В. Н. Дубинин, Е. В. Костюченко, Экстремальные задачи теории функций, связанные с n-кратной симметрией, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 83–111

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

В. Н. Дубинин, Е. В. Костюченко

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С n-КРАТНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Введение

Геометрическая теория функций комплексного переменного богата проявлениями симметрии [1, 2]. В данной работе рассматривается n-кратная симметрия, под которой понимается симметрия относительно лучей $\arg z = \theta + 2\pi k/n$, $k = 1, .., n$. Мы изучаем несколько традиционных задач теории функций, в которых экстремальная конфигурация обладает такой симметрией. Указанные задачи объединяет способ их решения: экстремальную проблему мы описываем в терминах емкостей конденсаторов, которые затем оцениваем методами теории потенциала. Вид симметрии в каждом конкретном случае связан с соответствующей симметрией экстремального конденсатора, а последняя – с принципом симметрии для гармонических функций. В основном мы используем свойства приведенных модулей, симметризацию и разделяющее преобразование [2]. Необходимые обозначения и сведения о приведенных модулях содержатся в заметке [3] (см. также [4, 5]).

В §1 данной работы обсуждаются двуточечные теоремы искажения, связанные с двукратной симметрией. Мы начинаем с простого доказательства теоремы почти философского характера: симметричная функция является экстремальной в задаче с симметричными условиями (теорема 1.1). Несмотря на общность, указанная теорема содержит одну из лучших оценок снизу для модулей производных однолистных в круге функций (неравенство Фана). Отмечаются и другие следствия, в частности, для функций, заданных в круговом кольце. Общий подход к таким оценкам дает известная теорема Тейхмюллера (ср. [6]). Оценку модулей производных сверху мы получаем из неравенства Аленицына–Нехари, которое можно трактовать как монотонность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00443), а также программы "Университеты России" (грант 991282).

приведенного модуля. При обсуждении двуточечных теорем искажения в современной литературе такой подход не рассматривался. Вместе с тем, как было отмечено нами ранее, монотонность модуля влечет многие интересные результаты [4, 5]. В качестве примера мы приводим здесь двуточечную теорему искажения с участием производной Шварца. Во втором параграфе известные результаты Ренгеля, Грётша и Тейхмюллера для модулей колец распространяются на случай колец с n-кратной симметрией, $n \geqslant 2$. На этом пути мы усиливаем и обобщаем принцип частичной симметризации Хэ [7] и анонсированный ранее результат первого автора [2, с. 42]. Наконец, в §3 доказываются теоремы искажения для однолистных в круге либо кольце функций, в которых экстремальная функция обладает n-кратной симметрией, $n \geqslant 2$. К ним относятся неравенства снизу и сверху для модуля произведения производных, а также оценка такого произведения сверху с учетом покрытия радиальных отрезков.

§1. Двуточечные теоремы искажения

Начнем с простейшего случая n-кратной симметрии $n = 2$, или, что то же самое, $n = 1$. В соответствии с принципом Кюри, таким видом симметрии обладают экстремальные функции в так называемых двуточечных теоремах искажения. Этим теоремам последнее время уделяется значительное внимание (см., например, [6, 8–12]). В отличие от указанной литературы, мы рассмотрим сперва функции, заданные, вообще говоря, в многосвязной области. Итак, пусть G – область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$, симметричная относительно вещественной оси L и такая, что $(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus G) \cup L$ связно. Обозначим через $w = l(z)$ одну из функций, конформно и однолистно отображающих область G в сферу $\overline{\mathbb{C}}_w$ так, что точки вещественной оси и граничные точки переходят в точки на вещественной оси. По принципу симметрии Римана-Шварца, функция $w = l(z)$ переводит точки, симметричные относительно вещественной оси в точки, симметричные относительно вещественной оси, т.е. она обладает 2-кратной симметрией.

Теорема 1.1. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна и однолистна в области G, то для любых различных точек a и b, отличных от* *полюса $f(z)$ и лежащих на $G \cap L$, справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(a)f'(b)|}{|f(a)-f(b)|^2} \geqslant \frac{|l'(a)l'(b)|}{|l(a)-l(b)|^2}, \tag{1.1}$$

а для любых различных точек a и b области G, отличных от полюса и симметричных относительно вещественной оси L, выполняется неравенство в другую сторону:

$$\frac{|f'(a)f'(b)|}{|f(a)-f(b)|^2} \leqslant \frac{|l'(a)l'(b)|}{|l(a)-l(b)|^2}. \tag{1.2}$$

Равенство в (1.1) и (1.2) достигается для суперпозиций вида $s \circ l$, где s – произвольный конформный автоморфизм комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_w$ на себя.

Доказательство. Выражение, стоящее в левой части неравенств (1.1) и (1.2) является хорошо известным дробно-линейным инвариантом. Поэтому для суперпозиций $s \circ l$ действительно имеет место равенство. Перейдем теперь к неравенству (1.1). В этом случае можно считать, что $a < b$. Пусть $\Delta x > 0$ настолько мало, что точки $a' = a + \Delta x$ и $b' = b + \Delta x$ тоже принадлежат области G, а множество $G' = G \setminus ([-\infty, a] \cup [a', b] \cup [b', +\infty])$ представляет собой двусвязную область. Введем обозначение

$$\widetilde{f}(z) = \frac{f(a) - f(a')}{f(a') - f(b)} \cdot \frac{f(z) - f(b)}{f(z) - f(a)},$$

и пусть $(\widetilde{f}(G'))^*$ есть результат круговой симметризации области $\widetilde{f}(G')$ относительно отрицательной полуоси [13, с. 206]. Дополнительные континуумы в определении симметризации выберем так, чтобы область $(\widetilde{f}(G'))^*$ принадлежала кольцу

$$G(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathbb{C}}_w \setminus \{[-1, 0] \cup [|\widetilde{f}(b')|, +\infty]\}.$$

Из конформной инвариантности модуля двусвязной области и принципа симметризации [13, с. 211] следует

$$\operatorname{mod} G' = \operatorname{mod} \widetilde{f}(G') \leqslant \operatorname{mod}(\widetilde{f}(G'))^* \leqslant \operatorname{mod} G(f).$$

Заменяя функцию $f(z)$ на $l(z)$, имеем

$$\operatorname{mod} G' = \operatorname{mod} G(l).$$

Отсюда

$$|\widetilde{f}(b')| \geqslant |\widetilde{g}(b')|.$$

Деля обе части этого неравенства на $(\Delta x)^2$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим (1.1).

