



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Пота-
шев, Квазирешения обратной краевой задачи гид-
роаэродинамики, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284,
номер 2, 319–322

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

25 января 2025 г., 21:13:17



А.М. ЕЛИЗАРОВ, Н.Б. ИЛЬИНСКИЙ, А.В. ПОТАШЕВ

КВАЗИРЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОАЭРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Л.И. Седовым 10 I 1985)

Рассмотрим обратную краевую задачу гидроаэродинамики в следующей постановке [1–3]: определить форму замкнутого крылового профиля с одной острой кромкой в точке B , обтекаемого плоским потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости, по заданному вдоль его поверхности L_z распределению скорости $v = f(s)$, $0 \leq s \leq L$ (s – дуговая абсцисса L_z , отсчитываемая от $s = 0$ на острой кромке B до $s = L$ на ней же, L – заданный периметр). Функция $f(s)$ гёльдеровская, величина скорости на бесконечности равна v_∞ .

При обтекании крылового профиля с закругленной передней и острой задней кромками точка B , в силу гипотезы Жуковского – Чаплыгина, является точкой схода потока, а на передней кромке имеется точка A ($s = s_A$) разветвления потока, в которой скорость обращается в нуль первого порядка (при $0 < s < s_A$ направление скорости противоположно направлению обхода контура, а при $s_A < s < L$ совпадает с ним). Величина скорости $v = v_B$ в точке B ограничена и отлична от нуля, если задняя кромка является бесконечно тонкой ($\epsilon = 2$, где $\epsilon\pi$ – внутренний к области течения угол в точке B). При $1 < \epsilon < 2$ величина $v_B = 0$. Таким образом, чтобы функция $f(s)$ характеризовала скорость на поверхности крылового профиля, она должна удовлетворять следующим условиям: $f(s) < 0$ при $0 < s < s_A$, $f(s) > 0$ при $s_A < s < L$; $f(s) \sim c_1(s - s_A)$ в окрестности s_A , $f(L) = -f(0) = v_B > 0$ при $\epsilon = 2$; $f(s) \sim -c_2 s^{2/\epsilon - 1}$ и $f(s) \sim c_2(L - s)^{2/\epsilon - 1}$ соответственно в окрестностях точек $s = 0$ и $s = L$ при $1 < \epsilon < 2$, $c_j = \text{const} > 0$, $j = 1, 2$.

Пусть при конформном отображении $z = z(\zeta)$ внешности искомого профиля соответствует область $E^- = \{\zeta = re^{i\theta}, r > 1\}$ в плоскости ζ , причем $z(\infty) = \infty$, а $\zeta_B = 1$ является прообразом точки B . Решив систему для определения неизвестных параметров, найдем $\zeta_A = e^{i(\pi + 2\alpha)}$, где аргумент скорости на бесконечности α ($|\alpha| < \pi/2$) однозначно определяется из уравнения $\alpha + \text{ctg} \alpha = \pi\varphi_B/\Gamma - \pi/2$ ($\Gamma = \int_0^L f(s) ds$ – циркуляция скорости, $\varphi_B = \int_{s_A}^L f(s) ds$). Интегральное представление

решения определяется единственным образом и имеет вид

$$z(\zeta) = (\mathfrak{A} p)(\zeta) \equiv \int_1^\zeta (\zeta - \xi^{-1})^{\epsilon-1} \exp[(\mathfrak{B} p)(\zeta)] d\xi, \quad \zeta \in E^-,$$

