

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лихачев, В. В. Пикалов, Синтезированный алгоритм трехмерной томографии,
Матем. моделирование, 1998, том 10, номер 1, 73–85

<https://www.mathnet.ru/mm1240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 02:40:19



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

СИНТЕЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

© *А.В.Лихачев, В.В.Пикалов*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН
Новосибирск, 630090, Институтская 4/1
e-mail: pickalov@itam.nsc.ru,
<http://www.itam.nsc.ru/lab17>

Предлагается новый алгоритм трехмерной малоракурсной томографии, полученный путем комбинирования алгоритмов, основанных на точных формулах обращения, с методами Фурье. Рассмотрены две его модификации, названные FBPF3D и FBPF03D. Численное моделирование показало, что при числе проекций 10–30 обе модификации могут успешно конкурировать с итерационными алгебраическими алгоритмами, а при дальнейшем увеличении количества проекций оказываются предпочтительнее. В вычислительном эксперименте число проекций было доведено до 361. Оказалось, что в этих условиях FBPF3D существенно превосходит по точности реконструкции алгоритм FBP3D, построенный по интегральной формуле обращения трехмерного Р-преобразования. Восстановление по зашумленным проекциям показало достаточную устойчивость обеих модификаций, которую можно повысить, применяя процедуры регуляризации.

SYNTHESIZED ALGORITHM OF THREE-DIMENSIONAL TOMOGRAPHY

A.V.Likhachov, V.V.Pikalov

Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Russian Academy of Sciences, Siberian Branch
Novosibirsk, 630090, Institutskaya 4/1
e-mail: pickalov@itam.nsc.ru,
<http://www.itam.nsc.ru/lab17>

New algorithm of few view three-dimensional tomography combined of both the algorithms based on the exact inversion formulae and the Fourier methods is proposed. Two modifications FBPF3D and FBPF03D are considered. The numerical simulation has been carried out. Both modifications can compete with the iterative algebraic algorithms when the projection number is 10–30 and FBPF3D is preferable for large projection number. In the numerical simulation the projection number grows up to 361, FBPF3D appear to have considerable advantage in the reconstruction accuracy over the algorithm FBP3D constructed from the exact inversion formula for P-transform. The reconstruction

from the distorted projections shows the resistance to the accidental noise for both modifications. It can be improved by the regularization methods.

Введение

Томография является важным инструментом исследований во многих отраслях науки, а также имеет приложения в медицине, инженерии и промышленности — там, где требуется восстановить внутреннюю структуру рассматриваемого объекта, не нарушая его целостности. В частности, для этой цели может применяться математическая обработка данных по регистрации электромагнитного излучения, прошедшего через объект. В медицине типичной является постановка, когда источники и детекторы зондирующего излучения располагаются вне изучаемой области. При этом по измеренному ослаблению интенсивности зондирующих пучков реконструируется распределение коэффициента поглощения внутри области. Такие задачи относятся к так называемой трансмиссионной томографии. В диагностике плазмы часто имеют дело с эмиссионной томографией, когда по собственному излучению объекта получают распределение источников внутри него. Подробный обзор областей применения томографии содержится в [1]. Использованию томографии в изучении плазмы и газовых потоков посвящены монографии [2, 3].

Развиваемые в работе методы относятся к часто применяемому лучевому приближению, которое может иметь место как для трансмиссионной, так и для эмиссионной постановки. Основания для использования лучевого приближения в различных областях применения томографии рассмотрены в [1 — 4]. Традиционно разделяются задачи двумерной и трехмерной томографии. Двумерная томография обычно имеет дело с восстановлением распределения некоторого параметра в выбранном сечении объекта, в то время как при решении трехмерной задачи получается распределение по всему объему. Предлагаемый синтезированный алгоритм может быть реализован для обоих случаев. Однако предметом данной статьи является исключительно трехмерная постановка. Таким образом, с математической точки зрения речь идет об оценке функции трех переменных по набору ее интегралов вдоль некоторых прямых в пространстве. (Более точная формулировка приведена ниже).

Подчеркнем, что постановка задачи в данной работе является истинно трехмерной, согласно принятой в томографической литературе терминологии. Это означает, что не происходит очевидным образом декомпозиции трехмерной задачи на ряд двумерных; в частности, так было бы, если бы все плоскости детектирования были параллельны оси Z ("экваториальная" схема). В этом случае для определения пространственного распределения оказалось бы возможным применение двумерных алгоритмов. Такой подход ряд авторов называет послойной или псевдо-трехмерной томографией, и он накладывает серьезные ограничения на применимость томографических методов, например, в плазменных исследованиях. Развиваемые в данной работе алгоритмы свободны от таких ограничений.

Современные методы решения задачи трехмерной томографии можно сгруппировать в три больших класса; 1 — построение алгоритмов по точным формулам обращения (см., например, [2, 5] и цитируемую там литературу); 2 — алгебраические методы [1, 5, 6]; 3 — методы Фурье [1, 3, 7]. Каждый из этих классов имеет вполне определенную область приложений, а также свои достоинства и недостатки.