Для доказательства неравенства (1.2) сравним приведенные модули при отображениях $w = f(z)$ и $w = l(z)$. Положим

$$Z = \{a, b\}, \quad \Delta = \{+1, -1\}, \quad \Psi = \{r, r\}, \quad W = \{f(a), f(b)\}.$$

Из свойств приведенных модулей [4, 5] следует

$$M(G, Z, \Delta, \Psi) + \frac{1}{8\pi}\log|f'(a)f'(b)| =$$

$$= M(f(G), W, \Delta, \Psi) \leqslant M(\overline{\mathbb{C}}_w, W, \Delta, \Psi) = \frac{1}{8\pi}\log|f(a) - f(b)|^2.$$

Для функции $w = l(z)$ в данной цепочке имеет место равенство ([5, теорема 3]). Что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай неравенства (1.1), когда область G есть круг $U \overset{\text{def}}{=} \{z : |z| < 1\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ – класс функций $w = f(z)$, мероморфных и однолистных в круге U. Отметим, что функция класса $\mathfrak{M}$ может иметь в U один и только один полюс первого порядка. В роли экстремальной функции этого класса будет выступать функция Кебе $k(z) = z/(1+z)^2$. Обозначим через $d(z_1, z_2) = \operatorname{arth}|(z_1 - z_2)/(1 - \overline{z}_1 z_2)|$ гиперболическое расстояние между различными точками z_1 и z_2 круга U, а через $\zeta = \zeta(z) = (ze^{i\theta} + z_1)/(1 + ze^{i\theta}\overline{z}_1)$ – дробно-линейное отображение круга U на себя, которое при подходящем вещественном θ переводит точки 0 и $\operatorname{th} d(z_1, z_2)$ соответственно в точки z_1 и z_2. Применяя неравенство (1.1) к функциям $f(\zeta(z))$, $l(z) \equiv k(z)$, $f(z) \in \mathfrak{M}$ и точкам 0, $\operatorname{th} d(z_1, z_2)$, $f(z_k) \neq \infty$, $k = 1, 2$, получим

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \tfrac{1}{2}\operatorname{sh}(2d(z_1, z_2))\sqrt{|f'(z_1)f'(z_2)|(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству Фана [14], которое, в свою очередь, вытекает из хорошо известных теорем для однолистных нормированных в круге функций (см. также [9, 11, 12]). Из других конформных вариантов классических теорем искажения отметим вариант теоремы Кебе [8, с. 144], теоремы Грунского [9, с. 223] и Гронуолла [9, с. 225]. Вместе с тем, в современных работах получены новые двуточечные теоремы искажения для однолистных в круге функций [8–12]. Доказательства этих результатов используют более тонкие методы. В частности, в работах Ким, Ма и Минды [8, 12] применяется подход Блэттера [15], а также оценки шварциана и начальных коэффициентов в классе однолистных нормированных функций. Однако эти методы неприменимы, например, для функций, заданных в кольце. Желая привести более общий результат, мы рассмотрим здесь утверждение, содержащее неравенство (1.1) и многие другие теоремы искажения в случае, когда G есть круговое кольцо $K = \{z : 1 < |z| < R\}$, $1 < R < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(R)$ класс функций $w = f(z)$, мероморфных и однолистных в кольце K, для которых множество $f(K)$ значений $f(z)$ в K лежит в области $|w| > 1$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ в окружность $|w| = 1$. Экстремальная функция Грётша $h(z) \equiv h(z; R)$ конформно и однолистно отображает кольцо K на внешность единичного круга с разрезом $w \geqslant P$, $P = h(R; R)$. Нетрудно убедиться, что

$$h(z; R) = \tau \operatorname{sn}^2\Big(\Big(\frac{i}{\pi}\log zR + 1\Big)\mathbb{K}(\tau')/\mathbb{K}(\tau)\Big),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P$ – решение уравнения $\log R = \dfrac{\pi}{2}\mathbb{K}(\tau')/\mathbb{K}(\tau)$, $\mathbb{K}(\tau)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\tau' = \sqrt{1-\tau^2}$, $\operatorname{sn}(u; \tau)$ – эллиптическая функция Якоби. Обозначим также через $[a, b, c, d]$ ангармоническое отношение четырех точек $m(a)$, $m(b)$, $m(c)$ и $m(d)$ на комплексной сфере, где $m(w) = w + 1/w$.

Утверждение 1.2. *Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$, и пусть r_1, r_2, r_3, r_4 – вещественные точки кольца $\overline{K}$, удовлетворяющие неравенствам $-R \leqslant r_1 < r_2 \leqslant -1$ и $1 \leqslant r_3 < r_4 \leqslant R$. Пусть w_2, w_3 – произвольные различные точки на множестве $f([r_2, r_3] \setminus U)$, а w_1 и w_4 – различные точки на другой компоненте дополнения образа кольцевой области $K \setminus \{[-R, r_1] \cup [r_2, r_3] \cup [r_4, R]\}$ при отображении $w = f(z)$. Тогда справедливы неравенства*

$$\big|[w_3, w_1, w_2, w_4]\big| \leqslant -[h(r_3), h(r_1), h(r_2), h(r_4)],$$

$$\big|[w_3, w_2, w_1, w_4]\big| \leqslant [h(r_3), h(r_2), h(r_1), h(r_4)],$$

Равенство в каждом из приведенных соотношений имеет место только для суперпозиции функции $h(z)$ и дробно-линейного автоморфизма внешности круга $|w| > 1$ на себя и для точек w_k, являющихся образами точек r_k или r_{5-k}, $k = 1, 2, 3, 4$, соответственно.

Доказательство этого утверждения в идейном плане совпадает с доказательством теоремы 1.1 и почти дословно совпадает с соответствующим доказательством в заметке [6], примененным к функции $m(f(z))$. Выбирая произвольным образом точки r_k, можно получить ряд двуточечных теорем покрытия для функций класса $\mathfrak{M}(R)$. В частности, при $r_2 = r_1 + \Delta r$, $r_4 = r_3 + \Delta r$ и $\Delta r \to 0$, получим аналог неравенства Фана, т.е. неравенство (1.1) для кругового кольца, где $f(z)$ необходимо заменить на $m(f(z))$, а $l(z) = m(h(z))$, $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$. Мы не приводим здесь это и другие неравенства, так как они вполне аналогичны соответствующим неравенствам для функций класса $\mathfrak{M}$ и его подклассов, что были рассмотрены нами подробно в работе [6].

