}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$. В силу (5) и предположения теоремы получаем, что для каждого натурального μ все решения в кольце $\mathbf{R}$ системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{k}u_j\vartheta_{j_i}^{\nu}\equiv 0 \pmod{p^\mu}, \qquad \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

являются нулевыми по модулю p^μ.

Пусть $\min(\nu(S_i),\ \ldots,\ \nu(S_{i+n-1}))=\mu$. Тогда, рассматривая первые $k\leqslant n$ величин $\nu(S_i), \ldots, \nu(S_{i+n-1})$, имеем

$$\sum_{j=1}^{k}m_j\vartheta_j^{i+\nu}\equiv 0 \pmod{p^\mu}, \qquad \nu=0,\ \ldots,\ k-1.$$

Очевидно, что хотя бы одно $\vartheta_j\not\equiv 0 \pmod p$, кроме того, $\nu(m_j)<m_j\leqslant n$. Тогда из предыдущего вытекает, что $\mu\leqslant n$, тем самым неравенство (4) доказано.

Для многочлена с целыми коэффициентами $H(y)$ через $\operatorname{ord}(H)$ обозначим наибольшую степень p, делящую все его коэффициенты. Тогда для многочлена $\varphi(y)$ при $0 \leqslant \nu < m-n$ в силу (4) имеем

$$\operatorname{ord}(\varphi^{(\nu)}) < n + (\nu + n) s. \qquad (6)$$

Из неравенств (2) вытекает, что величины s и m выбраны таким образом, что к сумме σ применима лемма 3 с параметрами $\lambda = \alpha - 1$, $N = m$.

Из (6) и лемм 3 и 4 вытекает, что

$$\sigma = O\left(Q^{1-\gamma/t^2} + Q^{1-1/m} + Qp^{(27t+n)s - [\alpha/10]}\right).$$

Отсюда и из неравенств (2) и (3) после простых вычислений получаем утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1955.— Т. 19.— С. 11—16.
2. Розин С. М. О нулях L-рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1959.— Т. 23.— С. 503—508.
3. Barban M. B., Linnik Yu. V., Chudakov N. G. On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference // Acta Arithm.— 1964.— V. 9, № 4.— P. 375—390.
4. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле для модулей, равных степеням нечетного простого // Вестник ЛГУ.— 1966.— № 1.— С. 93—98.
5. Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ.— 1973.— № 2.— С. 46—52.
6. Исмоилов Д. Оценка суммы характеров от многочленов // Докл. АН ТаджССР.—1986.— Т. 29, № 10.— С. 567—571.
7. Коробов Н. М. Двойные тригонометрические суммы и их приложения к оценкам рациональных сумм // Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 1.— С. 35—43.
8. Лидл П., Нидеррайтер Г. Конечные поля.—М.: Мир, 1988.
9. Стечкин С. Б. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Тр. МИАН СССР.— 1977.— Т. 143.— С. 188—207.
10. Конягин С. В. О числе решений сравнения n-степени // Мат. сб.— 1979.— Т. 102.— С. 171—187.

Статья поступила 23.11.89