Алгоритмы первой группы часто находят свое применение в медицине. В их основе лежат формулы обращения, полученные в рамках интегральной геометрии. Большое разнообразие алгоритмических реализаций формул обращения содержится в трудах недавних конференций [8, 9]. Недостатком подходов, использующих интегральные преобразования, являются жесткие требования, предъявляемые ими к выбору проекционных данных. В частности, когда данные представляются в виде *двумерных проекций* (см. раздел 1.1) для удовлетворительного качества реконструкции их требуется достаточно много (порядка нескольких десятков).

Алгебраические алгоритмы компьютерной томографии часто используются при недостатке проекционных данных, в том числе в задачах с малым количеством ракурсов, а также в тех случаях, когда набор данных имеет нерегулярную структуру. При этом производится предварительное разложение реконструируемой функции и проекционных данных по некоторым базисам. Связь между ними задается проецирующим оператором, строящимся исходя из конкретной постановки. Важным в практическом отношении является линейный случай; тогда задача сводится к обращению матрицы. Недостатком этих алгоритмов является недостаточно высокая точность. Правда, новейшие работы, использующие псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза, позволяют значительно повысить их точность (таковым, в частности, является регуляризованный алгоритм Гревилля [10]). Однако построение псевдообратной матрицы связано с большими затратами ресурсов компьютера и реально пока может быть использовано только для двумерной задачи. Так, в [10] указан размер проецирующей матрицы 2600×2000 , что примерно соответствует размерности 51×51 на томограмме. В трехмерном случае, чтобы достигнуть приемлемого разрешения, обычно приходится иметь дело с матрицами на два порядка большими, например, при размерностях $65 \times 65 \times 65$ только число неизвестных составляет около 275000, а количество уравнений должно исчисляться десятками тысяч. В таких условиях приходится использовать итерационные алгоритмы типа ART, SIRT и т.п. [1, 6].

К методам Фурье мы относим алгоритмы Фурье–синтеза [1] и алгоритмы типа Гершберга–Папулиса [7, 11] (см. раздел 1.3). Последние также ориентированы на малоракурсную томографию. Например, в [7] произведена реконструкция трехмерного распределения локальных коэффициентов эмиссии плазмы микропинча по результатам регистрации ее излучения всего с трех направлений.

С целью повышения точности восстановления в трехмерной малоракурсной томографии в [12] авторами был предложен комбинированный алгоритм, сочетающий свойства алгебраических и Фурье методов. В настоящей работе объединяются алгоритмы из классов 1 и 3 для решения описанной ниже задачи.

1. Теория

1.1. Постановка задачи. В приложениях трехмерной томографии нередко возникают задачи, сводящиеся к восстановлению функции трех переменных по набору ее двумерных параллельных проекций [1, 2, 7]. Двумерной *параллельной проекцией* от функции $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ в направлении \mathbf{n} будем называть функцию двух переменных $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}=(u, v)$, определенную на плоскости D , которую будем называть *плоскостью детектирования*. Значение $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{q})$ в некоторой точке плоскости D равно интегралу от $g(\mathbf{x})$ вдоль прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной плоскости D (рис.1).

Если вектор \mathbf{n} пробегает всю сферу направлений в \mathbb{R}^3 , и каждая из проекций принадлежит пространству быстроубывающих функций на \mathbb{R}^2 , то имеет место интегральная формула, позволяющая восстановить функцию $g(\mathbf{x})$ по ее проекциям [5, 13]. В этом случае также говорят, что функция $f(\mathbf{n}, \mathbf{q})$ связана с $g(\mathbf{x})$ посредством трехмерного P -преобразования. (Поскольку имеет место $f(\mathbf{n}, \mathbf{q}) = -f(\mathbf{n}, \mathbf{q})$, для обращения P -преобразования фактически достаточно знать проекции для \mathbf{n} , принадлежащих только полусфере направлений). Алгоритмы, построенные на основе различных вариантов записи формулы обращения P -преобразования приведены, например, в [8, 9, 14 – 16].

С точки зрения классификации, приведенной во введении, данные алгоритмы относятся к типу 1. Для хорошей реконструкции ими функции $g(\mathbf{x})$ требуется большое количество проекционных данных. В настоящей работе рассматривается возможность объединения этих алгоритмов с методами Фурье для восстановления функции $g(\mathbf{x})$ по относительно небольшому числу двумерных проекций и при наличии в них искажений случайного характера.

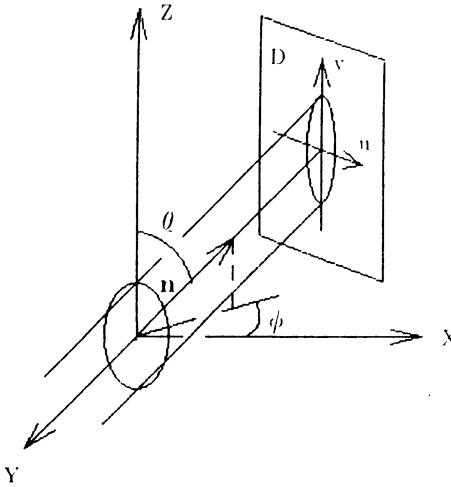


Рис.1. Пояснение к определению параллельной проекции.