Перейдем теперь к анализу неравенства (1.2). Пусть $G = U$, $f \in \mathfrak{M}$ и z_1, z_2 – произвольные различные точки круга U, отличные от полюса функции $f(z)$. Обозначим через $\zeta = \zeta(z)$ дробно-линейное отображении круга U на себя, переводящее симметричные точки $\pm ic$, $c > 0$, в точки z_1 и z_2. Очевидно, $2c/(1 + c^2) = \operatorname{th} d(z_1, z_2)$. Записывая неравенство (1.2) для функций $f(\zeta(z))$ и $l(z) \equiv k(z)$, после несложных вычислений получим

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \operatorname{th} d(z_1, z_2)\sqrt{|f'(z_1)f'(z_2)|(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}. \quad (1.3)$$

Неравенство (1.3) отлично от результатов в [8–12] и в литературе, по-видимому, не встречалось, хотя специалистам понятно, как его можно получить из известной теоремы Лаврентьева о неналегающих областях.

Приведенные теоремы можно рассматривать как оценки выражения $f'(z_1)f'(z_2)/(f(z_1) - f(z_2))^2$, являющегося инвариантом относительно мебиусовых автоморфизмов сферы. Дополним сейчас эти оценки с привлечением другого известного инварианта – производной Шварца: $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - (3/2)(f''(z)/f'(z))^2$.

Теорема 1.3. *Если функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и $f(\pm r) \neq \infty$, то имеют место неравенства*

$$\left|S_f(r) + S_f(-r) - 12\frac{f'(r)f'(-r)}{(f(r) - f(-r))^2} + \frac{3}{r^2}\right| \leqslant \frac{48r^2}{(1 - r^4)^2}, \quad (1.4)$$

$$\left|S_f(r)+\overline{S_f(-r)}+\frac{12}{(1+r^2)^2}\right|-$$

$$-12\,\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(r)f'(-r)}{(f(r)-f(-r))^2}\right\}\leqslant\frac{3(6r^2-r^4-1)}{r^2(1-r^2)^2}. \qquad (1.5)$$

Равенство в (1.4) *и* (1.5) *достигается для суперпозиции функции Кебе и произвольного дробно-линейного автоморфизма сферы.*

Доказательство. При достаточно малом $\rho>0$ положим

$$z_1=r+\rho e^{i\varphi},\quad z_2=r-\rho e^{i\varphi},\quad z_3=-r+\rho e^{i\theta},\quad z_4=-r-\rho e^{i\theta},$$

$$W=\{f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)\},\quad \Delta=\{1,-1,1,-1\},\quad \Psi=\{r,r,r,r\}.$$

Из монотонности приведенного модуля следует

$$M(f(U),W,\Delta,\Psi)\leqslant M(\overline{\mathbb{C}}_w,W,\Delta,\Psi).$$

Переписывая левую часть неравенства в терминах внутренних радиусов и функций Грина [4, с. 59], а также воспользовавшись формулой для приведенного модуля комплексной сферы [5], получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}h(z_k,z_l)\leqslant 0, \qquad (1.6)$$

где

$$h(z_k,z_l)=\log\left|(1-z_k\overline{z_l})\frac{f(z_k)-f(z_l)}{z_k-z_l}\right|,\quad k\neq l,$$

$h(z_k,z_k)=\log|(1-|z_k|^2)f'(z_k)|$. Учитывая разложения функции f в окрестностях точек r и $-r$:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-r)^k \quad\text{и}\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z+r)^k,$$

находим

$$h(z_1,z_1)=\log|a_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[\frac{2a_2e^{i\varphi}}{a_1}-\frac{r(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}{1-r^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\rho^2\left[\frac{3a_3e^{2i\varphi}}{a_1}-\frac{2a_2^2e^{2i\varphi}}{a_1^2}-\frac{1}{1-r^2}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_2,z_2)=\log|a_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[-\frac{2a_2e^{i\varphi}}{a_1}+\frac{r(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}{1-r^2}\right]+\right.$$

$$+\rho^2\left[\frac{3a_3e^{2i\varphi}}{a_1}-\frac{2a_2^2e^{2i\varphi}}{a_1^2}-\frac{1}{1-r^2}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_3,z_3)=\log|b_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[\frac{2b_2e^{i\theta}}{b_1}+\frac{r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{1-r^2}\right]+\right.$$

$$+\rho^2\left[\frac{3b_3e^{2i\theta}}{b_1}-\frac{2b_2^2e^{2i\theta}}{b_1^2}-\frac{1}{1-r^2}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_4,z_4)=\log|b_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[-\frac{2b_2e^{i\theta}}{b_1}-\frac{r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{1-r^2}\right]+\right.$$

$$+\rho^2\left[\frac{3b_3e^{2i\theta}}{b_1}-\frac{2b_2^2e^{2i\theta}}{b_1^2}-\frac{1}{1-r^2}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_1,z_2)=\log|a_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{-\rho r\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{1-r^2}+\rho^2\left[\frac{1}{1-r^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a_3e^{2i\varphi}}{a_1}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_3,z_4)=\log|b_1(1-r^2)|+\mathrm{Re}\left\{\rho r\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{1-r^2}+\rho^2\left[\frac{1}{1-r^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b_3e^{2i\theta}}{b_1}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{1-r^2}\right)^2\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_1,z_3)=\log\frac{(1+r^2)|a_0-b_0|}{2r}+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[\frac{a_1e^{i\varphi}-b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}-\frac{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}{2r}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r(e^{i\varphi}-e^{-i\theta})}{1+r^2}\right]+\rho^2\left[\frac{a_2e^{2i\varphi}-b_2e^{2i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{(e^{i\varphi}-e^{i\theta})^2}{8r^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1e^{i\varphi}-b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}\right)^2-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\theta}}{1+r^2}\right)^2-\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{1+r^2}\right]\right\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_1,z_4)=\log\frac{(1+r^2)|a_0-b_0|}{2r}+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[\frac{a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}-\frac{e^{i\varphi}+e^{i\theta}}{2r}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r(e^{i\varphi}+e^{-i\theta})}{1+r^2}\right]+\rho^2\left[\frac{a_2e^{2i\varphi}-b_2e^{2i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{(e^{i\varphi}+e^{i\theta})^2}{8r^2}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}\right)^2-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\theta}}{1+r^2}\right)^2+\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{1+r^2}\Bigg]\Bigg\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_2,z_3)=\log\frac{(1+r^2)|a_0-b_0|}{2r}+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[-\frac{a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{e^{i\varphi}+e^{i\theta}}{2r}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{r(e^{i\varphi}+e^{-i\theta})}{1+r^2}\right]+\rho^2\left[\frac{a_2e^{2i\varphi}-b_2e^{2i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{(e^{i\varphi}+e^{i\theta})^2}{8r^2}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}\right)^2-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\theta}}{1+r^2}\right)^2+\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{1+r^2}\Bigg]\Bigg\}+o(\rho^2),$$