где $(\mathfrak{B} p)(\zeta) = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} p(\theta) [(e^{i\theta} + \zeta)/(e^{i\theta} - \zeta)] d\theta$, а гёльдеровская функция $p(\theta) = \ln |s'(\theta)| - (\epsilon - 1) \ln [2 \sin(\theta/2)]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, причем $s(\theta) \in C^1$ является решением дифференциального уравнения $f[s(\theta)] \cdot s'(\theta) = \varphi'(\theta)$, $\zeta(2\pi) = 0$, а $\varphi(\theta) = -\Gamma [\theta - 2 \sin(\theta/2) \sin(\theta/2 - \alpha) / \sin \alpha] (2\pi)^{-1}$ – потенциал скорости на ∂E^- . Условиями разрешимости задачи будут (ср. с [3]):

$$(1) \quad A_1 + iA_2 \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta) e^{i\theta} d\theta = \pi(\epsilon - 1), \quad A_3 \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = -2\pi \ln(4\pi v_\infty \sin \alpha / \Gamma),$$

первое из которых выражает требования замкнутости L_z . Таким образом, однозначное решение задачи существует при выполнении условий (1).

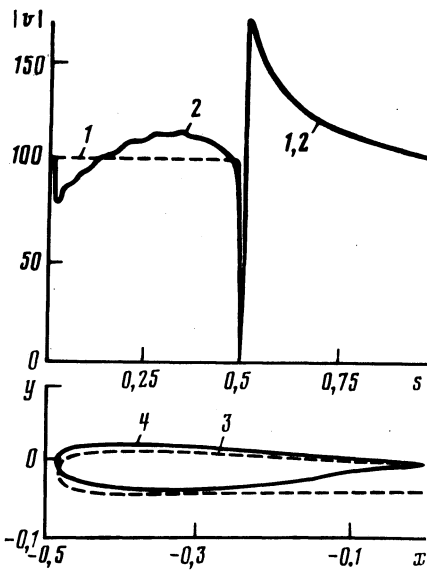


Рис. 1

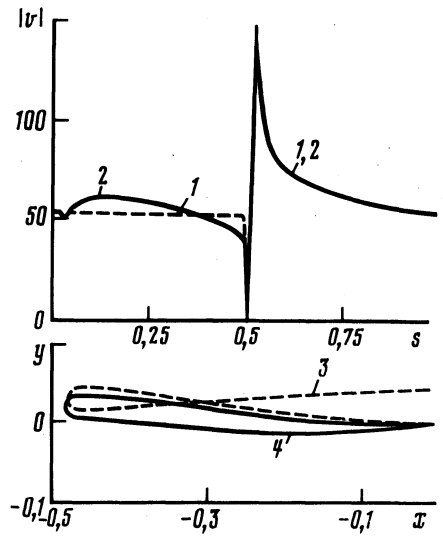


Рис. 2

Если функция $p(\theta)$ лежит в фиксированном шаре банахова пространства C_β , $0 < \beta \leq 1$, 2π -периодических гёльдеровских функций, то из точных оценок нормы преобразования Гильберта [4, 5] следует непрерывность оператора $(\mathcal{S}p)(\xi)$, $\xi \in \bar{E}^-$ в топологии равномерной сходимости. Из последнего свойства в предположении выполнения (1) вытекает непрерывность оператора \mathcal{M} в той же топологии, что означает устойчивость решения задачи.

Получающийся при выполнении (1) замкнутый контур может оказаться неоднolistным, что означает физическую нереализуемость решения задачи. Наличие угловой точки контура L_z ограничивает возможность выбора достаточных условий однолистности из имеющихся. Такие условия известны лишь при $\epsilon < 2$, в частности, условие [6]

$$(2) \quad |p'(\theta_1) - p'(\theta_2)| \leq \frac{3 - \epsilon}{M(\gamma)} \left| \theta_1 - \theta_2 \right|^\gamma, \quad M(\gamma) = \frac{2^\gamma}{\pi} \int_0^{\pi/2} t^\gamma \operatorname{csec} t dt,$$

$$0 < \gamma \leq 1.$$

Если найденная функция $p(\theta)$ не удовлетворяет (1), то ее надо "подправить" так, чтобы эти условия были выполнены, а новая функция возможно меньше отличалась от исходной в некотором смысле, например, по норме некоторого пространства, элементами которого являются обе эти функции. Для этого введем обобщение понятия квазирешения некорректных задач [7] на случай обратной задачи гидроаэродинамики.