1.2. Алгоритмы, основанные на формуле обращения трехмерного P -преобразования, записанной через потенциал Рисса. При построении алгоритмов использовалась формула обращения P -преобразования, приведенная в [5]:

$$g(x) = \frac{1}{4\pi} \Gamma^{-\beta} P^{\#} \Gamma^{\beta-1} f(n, q). \quad (1)$$

Здесь Γ^{β} — потенциал Рисса, который действует по пространственным переменным q и определяется согласно уравнению

$$(\Gamma^{\beta} f)(v) = |v|^{-\beta} (Ff)(v),$$

где F — преобразование Фурье. Оператор обратного проецирования $P^{\#}$ для трехмерного случая имеет вид

$$(P^{\#} f)(x) = \int_{S^2} f(n, E_n x) dn, \quad (2)$$

где S^2 — единичная сфера (сфера направлений) в трехмерном пространстве, $n \in S^2$, $E_n x$ — ортогональная проекция точки x на плоскость, перпендикулярную вектору n и проходящую через начало координат. Функция $f(n, E_n x)$ при фиксированном n есть параллельная проекция функции $g(x)$ в направлении n . Поэтому оператор обратного проецирования (2), а вместе с ним и формула обращения (1), могут быть рассмотрены в рамках понятия о параллельной проекции.

В настоящей работе оператор $P^{\#}$ был реализован следующим образом. Узел, в котором определялось значение функции, ортогонально проецировался на каждую из плоскостей детектирования. В эту точку производилась билинейная интерполяция значений проекции из ближайших узлов. Полученные таким образом величины численно интегрировались по углам θ и ϕ , задающим вектор n .

Параметр β в уравнении (1) может принимать любые значения, меньшие размерности пространства, на котором определено P -преобразование (в нашем случае $\beta < 3$). Положив $\beta = 1$, перепишем (1) в виде

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} F_3^{-1}(|v|F_3 P^\# f(\mathbf{n}, \mathbf{q})). \quad (3)$$

Нижний индекс у F означает размерность пространства, в котором действует преобразование Фурье. Формула (3) определяет следующий алгоритм. По совокупности проекций путем обратного проецирования строится трехмерное суммарное изображение $(P^\#f)$. Затем берется его Фурье-образ, который обрабатывается фильтром $|v|$, $v \in \mathbb{R}^3$. После чего для получения томограммы производится обратное преобразование Фурье отфильтрованного суммарного изображения.

В случае $\beta=0$, формула (1) переходит в

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} F_3^{-1} P^\#(|v|F_2 f(\mathbf{n}, \mathbf{q})). \quad (4)$$

Уравнение (4) задает иную последовательность операций. Здесь от каждой проекции вычисляется Фурье-образ, который затем подвергается воздействию фильтра $|v|$, $v \in \mathbb{R}^2$. Фурье-образ трехмерной томограммы получается путем применения оператора обратного проецирования к набору отфильтрованных Фурье-образов проекций. В [15] разработан алгоритм, основанный на пространственном аналоге формулы (4), записанной без обращения к преобразованию Фурье. В этом случае фильтрация производится в пространстве.

При $0 < \beta < 1$ алгоритм реконструкции функции $g(\mathbf{x})$ будет представлять комбинацию процедур, описываемых формулами (3), (4), с соответствующими показателями степеней $|v|$ при фильтрации. Существенно, что в данном случае эти степени будут положительными. Следовательно, не возникает проблемы определения Фурье-образов в точке $v=0$.

На основе формулы (1) описанным выше образом в работе был построен алгоритм, названный $FBP3D$ (Filtered Back Projection), для которого β может меняться в интервале $[0; 1]$.

1.3. Применение методов Фурье. Синтезированный алгоритм. Для P -преобразования имеет место центральная проекционная теорема, позволяющая оценить Фурье-образ искомой функции на некоторых плоскостях в Фурье-пространстве, не производя при этом томографической реконструкции. Далее эти плоскости будем называть *проекционными плоскостями*. Двумерный Фурье-образ каждой из проекций определяет значение трехмерного Фурье-образа решения на одной из проекционных плоскостей. Если преобразование Фурье определено согласно формуле

$$\tilde{g}(v) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i(v \cdot x)} g(x) dx,$$