$$h(z_2,z_4)=\log\frac{(1+r^2)|a_0-b_0|}{2r}+\mathrm{Re}\left\{\rho\left[\frac{-a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}{2r}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{r(e^{i\varphi}-e^{-i\theta})}{1+r^2}\right]+\rho^2\left[\frac{a_2e^{2i\varphi}-b_2e^{2i\theta}}{a_0-b_0}+\frac{(e^{i\varphi}-e^{i\theta})^2}{8r^2}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{-a_1e^{i\varphi}+b_1e^{i\theta}}{a_0-b_0}\right)^2-\frac{r^2}{2}\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\theta}}{1+r^2}\right)^2-\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{1+r^2}\Bigg]\Bigg\}+o(\rho^2).$$

В пределе при $\rho\to 0$ неравенство (1.6) принимает вид

$$\mathrm{Re}\left\{2e^{i(\varphi+\theta)}\frac{a_1b_1}{(a_0-b_0)^2}+e^{2i\varphi}\frac{a_3a_1-a_2^2}{a_1^2}+\right.$$

$$\left.+e^{2i\theta}\frac{b_3b_1-b_2^2}{b_1^2}--\frac{e^{i(\varphi+\theta)}}{2r^2}-\frac{2e^{i(\varphi-\theta)}}{(1+r^2)^2}\right\}\leqslant\frac{2}{(1-r^2)^2}.$$

Полагая теперь $\varphi=\theta+\pi$, в силу произвольности θ, получим (1.4), а затем при $\varphi=-\theta+\pi$ – (1.5). Теорема доказана.

Теорему 1.3, по-видимому, можно получить из неравенства (13) работы [17] для двух однолистных в круге функций без общих значений. Заметим также, что неравенство 1.6 восходит к работам Нехари и Ю. Е. Аленицына. Хорошо известны весьма общие теоремы искажения для функций в многосвязных областях, полученные этими авторами (см., например, [16, 17]). Указанные результаты содержат свободные параметры, выбор которых приводит к интересным частным случаям и следствиям. Часть таких следствий получается также из монотонности приведенного модуля ([5, теоремы 10 и 11]).

Как и в случае неравенства (1.1), неравенство (1.2) дает точную оценку модулей производных в классе $\mathfrak{M}(R)$. Достаточно применить его к функциям $m(f(z))$ и $m(h(z))$. В дополнение к этому результату приведем оценку сверху для произвольных точек a и b кольца K, не обязательно симметричных. Пусть $g(z,\zeta)$ – функция Грина кольца K. Выражение $g(z,\zeta)$ через тета-функции дано, например, в [18, с. 232].

Теорема 1.4. *Для любой функции $w = f(z)$ класса $\mathfrak{M}(R)$ и для любых точек a, $b \in K$, отличных от полюса $f(z)$, справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(a)f'(b)||1-\overline{f(a)}f(b)|^2}{|f(a)-f(b)|^2(|f(a)|^2-1)(|f(b)|^2-1)} \leqslant \frac{\exp(2g(a,b))}{r(K,a)r(K,b)}.$$

Доказательство. Пусть Z, Δ, Ψ и W такие же, как и при доказательстве неравенства (1.2), и пусть $D = \{w : |w| > 1\}$. В силу монотонности приведенного модуля, имеем

$$M(K,Z,\Delta,\Psi) + \frac{1}{8\pi}\log|f'(a)f'(b)| =$$

$$= M(f(K),W,\Delta,\Psi) \leqslant M(D,W,\Delta,\Psi) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{\log\bigl[(|f(a)|^2-1)(|f(b)|^2-1)\bigr] - 2\log\left|\frac{1-\overline{f(a)}f(b)|}{f(a)-f(b)}\right|\right\}.$$

Осталось заметить, что

$$M(K,Z,\Delta,\Psi) = \frac{1}{8\pi}\bigl\{\log r(K,a)r(K,b) - 2g(a,b)\bigr\}.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что в теории функций известно немало результатов, которые также можно трактовать как двуточечные теоремы искажения. Например, оценки внутреннего радиуса, полученные Е. Г. Емельяновым [19], или теоремы искажения, учитывающие геометрию образа [3, 20]. Другие типы задач с двукратно симметричной экстремальной конфигурацией рассмотрены также в следующем параграфе.

§2. Неравенства для модулей колец

Под кольцом понимается произвольная двусвязная область G комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$. Обозначим через $\operatorname{mod} G$ модуль кольца G относительно семейства кривых, разделяющих его граничные компоненты, и пусть E_0 и E_1 – компоненты дополнения кольца G. Мы сопоставляем кольцу G конденсатор (E_0, E_1) [2]. Известно, что $\operatorname{mod} G = \operatorname{mod}(E_0, E_1) \overset{\text{def}}{=} (\operatorname{cap}(E_0, E_1))^{-1}$, где $\operatorname{cap}(E_0, E_1)$ – емкость конденсатора (E_0, E_1). Среди областей канонического вида наиболее часто встречаются круговые кольца, кольца Грётша и Тейхмюллера. Последние два получаются движениями в плоскости $\mathbb{C}_z$ из областей $\mathbb{G}(P) = \{z : |z| > 1\} \setminus [-\infty, -P]$, $P > 1$, и $\mathbb{T}(P) = \mathbb{C}_z \setminus ([-\infty, -P] \cup [0, 1])$, $P > 0$, соответственно.

Хорошо известны следующие утверждения (см., например, [21–22]).