О п р е д е л е н и е. Квазирешением обратной краевой задачи гидроаэродинамики на множестве корректности U из нормированного пространства P называется элемент $p_* \in U$, минимизирующий функционал $J(q) = \|q(\theta) - p(\theta)\|_P$ на U .

Отметим, что множество корректности U определяется, помимо условий (1), требованиями физической реализуемости решения обратной задачи и, в частности, достаточными условиями однолистности.

Т е о р е м а 1. Пусть $U \subset C^{1+\gamma}$ и определяется условиями (1), (2), $P = L_2 [0, 2\pi]$. Тогда задача нахождения квазирешения корректна по Адамару (квази-

решение $p_*(\theta)$ существует, единственно и устойчиво), причем $p_*(\theta)$ является Ω -нормальным решением задачи минимизации $J(q)$ на U при $\Omega(q) = \|q(\theta) - p(\theta)\|_{C_\mu}$ с любым $0 < \mu \leq 1$.

Аэродинамика предъявляет к крыловым профилям требование безотрывности обтекания. Критерии безотрывности достаточно сложны даже в самых простых моделях обтекания (см., например, [8]). Предположим, что $f(s)$ имеет на верхней поверхности L_z два участка монотонности: участок разгона $[s_A, s_0]$ и участок торможения $[s_0, L]$, $s_0 \in (s_A, L)$, на котором пограничный слой считаем турбулентным. Из результатов [9], § 54, следует, что распределение скорости на $[s_0, L]$ для профиля с бесконечно тонкой задней кромкой ($\epsilon = 2$), удовлетворяющее условию безотрывности, должно иметь вид

$$(3) \quad f = f_1(s) \equiv v_{\max} [1 + 0,7R^{1/5}(s - s_0)/(s_0 - s_A)]^{-1/5},$$

где $v_{\max} = f_1(s_0)$, $R = v_{\max}(s_0 - s_A)/\nu$, ν — кинематический коэффициент вязкости. Распределение (3) близко по форме к распределению Стрэтфорда [10], использованному ранее при аэродинамическом проектировании безотрывных профилей [11], но значительно проще последнего.

Пусть $f(s)$ на фиксированном участке $[s_A, s_1]$ линейна, на участке $[s_1, s_0]$ с некоторым $s_0 \in [s_1, L]$ принимает постоянное значение v_{\max} , а на $[s_0, L]$ имеет вид (3). Свободные параметры s_0 и v_{\max} выберем так, чтобы максимизировать площадь эпюры $f(s)$ на $[s_1, L]$ для увеличения подъемной силы. В частности, при фиксированном значении R решение этой экстремальной задачи нетрудно получить в явном виде. Теперь распределение скорости по верхней поверхности полностью задано. Далее нетрудно найти в явном виде соответствующее ему выражение $p_1(\theta) = p(\theta)$ при $\theta \in [0, \pi + 2\alpha]$. Для обеспечения безотрывности обтекания на нижней поверхности можно взять в качестве $f(s)$ неубывающую функцию $f_2(s)$, $f_2(0) = -v_B$, $f_2(s_A) = 0$. Обозначим соответствующую ей функцию $p(\theta)$ при $\theta \in [\pi + 2\alpha, 2\pi]$ через $p_2(\theta)$. Условия разрешимости (1) для $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, вообще говоря, выполняться не будут. Поэтому вновь приходим к задаче отыскания квази-решения. Отметим, что условие монотонности $f_2(s)$ эквивалентно требованию (при условии $p_2(\theta) \in C^1$)

$$(4) \quad p_2'(\theta) \leq -0,5 \operatorname{tg}(\theta/2 - \alpha), \quad \pi + 2\alpha \leq \theta \leq 2\pi.$$