то в символическом виде формулировку центральной проекционной теоремы для трехмерного случая можно записать [5]

$$\tilde{f}_n(v') = \tilde{g}(v'), \quad v' \in n_\perp.$$

На основе центральной проекционной теоремы разрабатывается класс алгоритмов Фурье-синтеза (см., например, [1,3]). В [7] был предложен трехмерный итерационный алгоритм типа Гершберга-Папулиса. В этом алгоритме Фурье-образ каждого итерационного приближения изменяется путем воздействия оператора H_G , который производит интерполяцию данных с проекционных плоскостей на кубическую сетку, заданную в Фурье-пространстве. Интерполяция осуществляется посредством формулы

$$\tilde{g}(v_{xk'}, v_{yl'}, v_{zg'}) = \tilde{f}_m((k', l', q')|_{p_m}), \quad \rho((k', l', q'), (k', l', q')|_{p_m}) \leq h_s. \quad (5)$$

Здесь $(k', l', q')|_{P_m}$ — проекция узла (k', l', q') на проекционную плоскость P_m ; $\rho((k', l', q')$, $(k', l', q')|_{P_m}$) — расстояние между этим узлом и проекционной плоскостью, h_s — некоторая константа, названная в [7] *толщиной слоя сноса*. Далее будем называть слой $\rho \leq h_s$ слоем влияния, и во всех вычислительных экспериментах, описываемых в разделе 2, его толщина равнялась 0.5 шага сетки. Значение $\tilde{f}_m((k', l', q')|_{P_m})$ находится путем билинейной интерполяции из ближайших узлов сетки на проекционной плоскости. Проекционные плоскости в уравнении (5) перебираются последовательно. Если для некоторого узла не выполняется условие из (5) ни для одной проекционной плоскости, то значение Фурье-образа в нем остается неизменным. В случае, когда уравнению (5) для данного узла удовлетворяют несколько проекционных плоскостей, ему будет приписано значение, полученное с последней из них.

В данной работе предлагается воздействовать оператором H_G на трехмерную томограмму, полученную алгоритмом обращения трехмерного Р-преобразования FBP3D, описанным в разделе 1.2. Полученный путем такого синтеза алгоритм был назван FBPF3D (Filtered Back Projection and Fourier Synthesis).

Рассмотрим одно из следствий центральной проекционной теоремы, которое может быть получено непосредственно. Как видно из определения, в случае идеальных (то есть не зашумленных) параллельных проекций их нулевые моменты равны между собой, а также равны нулевому моменту искомой функции $g(x)$. Очевидно, что значение Фурье-образа некоторой функции в нуле равно ее интегралу по области определения (то есть ее нулевому моменту). Таким образом, значение Фурье-образа функции $g(x)$ в нуле оказывается известным. При использовании формулы (1) с $\beta \in [0; 1]$ получается томограмма, Фурье-образ которой равен нулю в начале координат. При дискретизации это ведет к значительным ошибкам реконструкции, поскольку нулевая частота искомой функции, вообще говоря, нулю не равна. В связи с этим предлагается приравнять нулевую частоту дискретного Фурье-образа томограммы, получаемого в алгоритме FDP3D, среднему нулевому моменту проекций. Такая модификация алгоритма FDP3D была названа FDP0FS3D.

2. Вычислительный эксперимент

2.1. Общая часть. Для исследования разработанных алгоритмов трехмерной томографической реконструкции был выполнен вычислительный эксперимент, в котором восстанавливалась следующая модель:

$$g^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^5 g_i(x, y, z) + \chi_1(x, y, z) - \chi_2(x, y, z).$$

Здесь $g_i(x, y, z)$ — гауссовские функции, определяемые согласно уравнению:

$$g_i(x, y, z) = a \exp\left(-\frac{\ln 2}{\gamma^2} \left((x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2 + (z - z_{0i})^2 \right)\right),$$

где $a=1.0$, $\gamma=0.1$, центры гауссовских функций расположены в точках $(0., 0.1, 0.)$, $(0., 0.4, 0.5)$, $(0., 0.45, 0.45)$, $(0., -0.45, -0.4)$, $(0., 0.5, -0.45)$; $\chi_1(x, y, z)$ — характеристическая функция шара с центром в начале координат и радиусом, равным 0.95, $\chi_2(x, y, z)$ — характеристическая функция шара радиуса 0.75 с центром в точке $(0., -0.2, 0.)$.

Аксометрия сечения трехмерной модели плоскостью $x=0$ представлена на рис.2. Такая модель является весьма сложной с точки зрения томографического восстановления, поскольку в ней присутствуют разрывы, дающие интенсивные высокочастотные компоненты.

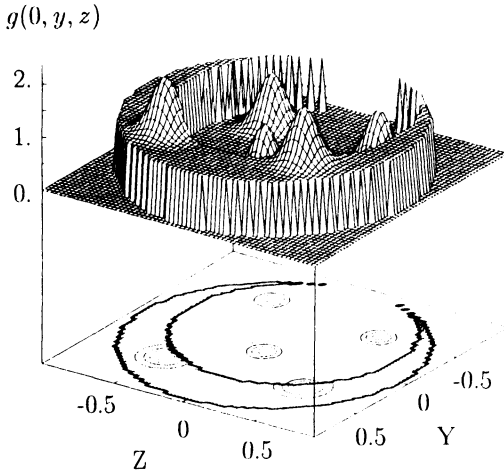


Рис.2. Точная томограмма, сечение модели плоскостью $x=0$.