Лемма (Ренгель). *Из всех колец G, отделяющих точки 0 и ∞, и имеющих фиксированную конечную площадь в логарифмической метрике $(2\pi|z|)^{-1}|dz|$, максимальный модуль имеют только кольца, ограниченные концентрическими окружностями с центром в начале координат.*

Лемма (Грётш). *Среди всех колец, одна компонента дополнения которых содержит единичный круг, а другая – точки $-P$ и ∞, кольцо $\mathbb{G}(P)$, и только оно, обладает максимальным модулем.*

Лемма (Тейхмюллер). *Среди всех колец, отделяющих пару точек $\{0, 1\}$ от пары $\{-\infty, -P\}$, кольцо $\mathbb{T}(P)$, и только оно, имеет наибольший модуль.*

Нам понадобятся аналоги этих лемм, но уже для произвольных конденсаторов (E_0, E_1), поле которых $G = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus (E_0 \cup E_1)$ не обязательно является кольцом. Всюду ниже принято обозначение

$$D_k = \left\{z = re^{i\theta} : 0 < r < \infty,\ \left|\theta - 2\pi k/n\right| < \pi/n\right\},\ \ k = 1, \ldots, n,\ \ n \geqslant 1.$$

В частности, при $n = 1$, $\overline{D}_1 = \overline{\mathbb{C}}_z$. Будем говорить, что связная компонента G' множества $G \cap \overline{D}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 1$, отделяет точки 0 и ∞ в $\overline{D}_k$, если дополнение $\overline{D}_k \setminus G'$ можно разбить на два непересекающихся замкнутых множества E и F, одно из которых содержит точку 0, другое – ∞, причем $E \cap \partial G' \subset E_0$ и $F \cap \partial G' \subset E_1$. В терминах конденсаторов и без утверждения о равенстве аналог леммы Ренгеля формулируется следующим образом.

Лемма 2.1. *Если существует связная компонента поля конденсатора* (E_0, E_1)*, отделяющая точки* 0 *и* ∞ *в* $\overline{\mathbb{C}}_z$*, и площадь этой компоненты в логарифмической метрике не превосходит некоторой величины* S*,* $0 < S < \infty$*, то*

$$\operatorname{mod}(E_0, E_1) \leqslant \operatorname{mod}\{z : r < |z| < R\}, \tag{2.1}$$

где r *и* R *– любые вещественные числа, удовлетворяющие условию* $S = (1/2\pi)\log(R/r)$*.*

Доказательство этого утверждения легко получить из принципа усредняющей симметризации Маркуса [23].

Перейдем теперь к обобщению лемм Грётша и Тейхмюллера. Всюду ниже t означает комплексный параметр, $\operatorname{Re} t > 0$; $w = d_t(z) = (z - t)/(z + \overline{t})$ – дробно-линейная функция, $d_t^{-1}(w)$ – функция, обратная к $w = d_t(z)$. Для произвольных комплексных чисел a, b и вещественных r и R, удовлетворяющих условиям: $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, $a \neq b$, $r < |b| \leqslant R$, $r \leqslant |a| < R$, $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, обозначим через $G(t, r, a, b, R)$ двусвязную область $\{z : r' < |z| < R',\ z \notin [-a', a'] \cup [-R, -b'] \cup [b', R]\}$, где вещественные числа a', b', r' и R' определяются следующими соотношениями: $d_{|t|}(a') = -|d_t(a)|$, $d_{|t|}(b') = |d_t(b)|$, $r' = |d_{|t|}^{-1}(-e^{i\theta})|$, $R' = |d_{|t|}^{-1}(e^{i(\pi-\varphi)})|$, θ – угол, под которым из точки t виден отрезок $[-ir, ir]$, а φ – угол, под которым из той же точки виден отрезок $[-iR, iR]$. Заметим, что в случае положительных t выполняется $r' = r$ и $R' = R$, а если дополнительно a и b – положительные, причем $a \leqslant t \leqslant b$, то $G(t, r, a, b, R) = \{z : r < |z| < R,\ z \notin [-a, a] \cup [-R, -b] \cup [b, R]\}$. В этом случае при $a = r$, $R = \infty$ либо при $r = 0$, $b = R$ область $G(t, r, a, b, R)$ является конформным вариантом кольца Грётша $\mathbb{G}(P)$, а при $r = 0$, $R = \infty$ – кольца Тейхмюллера $\mathbb{T}(P)$.

Будем говорить, что произвольное множество E соединяет точку a с множеством F, если существует связная компонента множества E, содержащая точку a и некоторую точку $b \in F$.

Лемма 2.2. *Пусть* a*,* b*,* r *и* R *такие же, как и выше, и пусть конденсатор* (E_0, E_1) *удовлетворяет следующим условиям: пластина* E_0 *содержит круг* $|z| < r$ *и соединяет точку* a *с точкой* $-\overline{a}$*, а пластина* E_1 *содержит множество* $|z| > R$ *и соединяет точки* b *и* $-\overline{b}$*. Тогда для любого* t*,* $\operatorname{Re} t > 0$*, справедливо неравенство*

$$\operatorname{mod}(E_0, E_1) \leqslant \operatorname{mod} G(t, r, a, b, R). \tag{2.2}$$

Если, дополнительно, поле G конденсатора (E_0, E_1), является кольцом, то равенство в (2.2) достигается только при совпадении G с кольцом $G(t, r, a, b, R)$, с точностью, быть может, до сдвига вдоль мнимой оси.

Доказательство. Обозначим через (E_0^1, E_1^1) образ конденсатора (E_0, E_1) при отображении $w = d_t(z)$. Пластина E_0^1 содержит множество $K_0 = d_t(\{z : |z| < r\})$ и соединяет точку $d_t(a)$ с точкой, симметричной ей относительно окружности $|w| = 1$, а пластина E_1^1 содержит $K_1 = d_t(\{z : |z| > R\})$ и соединяет точку $d_t(b)$ с точкой, симметричной ей относительно той же окружности.Углы, под которыми из точки $w = 0$ видны дуги $\overline{K}_0 \cap \{w : |w| = 1\}$ и $\overline{K}_1 \cap \{w : |w| = 1\}$, обозначим через θ' и φ', соответственно. Применим теперь к конденсатору (E_0^1, E_1^1) круговую симметризацию относительно отрицательной вещественной полуоси [2]. Имеем

$$\operatorname{cap}(E_0, E_1) = \operatorname{cap}(E_0^1, E_1^1) \geqslant \operatorname{cap} \operatorname{Cr}(E_0^1, E_1^1).$$

Пластина E_0^2 полученного конденсатора $(E_0^2, E_1^2) := \operatorname{Cr}(E_0^1, E_1^1)$ соединяет точку $-|d_t(a)|$ с симметричной ей точкой относительно $|w| = 1$, а пластина E_1^2 – точку $|d_t(b)|$ также с симметричной ей точкой относительно $|w| = 1$. Гармоническая мера дуги $\overline{K}_0 \cap \{w : |w| = 1\}$ относительно круга $|w| < 1$, вычисленная в точке $w = 0$, равна $\theta'/2\pi$ и, в свою очередь, совпадает с гармонической мерой отрезка $[-ir, ir]$ относительно полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, вычисленной в точке $z = t$ (см., например, [24]). Последняя равна θ/π и, значит, $\theta'/2 = \theta$. Аналогично, $\varphi'/2 = \pi - \varphi$. При круговой симметризации центры граничных окружностей множеств K_0 и K_1 перешли на вещественную ось, причем углы, под которыми из точки $w = 0$ видны дуги, полученные в результате симметризации из $\overline{K}_0 \cap \{w : |w| = 1\}$ и $\overline{K}_1 \cap \{w : |w| = 1\}$, по-прежнему равны θ' и φ'. Возвращаясь к плоскости $z = d_{|t|}^{-1}(w)$, находим, что прообраз конденсатора (E_0^2, E_1^2) содержит искомый конденсатор с полем $G(t, r, a, b, R)$. По свойству монотонности емкости, получаем неравенство (2.2).