Теорема 2. Пусть множество U имеет вид

$$U = \{q(\theta) \in C^1, \quad \theta \in [\pi + 2\alpha, 2\pi]: q(\pi + 2\alpha) = p_1(\pi + 2\alpha), \quad q(2\pi) = p_1(0),$$

$$(5) \quad \int_{\pi + 2\alpha}^{2\pi} [p_2(\theta) - q(\theta)] e^{i\theta} d\theta = A_1 + iA_2 - \pi(\epsilon - 1),$$

$$\int_{\pi + 2\alpha}^{2\pi} [p_2(\theta) - q(\theta)] d\theta = A_3 + 2\pi \ln(4\pi v_\infty \sin \alpha/\Gamma),$$

$$q'(\theta) \leq -0,5 \operatorname{tg}(\theta/2 - \alpha)\}, \quad P = L_2[\pi + 2\alpha, 2\pi].$$

Тогда остаются в силе все утверждения теоремы 1.

З а м е ч а н и е. При задании $f(s)$ на нижней поверхности можно использовать распределение вида (3) на участке торможения и монотонно возрастающее распределение на участке разгона. При отыскании квази-решения необходимо варьировать с учетом (4) функцию $p(\theta)$ на интервале, соответствующем участку разгона.

Пусть $p_*(\theta)$ — квази-решение задачи на множестве (5), $T(\theta) = p_*(\theta) - p_2(\theta)$.

В силу (5) $T(\pi + 2\alpha) = T(2\pi) = 0$, $T'(\theta) \leq -p_2'(\theta) - 0,5 \operatorname{tg}(\theta/2 - \alpha)$, $\int_{\pi + 2\alpha}^{2\pi} T(\theta) e^{i\theta} d\theta =$

$= \pi(\epsilon - 1) - A_1 - iA_2, \int_{\pi+2\alpha}^{2\pi} T(\theta)d\theta = 2\pi \ln(4\pi v_\infty \sin \alpha/\Gamma) - A_3$ и $\|T(\theta)\|_{L_2}$ минимальна. Разлагая $T(\theta)$ в ряд Фурье, приходим к задаче минимизации суммы квадратов его коэффициентов при указанных дополнительных условиях. Решив эту экстремальную задачу для отрезка ряда с достаточно большим числом M членов и увеличивая M , получим элементы минимизирующей последовательности, равномерно сходящейся к квазирешению задачи.

На рис. 1, 2 приведены примеры конкретных числовых расчетов, основанных на методе квазирешений (при $\epsilon = 2, s_0 = s_1$ и распределении $f_1(s)$ вида (3) с выбором параметров из условия максимума площади его эпюры), при следующих исходных данных: $v_\infty = 104,2 \text{ 58,05 м/с}$; $\alpha = 0,053, 0,07$; $v_{\max} = 173, 150 \text{ м/с}$; $v_B = 102,4, 53,77 \text{ м/с}$; $\Gamma = 9,26, 6,73 \text{ м}^2/\text{с}$; $L = 1 \text{ м}$. Кривые 1, 3 – исходная эпюра скоростей и соответствующий ей разомкнутый контур, 2, 4 – измененная эпюра скоростей и соответствующий ей замкнутый контур для $M = 10$.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за полезные советы и замечания.

Научно-исследовательский институт
 математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
 при Казанском государственном университете
 им. В.И. Ульянова-Ленина

Поступило
 10 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangler W. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, 1938.
2. Тумашев Г.Г. – Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, т. 112, № 3, с. 3–24.
3. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, 1965. 336 с.
4. Аксентьев Л.А. – Изв. вузов. Математика, 1968, № 3, с. 3–8.
5. Александров А.Б. – Функц. анализ и его прилож., 1975, 9, № 2, с. 1–4.
6. Аксентьев Л.А. Докт. дис., Казань, 1971. 320 с.
7. Иванов В.К. – Матем. сб., 1963, т. 61, № 2, с. 211–224.
8. Степанов Г.Ю. Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 5–28.
9. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
10. Stratford B.S. – J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, p. 1–16.
11. Либек Х. Ракетн. техн. и космонавтика, 1978, т. 16, № 12, с. 122–143.