В качестве области реконструкции рассматривался единичный шар в R^3 . Основные расчеты проводились на сетке $65 \times 65 \times 65$ узлов, заданной в описываемом кубе. Кроме того было произведено исследование зависимости точности реконструкции от размерности сетки. На носителях проекций сетка задавалась с таким же шагом, как и для томограммы.

Для численной оценки качества восстановления использовалась нормированная средне-квадратичная ошибка Δ :

$$\Delta = \frac{\|g^e - g\|}{\|g^e\|}, \quad (6)$$

где g^e и g — модель и реконструированная функции соответственно. (Оценка погрешности решения в процентах получается из (6) путем умножения на 100.)

Чтобы уменьшить число медленных обменов с внешними носителями, при реализации алгоритмов в программах были зарезервированы два больших массива. В один из них насчитывается томограмма, поэтому при размере сетки $r \times r \times r$ его длина должна быть r^3 . Другой является рабочим: в процессе быстрого преобразования Фурье туда помещается мнимая часть функции, а при обратном проецировании в нем находятся все проекции. Таким образом, размер рабочего массива определяется по условию $\max(r^3, Mr^2)$ (M — число проекций, с сеткой на них $r \times r$).

Главные составляющие затраты времени для всех алгоритмов одинаковы — это преобразование Фурье функции трех переменных и трехмерное обратное проецирование. Для первой из этих процедур имеет место оценка по числу операций $O(r^3 \log_2 r)$ для второй — $O(r^3 M)$. Отсюда видно, что при увеличении числа проекций последнее слагаемое будет определяющим. В таблице 1 приведены времена счета в секундах для компьютера Pentium Pro 200; сетка $r=65 \times 65 \times 65$; вычисления производились с ординарной точностью. В верхней строке даны названия алгоритмов, в левом столбце — число проекций.

Таблица 1

Время реконструкции (в секундах) для различных алгоритмов в зависимости от числа проекций.

алг M	FBP3D	FBP0FS3D	FBPFS3D
81	91.7	93.6	101.8
169	183.5	186.5	199.3
289	309.6	315.1	325.3

2.2. Реконструкция по идеальным данным. В этом и последующем разделах, если не оговорено противное, описываются результаты для сеток $65 \times 65 \times 65$ (томограмма) и 65×65 (проекция).

Некоторые результаты реконструкции по идеальным данным представлены на рис.3. Здесь приведены зависимости Δ от числа проекций $M = n_\phi n_\theta$, где n_ϕ, n_θ — числа отсчетов по азимутальному и полярному углам соответственно. Для расчетов было взято $n_\phi = n_\theta$. Сетка по обоим углам равномерна: для ϕ в интервале $[0; 2\pi]$, для θ в интервале $[0; \pi]$. Кривая 1 соответствует алгоритму FBP3D, кривая 2 — FBP0FS3D, кривая 3 — FBPFS3D. Для всех алгоритмов $\beta = 1$. Для сравнения с алгебраическими методами на рис.3 дана кривая 4, характеризующая алгоритм sART (комбинированный ART) из [12]. (На кривой 4 приведены минимальные значения Δ , достигаемые в итерационном процессе).

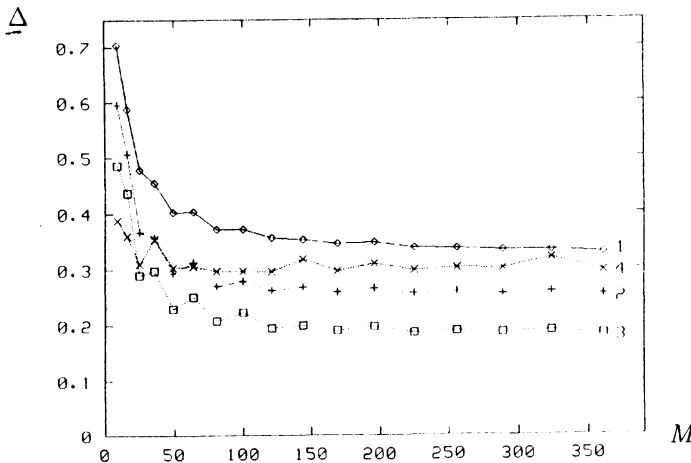


Рис.3. Зависимости Δ от числа проекций $M = n_\phi n_\theta$ ($n_\phi = n_\theta$), без шумов, разбиение области реконструкции $65 \times 65 \times 65$. Кривая 1 — алгоритм FBP3D ($\beta = 1$), кривая 2 — FBP0FS3D ($\beta = 1$), кривая 3 — FBPFS3D ($\beta = 1$), кривая 4 — комбинированный ART.