Предположим теперь, что в (2.2) имеет место равенство. Тогда из результата Дженкинса о равенстве при круговой симметризации [13] следует, что точки a, $-\overline{a}$, b, $-\overline{b}$ и t должны лежать на одной прямой, а если $r > 0$ или $R < \infty$ – то на вещественной оси. При этом кольцо G обязано совпадать с кольцом $G(t, r, a, b, R)$ с точностью, быть может, до сдвига вдоль мнимой оси. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что при подходящих параметрах лемма 2.2 содержит леммы Грётша и Тейхмюллера. Рассмотрим теперь обобщения другого рода (ср. [7]).

При любых R, r и b, удовлетворяющих условиям: $0 < r < |b| \leqslant R \leqslant \infty$, $\operatorname{Re} b > 0$, определим двусвязную область

$$H_1(r, b, R) = \{z : r < |z| < R,\ z \notin [-R, -b'] \cup [b', R]\},$$

где $b' = d_r^{-1}(|d_r(b)|)$. Аналогично, при любых r, R и a таких, что $0 \leqslant r \leqslant |a| < R < \infty$, $\operatorname{Re} a > 0$, построим кольцо $H_2(r, a, R) = \{z : r < |z| < R,\ z \notin [-a', a']\}$, где $a' = d_r^{-1}(-|d_r(a)|)$.

Лемма 2.3. *Пусть $0 < r < |b| \leqslant R \leqslant \infty$, $\operatorname{Re} b > 0$. Если дополнение к пластине E_0 конденсатора (E_0, E_1) не содержит точек z_1, z_2, связанных равенством $z_1 z_2 = r^2$, а пластина E_1 содержит множество $|z| > R$ и соединяет точки b и $-\overline{b}$, то справедливо неравенство*

$$\operatorname{mod}(E_0, E_1) \leqslant \operatorname{mod} H_1(r, b, R). \tag{2.3}$$

Если, дополнительно, поле G конденсатора (E_0, E_1), является кольцом, то равенство в (2.3) достигается только при совпадении G с $H_1(r, b, R)$.

Доказательство. Обозначим через (E_0^1, E_1^1) образ конденсатора (E_0, E_1) при отображении $w = d_r(z)$. Множество $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus E_0^1$ не содержит точек w_1, w_2, связанных равенством $w_1 = -w_2$. Действительно, из равенства $d_r(z_1) = -d_r(z_2)$ при некоторых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E_0$ элементарно вытекает, что $z_1 z_2 = r^2$, а такие точки не содержатся в $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E_0$ по условию. Применяя далее круговую симметризацию относительно отрицательной вещественной полуоси, находим, что пластина E_0^2 конденсатора $(E_0^2, E_1^2) := \operatorname{Cr}(E_0^1, E_1^1)$ содержит полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$, а пластина E_1^2 соединяет точки $|d_r(b)|$ и $-1/|d_r(b)|$ и содержит множество $d_r(\{z : |z| > R\})$. Возвращаясь к плоскости $z = d_r^{-1}(w)$, заключаем, что прообраз конденсатора (E_0^2, E_1^2) содержит искомый конденсатор с полем $H_1(r, b, R)$. В результате имеем

$$\operatorname{cap}(E_0, E_1) = \operatorname{cap}(E_0^1, E_1^1) \geqslant \operatorname{cap}(E_0^2, E_1^2) \geqslant (\operatorname{mod} H_1(r, b, R))^{-1}.$$

Утверждение о равенстве проверяется так же, как и в лемме 2. Лемма 2.3 доказана.

Комбинируя обобщения лемм Ренгеля, Грётша и Тейхмюллера, приведем следующий результат для колец, восходящий к принципу частичной симметризации Хэ [7] (см. также [2, с. 42]).

Теорема 2.4. *Пусть G – двусвязная область на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть E_0, E_1 – компоненты дополнения этой области. Предположим, что для каждого $k = 1,..,n$ $(n \geqslant 2)$ область G удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий.*

(1) *Существует связная компонента множества $G \cap \overline{D}_k$, отделяющая точки 0 и ∞ в $\overline{D}_k$, и площадь этой компоненты в логарифмической метрике не превосходит некоторой величины S_k, $0 < S_k < \infty$.*

(2) *При некоторых r_k, a_k, b_k и R_k, $0 \leqslant r_k < R_k \leqslant \infty$, a_k, $b_k \in D_k \cap \{z : r_k \leqslant |z| \leqslant R_k\}$, одна компонента дополнения G, например E_0, содержит сектор $\{z : |z| < r_k\} \cap D_k$ и соединяет точку a_k с границей D_k, а другая (E_1) содержит сектор $\{z : |z| > R_k\} \cap D_k$ и соединяет точку b_k с границей D_k.*

(3) *При некоторых r_k, b_k и R_k, $0 < r_k < R_k \leqslant \infty$, $b_k \in D_k \cap \{z : r_k < |z| \leqslant R_k\}$, одна из компонент дополнения G, допустим E_1, содержит сектор $\{z : |z| > R_k\} \cap D_k$ и соединяет точку b_k с границей D_k. Множество $G \cup E_1$ не содержит точек z_1, z_2, связанных равенством $z_1 z_2 = r_k^2 e^{i4k\pi/n}$.*

(4) *При некоторых r_k, a_k и R_k, $0 \leqslant r_k < R_k < \infty$, $a_k \in D_k \cap \{z : r_k \leqslant |z| < R_k\}$, одна из компонент дополнения G, допустим E_0, содержит сектор $\{z : |z| < r_k\} \cap D_k$ и соединяет точку a_k с границей D_k. Множество $G \cup E_0$ не содержит точек z_1, z_2, связанных равенством $z_1 z_2 = R_k^2 e^{i4k\pi/n}$.*

Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{mod} G \leqslant \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{mod} G_k)^{-1} \right\}^{-1}, \tag{2.5}$$

где кольца G_k, $k = 1,..,n$, определены следующим образом: если при данном k область G удовлетворяет условию (1), то $G_k = \{z : r_k < |z| < R_k\}$ с произвольными r_k, R_k такими, что $S_k = (1/2\pi n)\log(R_k/r_k)$; если же исходная область удовлетворяет условию (2), то $G_k = \{z : z^{n/2} \in G(t, r_k^{n/2}, a_k^{n/2}, b_k^{n/2}, R_k^{n/2})\}$, где t – любое комплексное число с $\operatorname{Re} t > 0$; в случае, когда при данном k область G удовлетворяет условию (3), G_k имеет вид

$\{z : z^{n/2} \in H_1(r_k^{n/2}, b_k^{n/2}, R_k^{n/2})\}$, *а в случае* (4) $G_k = \{z : z^{n/2} \in H_2(r_k^{n/2}, a_k^{n/2}, R_k^{n/2})\}$,

Равенство в (2.5) *имеет место только для* n*-кратно симметричного кольца* G*, совпадающего с одним из колец* G_k*,* $1 \leqslant k \leqslant n$*, где, в случае выполнения условия* (2)*, параметр* t *выбирается вещественным и удовлетворяющим неравенству* $|a_k^{n/2}| \leqslant t \leqslant |b_k^{n/2}|$.

Доказательство. Обозначим через $C(k) = (E_0(k), E_1(k))$ результат разделяющего преобразования конденсатора $C = (E_0, E_1)$ с полем G относительно семейства функций $\zeta = p_k(z) \equiv z^{n/2}$ $(z \in D_k,\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0)$. По теореме 1.8 работы [2],

$$\mathrm{cap}\, C \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cap}\, C(k).$$

Каждый из конденсаторов $C(k)$, $k = 1, .., n$, будет удовлетворять по крайней мере одному из следующих условий.

- $(1')$ Связная компонента поля конденсатора $C(k)$, отделяет точки 0 и ∞ в $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$. Площадь этой компоненты в логарифмической метрике не превосходит величины $n^2 S_k/2$ (площадь увеличилась в $n^2/4$ раз при отображении $\zeta = z^{n/2}$, и еще удвоилась за счет добавления при разделяющем преобразовании “половины” конденсатора в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$).
- $(2')$ Одна пластина конденсатора $C(k)$ содержит круг $\{\zeta : |\zeta| < r_k^{n/2}\}$ и соединяет точку $a_k^{n/2}$ с точкой $-\overline{a_k^{n/2}}$, а другая – содержит множество $\{\zeta : |\zeta| > R_k^{n/2}\}$ и соединяет точки $b_k^{n/2}$ и $-\overline{b_k^{n/2}}$.
- $(3')$ Одна пластина конденсатора $C(k)$ содержит множество $\{\zeta : |\zeta| > R_k^{n/2}\}$ и соединяет точки $b_k^{n/2}$ и $-\overline{b_k^{n/2}}$. Дополнение к другой пластине не содержит точек ζ_1, ζ_2, связанных равенством $\zeta_1\zeta_2 = r_k^n$.
- $(4')$ Одна пластина конденсатора $C(k)$ содержит круг $\{\zeta : |\zeta| < r_k^{n/2}\}$ и соединяет точки $a_k^{n/2}$ и $-\overline{a_k^{n/2}}$. Дополнение к другой пластине не содержит точек ζ_1, ζ_2, связанных равенством $\zeta_1\zeta_2 = R_k^n$.

При выполнении одного из условий $(1'), (2')$ и $(3')$ воспользуемся, соответственно, леммами 2.1, 2.2 и 2.3. Случай $(4')$ сводится к

$(3')$ отображением $\eta = 1/\zeta$. Получим неравенства

$$\operatorname{cap} C(k) \geqslant (\operatorname{mod} G(k))^{-1}, \quad k = 1, .., n,$$

где кольца $G(k)$ – следующие: в первом случае $G(k)$ имеет вид $\{\zeta : r(k) < |\zeta| < R(k)\}$ с произвольными $r(k)$, $R(k)$ при условии $n^2 S_k/2 = (1/2\pi)\log(R(k)/r(k))$; во втором – $G(k) = G(t, r_k^{n/2}, a_k^{n/2}, b_k^{n/2}, R_k^{n/2})$, в третьем – $G(k) = H_1(r_k^{n/2}, b_k^{n/2}, R_k^{n/2})$ и, наконец, в четвертом – $G(k) = H_2(r_k^{n/2}, a_k^{n/2}, R_k^{n/2})$. Кольца $G(k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, симметричны как относительно мнимой, так и относительно вещественной оси. Отображение $z = p_k^{-1}(\zeta) = \zeta^{2/n}$ даёт искомые n-кратно симметричные кольца G_k, причем каждой из n симметричных составляющих G_k однолистно соответствует половина кольца $G(k)$. Окончательно имеем

$$(\operatorname{mod} G(k))^{-1} = \frac{2}{n}(\operatorname{mod} G_k)^{-1}.$$

Неравенство (2.5) доказано. Согласно принципу разделяющего преобразования, в случае равенства в (2.5) кольцо G должно быть симметрично относительно прямых, содержащих лучи $\{z : \arg z = \pi(2k-1)/n\}$, $k = 1, .., n$. Следовательно, поля конденсаторов $C(k)$ также являются кольцами и остается воспользоваться единственностью в лемме Ренгеля и леммах 2.2, 2.3. Теорема доказана.

В ряде частных случаев модуль кольца $G(t, r, a, b, R)$ нетрудно сосчитать с использованием эллиптических интегралов (ср. [2, с. 41–42]). Следующий результат вытекает из условия (2) теоремы 2.4 при $r_k = 0$ и $R_k = \infty$, $k = 1, .., n$.