Из рис.3 видно, что алгоритм FBP0FS3D по сравнению с FBP3D в среднем уменьшает величину Δ на 0.1. В свою очередь алгоритм FBPFS3D по сравнению с FBP0FS3D обеспечивает падение ошибки еще на 0.1. Относительное (по сравнению с FBP3D) улучшение качества реконструкции для числа проекций ≥ 100 составляет ≈ 1.3 раза для алгоритма

FBP0FS3D, и 1.7–1.8 для FBPF3D. Поведение погрешности в зависимости от числа проекций для всех трех алгоритмов одинаково. При увеличении числа ракурсов от 9 до ~50 погрешность реконструкции быстро падает, далее ее уменьшение происходит значительно медленнее. На фоне уменьшения погрешности при увеличении числа проекций наблюдается относительное ее возрастание при четных n_θ . Оно связано с тем, что в этом случае отсутствуют наиболее информативные экваториальные проекции. Комбинированный ART (кривая 4) для малого числа ракурсов ≤ 25 обеспечивает лучшее качество реконструкции. Однако при дальнейшем росте числа проекций уменьшения величины Δ для ART практически не происходит. Это, вероятно, обусловлено ошибками при построении проецирующей матрицы. Более подробно свойства алгоритмов ART при решении задач томографии описаны в [1, 12, 17].

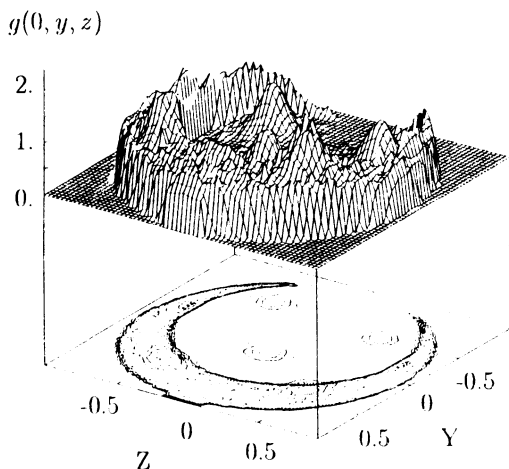


Рис.4. Аксонометрия сечения результата реконструкции плоскостью $x=0$, алгоритм FBPF3D, $\beta=1$, 81 проекция, без шумов, $\Delta=0.208$.

Таблица 2.

Точность реконструкции Δ алгоритмом FBPF3D в зависимости от размерности сеток.

размерность, г		17	33	65	129
без шумов		0.322	0.266	0.208	0.180
шумы ξ $=0.05$	без регуляризации	0.326	0.281	0.252	0.316
	фильтрация проекций	0.399	0.309	0.262	0.237
	сглаживание решения	0.552	0.394	0.295	0.248
	фильтрация решения	0.393	0.302	0.244	0.242

Расчет с $\beta=0$ дал результаты, весьма близкие к приведенным на рис.3. Для $0<\beta<1$ результаты оказались несколько хуже, что скорее всего связано с ошибками при вычислении дробных степеней $|v|$.

Визуально качество восстановления можно оценить по рис.4, где приведена томограмма (сечение плоскостью $x=0$), полученная по 81-й идеальной проекции алгоритмом FBPF3D с $\beta=1$.

Зависимость точности реконструкции от размера сетки r для алгоритма FBPF3D ($\beta=1$) можно проследить из таблицы 2 (вторая сверху строка). В соответствии с общими правилами для алгоритмов, основанных на интегральных формулах обращения (см. [1, 5]), точность алгоритма FBPF3D при восстановлении по идеальным данным растет с увеличением размера сетки. Для алгебраических алгоритмов, как правило, наблюдается обратная зависимость из-за ошибок аппроксимации проецирующей матрицы.

2.3. Реконструкция по зашумленным данным. В задачах томографии при наличии шумов в регистрируемых данных для улучшения качества реконструкции иногда применяется предварительная фильтрация проекций, см., например, [2, 7]. В данной работе были рассмотрены усреднение в скользящем окне 3×3 и низкочастотная фильтрация.

Для низкочастотной фильтрации проекций использовался фильтр H_Ω , определенный согласно формуле

$$H_\Omega \tilde{f}(v_k, v_l) = \frac{\tilde{f}(v_k, v_l)}{1 + \alpha(v_k^2 + v_l^2)},$$

где $\tilde{f}(v_k, v_l)$ — значение Фурье-образа проекции в узле (v_k, v_l) . Исходя из предположения, что фильтр должен вносить искажения порядка тех, что привносятся шумами, параметр регуляризации α определялся по критерию невязки из уравнения

$$\sum_{k,l} |\tilde{f}(v_k, v_l) - H_\Omega \tilde{f}(v_k, v_l)|^2 = \delta^2 \|\tilde{f}\|^2. \quad (7)$$

В (7) δ^2 — оценка нормы шума:

$$\delta^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{k,l} f^2(v_k, v_l)},$$

σ^2 — суммарная дисперсия шума. Уравнение (7) численно решалось методом деления пополам.

Иногда, особенно в случае присутствия шумов в данных, оказывается полезным подавление высокочастотной части спектра восстанавливаемой томограммы. Некоторые примеры этого для итерационных алгебраических алгоритмов рассмотрены в [12, 17]. В данной статье в процессе вычислительного эксперимента исследован один из простейших способов ослабления высоких частот — усреднение в скользящем окне 3×3 .

Использовалась следующая модель случайных шумов в проекционных данных. Шум полагается нормально распределенным с нулевым средним и постоянной дисперсией, имеющей значение ξ в долях от величины амплитуды проекции. Исследовалась эффективность применения предварительной обработки данных, а также процедур сглаживания в процессе постобработки томограммы.

Вычислительный эксперимент показал, что эффективность фильтрации проекций и томограммы зависит от уровня шумов (величины ξ). На рис. 5 изображены зависимости Δ от ξ для реконструкции по 81-й проекции ($n_\phi = n_\sigma = 9$). Кривая 1 соответствует восстановлению алгоритмом FBPF3D с $\beta=1$ без предварительной обработки проекционных данных и без постобработки томограммы. Остальные кривые описывают реконструкцию алгоритмом FBPF3D ($\beta=1$). Кривые 2–3 также отвечают реконструкции без предварительной обработки

проекций, для кривой 3 дополнительно производилось сглаживание томограммы в скользящем окне. Кривая 4 демонстрирует восстановление по проекциям, сглаженным в скользящем окне, кривая 5 — с фильтром H_{Ω} .

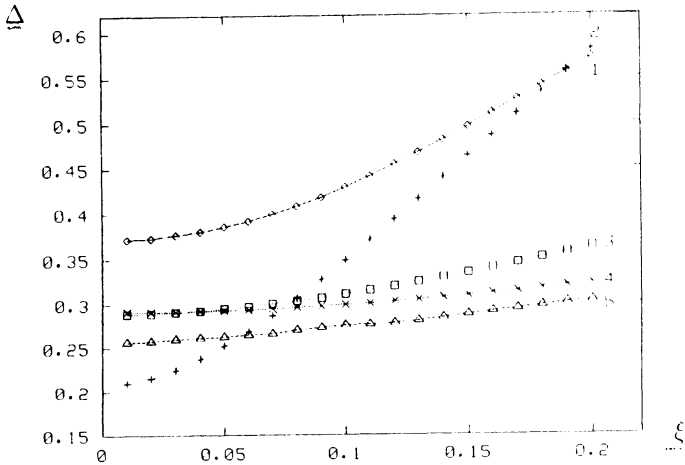


Рис.5. Зависимости Δ от уровня шумов ξ , 81 проекция ($n_{\phi}=n_{\theta}=9$), $\beta=1$. Кривая 1 — алгоритм FBPF3D без предварительной обработки проекций и без постобработки томограммы. Кривые 2–5 — алгоритм FBPF3D. Кривые 2–3 — без предварительной обработки, кривая 3 — сглаживание томограммы в скользящем окне. Кривая 4 — сглаживание проекций в скользящем окне, кривая 5 — обработка проекций фильтром H_{Ω} .

По рис.5 можно заключить, что вплоть до величин $\xi \approx 0.04 \pm 0.05$ как фильтрация проекций, так и сглаживание томограммы ведут лишь к ухудшению качества реконструкции из-за чрезмерного подавления высокочастотных компонент. При дальнейшем росте ξ эти процедуры оказываются полезными. При увеличении шумов точность восстановления алгоритмом FBPF3D падает быстрее, нежели алгоритмом FBPF3D; кроме того, предобработка проекций (кривые 4–5) обеспечивает лучшую реконструкцию, нежели сглаживание томограммы (кривая 3). В первую очередь, это связано с особенностями оператора H_{Ω} , который спектр решения частично заменяет спектрами проекций и, соответственно, вносит дополнительные шумы. Наилучшие результаты получены при реконструкции по проекциям, обработанным адаптивным фильтром низких частот H_{Ω} (кривая 5).

В таблице 2 (строки третья–шестая) проводится исследование устойчивости алгоритма FBPF3D ($\beta=1$) при увеличении размерности сеток и, тем самым, повышении разрешения (шумы $\xi=0.05$). В третьей строке даны результаты расчетов без регуляризации. Заметно прогрессирующее падение устойчивости. Однако применение регуляризующих процедур, даже самых примитивных, позволяет значительно ее повысить. Это проиллюстрировано в трех нижних строках таблицы, относящихся, соответственно, к восстановлению по фильтрованным проекциям (см. выше), усреднению решения в скользящем окне $3 \times 3 \times 3$, фильтрации решения в частотной области трехмерным аналогом оператора H_{Ω} с параметром регуляризации α , вычисляющимся по невязке проекции и псевдопроекции [12]. Видно, что процедуры регуляризации в целом сохраняют тенденцию к повышению точности с повышением разрешения даже при наличии шумов. Как и следовало ожидать, сглаживание оказывается полезным лишь при достаточно больших размерностях сеток. Частотная фильтрация решения дает результаты

близкие (иногда даже несколько лучшие) к реконструкции по фильтрованным проекциям. Однако надо заметить, что в последнем случае требуется точно знать уровень шумов в проекционных данных, что на практике возможно далеко не всегда.

Заключение

Разработан новый алгоритм трехмерной малоракурсной томографии в двух модификациях, названных FBPOFS3D и FBPF3D. В его основе лежит объединение алгоритма FBP3D, построенного по формуле обращения трехмерного Р-преобразования, записанной через потенциалы Рисса, с методами Фурье, использующими центральную проекционную теорему. В алгоритме FBPOFS3D производится замена нулевой частоты в томограмме, полученной алгоритмом FBP3D, а в FBPF3D эта томограмма изменяется посредством воздействия оператора H_G .

В вычислительном эксперименте показано, что алгоритмы FBPOFS3D и FBPF3D (по крайней мере для числа проекций ≤ 400) превосходят по качеству реконструкции алгоритм FBP3D. Наилучший результат получен для FBPF3D. В этом случае нормированная среднеквадратичная ошибка упала в 1.7–1.8 раза (для числа проекций ≥ 100) по сравнению с алгоритмом FBP3D. Также было установлено, что как FBPOFS3D, так и FBPF3D для количества ракурсов ≥ 25 обеспечивают лучшее восстановление, нежели итерационные алгебраические алгоритмы.

Реконструкция по искаженным случайным образом проекциям показала, что обе модификации достаточно устойчивы по отношению к шумам при умеренном разрешении ($65 \times 65 \times 65$). Однако при увеличении сетки до $129 \times 129 \times 129$ узлов устойчивость заметно падает. Улучшить результат восстановления в данном случае можно посредством применения процедур регуляризации как на стадии предварительной обработки проекционных данных, так и на стадии постобработки решения.

Благодарности

Авторы выражают признательность за частичную финансовую поддержку данной работы Российскому фонду фундаментальных исследований и Немецкому научно-исследовательскому обществу (DFG).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *G.T.Herman. Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography.* — Academic Press, New York, 1980. (Имеется русский перевод. *Г.Т. Херман. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии.* — М.: Мир, 1983, 353 с.)
2. *В.В.Пикалов, Н.Г.Преображенский. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы.* — Новосибирск: Наука, 1987, 231 с.
3. *В.В.Пикалов, Т.С.Мельникова. Томография плазмы.* — Новосибирск: Наука, 1995, 232 с.
4. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, А.А.Тимонов. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987, 159 с.
5. *F.Natterer. The Mathematics of Computerized Tomography.* John Wiley & Sons, New York, 1986. (Имеется русский перевод. *Ф.Наттерер. Математические аспекты компьютерной томографии.* — М.: Мир, 1990, 279 с.)
6. *Y.Censor. Finite series-expansion reconstruction methods //Proceedings of IEEE, 1983, v.71, p.409-419.*
7. *A.L.Balandin, A.V.Likhachov, N.V.Panferov, V.V.Pickalov, A.A.Rupasov, A.S.Shikanov. Emission microtomography of plasma. // Proceedings SPIE, 1992, v.1843, p.68-82.*
8. Proc. 1993 Intern. Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine. G. Gullberg, editor. —USA, Salt Lake City: University of Utah, 1993.

9. Proc. 1995 Intern. Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine. P. Grangeat, editor. — France, Grenoble: LETI, 1995.
10. А.В.Хованский. Регуляризованный метод Гревилля и его применение в трансмиссионной компьютерной томографии. // Мат. моделирование, 1996, т.8, №11, с.109-118.
11. M.Defrise, C.De Mol. A regularized iterative algorithm for limited-angle inverse Radon transform. // Optica Acta, 1983, v.30, №4, p.403-408.
12. А.В.Лихачев, В.В.Пикалов. Частотная фильтрация в алгебраических алгоритмах трехмерной томографии. // Автометрия, 1995, №4, с.83-89.
13. S.Helgason. The Radon Transform. — Boston: Birkhauser, 1980. (Имеется русский перевод. С.Хелгасон. Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983, 150 с.)
14. J.G.Colsher. Fully three-dimensional positron emission tomography. // Phys. Med. Biol., 1980, v.20, p.103-115.
15. В.И.Денисов, Ю.А.Захаренков, А.А.Кологривов, В.В.Пикалов, Н.Г.Преображенский, А.А.Рупасов, Г.В.Рупасов, Г.В.Склизков, Н.В.Шарапова, А.С.Шиканов. Методы эмиссионной и интерферометрической томографии лазерной плазмы. // Краткие сообщения по физике. — 1985, №12, с.17-21.
16. P.E.Kinahan, J.G.Rogers. Analytic three-dimensional image reconstruction using all detected events. // IEEE Trans. Nucl. Sci., 1989, v.36, №1, p.964-968.
17. А.В.Лихачов, В.В.Пикалов. A modification of ART method for cone-beam tomography of high space resolution. // Computerized tomography. Proc. Fourth. Intern. Sympos., Novosibirsk, Russia, 1993, — Utrecht:VSP, 1995, p.309-317.

Поступила в редакцию 30 07.96. Окончательный вариант 29.08.97.