Следствие 2.5. *Если G – двусвязная область и для каждого $k = 1, .., n$ $(n \geqslant 2)$ одна из компонент дополнения G соединяет некоторую точку $a_k \in D_k$ с границей D_k, а другая компонента дополнения соединяет некоторую точку $b_k \in D_k$ с границей D_k, то выполняется неравенство*

$$\operatorname{mod} G \leqslant \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{K}(q_k)}{\mathbb{K}\left(\sqrt{1-q_k^2}\right)}\right\}^{-1}, \tag{2.6}$$

где $q_k = d_{|t|}^{-1}(-|d_t(a_k^{n/2})|)/d_{|t|}^{-1}(|d_t(b_k^{n/2})|)$, t – любое с $\operatorname{Re} t > 0$, $\operatorname{Re} a_k^{n/2} > 0$, $\operatorname{Re} b_k^{n/2} > 0$, $\mathbb{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл *первого рода. В частности, если* $a_k = r_k e^{i2k\pi/n}$, $b_k = R_k e^{i2k\pi/n}$ *и* $r_k^{n/2} \leqslant t \leqslant R_k^{n/2}$, *то* $q_k = \sqrt{r_k^n/R_k^n}$.*Равенство в* (2.6) *имеет место только для* n*-кратно симметричного кольца Тейхмюллера*

$$\mathbb{C}_z \setminus \left(\{z : 0 \leqslant z^n \leqslant r^n\} \cup \{z : z^n \geqslant R^n\}\right), \quad 0<r<R<\infty,$$

$$a_k = re^{i2k\pi/n}, \quad b_k = Re^{i2k\pi/n}, \quad k = 1,..,n, \quad \textit{при} \quad r^{n/2} \leqslant t \leqslant R^{n/2}.$$

Заметим, что первые попытки распространить экстремальные свойства колец Грётша и Тейхмюллера на их n-кратно симметричные аналоги выполнены китайским математиком Хэ [7]. В его работе итоговый результат сформулирован в виде теоремы, так же содержащей четыре условия и неравенство вида (2.5), но со средним арифметическим в правой части. Четвертое условие теоремы в [7] является частным случаем той ситуации в условии (2) теоремы 2.4, когда $r_k = 0$, $R_k = \infty$, $a_k = r_k e^{i2k\pi/n}$ и $b_k = R_k e^{i2k\pi/n}$, $k = 1,..,n$. К сожалению, работа [7] написана небрежно и остальные три условия сформулированы с ошибками. Метод доказательства в этой работе основан на законах композиции для модулей семейств кривых (см. об этом [2, с. 40]).

§3. Неравенства для однолистных функций

В данном параграфе рассматриваются задачи, в которых экстремальная функция обладает n-кратной симметрией, $n \geqslant 2$. В отличие от частного случая $n = 2$ такие задачи менее известны. Мы воспользуемся теоремой предыдущего параграфа, а также вновь монотонностью приведенного модуля и разделяющим преобразованием. Такой подход одинаково применим для функций классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(R)$, введенных в §1. В частности, теорему 2.4 можно интерпретировать как теорему покрытия в классе $\mathfrak{M}(R)$. Этот результат содержит ряд классических теорем в данном классе функций. Опуская здесь эти следствия и другие результаты, мы ограничимся оценкой снизу для модулей производных в классе $\mathfrak{M}$, оценкой сверху для модулей производных в классе $\mathfrak{M}(R)$ и смешанной теоремой покрытия-искажения так же в классе $\mathfrak{M}(R)$. Одной из экстремальных функций в классе $\mathfrak{M}$ является функция $k_n(z) \overset{\text{def}}{=} (k(z^n))^{1/n}$, которая конформно и однолистно отображает круг U на w-плоскость с разрезами по лучам $\arg(w^n) = 0$, $|w| \geqslant \sqrt[n]{1/4}$. Экстремальной функцией в классе $\mathfrak{M}(R)$ является n-кратно симметричная функция Грётша

$h_n(z) \equiv h(z;n,R) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{h(z^n;R^n)}$, $\sqrt[n]{1}=1$, конформно и однолистно отображающая кольцо K на область $|w|>1$ с разрезами по лучам $\arg(w^n)=0$, $P_n \leqslant |w|^n \leqslant \infty$, где $P_n = h(R^n;R^n)$. В дополнение к определению класса $\mathfrak{M}(R)$ укажем, что по принципу симметрии любая функция $w=f(z)$ этого класса допускает аналитическое продолжение в кольцо $K^* = \{z : 1/R < |z| < R\}$. В дальнейшем указанное продолжение будем обозначать той же буквой $f(z)$.

Следующий результат усиливает теорему 2.23 работы [2].

Теорема 3.1. *Пусть функция $w=f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, и пусть z_k, $k=1,..,n$ $(n \geqslant 2)$, – произвольные точки, удовлетворяющие условиям: $|z_k|=r$, $0<r<1$, и $f(z_k)\in D_k$, $k=1,..,n$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f^{\frac{n}{2}-1}(z_k)f'(z_k)}{\operatorname{Re} f^{\frac{n}{2}}(z_k)}\right|} \geqslant \frac{1-r^n}{r(1+r^n)}. \qquad (3.1)$$

Равенство имеет место для функций вида $f(z)=ck_n(z)$ и точек $z_k = re^{i2k\pi/n}$, $k=1,..,n$, где c – произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим два конденсатора

$$C^* = \left(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n}[0,\, re^{i2k\pi/n}],\ \bigcup\nolimits_{k=1}^{n}[(r+\Delta r)e^{i2k\pi/n},\, e^{i2k\pi/n}] \cup \{z : z \notin U\}\right)$$

и

$$C = \left(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n}[0,\, z_k],\ \bigcup\nolimits_{k=1}^{n}[z_k + z_k\Delta r/r,\, z_k/r] \cup \{z : z \notin U\}\right),$$

где положительное число Δr выбрано настолько малым, чтобы точки $f(z_k + z_k\Delta r/r)$ по-прежнему принадлежали секторам D_k. Путем диссимметризации [2, с. 33–36] конденсатор C может быть получен из C^* и, следовательно, для емкостей конденсаторов выполняется неравенство

$$\operatorname{cap} C^* \geqslant \operatorname{cap} C. \qquad (3.2)$$

Обозначим через $f(C)$ образ конденсатора C при отображении $w=f(z)$. Согласно следствию 2.5, справедлива оценка

$$\operatorname{cap} f(C) \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{K}(q_k)}{\mathbb{K}\left(\sqrt{1-q_k^2}\right)}, \qquad (3.3)$$

где $q_k = 1/d_1^{-1}\big(|d_t(f^{n/2}(z_k + z_k \Delta r/r))|\big)$, $t = f^{n/2}(z_k)$, $\operatorname{Re} t > 0$. Для полного эллиптического интеграла $\mathbb{K}(\tau)$ имеют место следующие асимптотические разложения [18, с. 116]:

$$\mathbb{K}(\tau) = \ln \frac{4}{\sqrt{1-\tau^2}} + o(1), \quad \tau \to 1,$$

$$\mathbb{K}\Big(\sqrt{1-\tau^2}\Big) = \frac{\pi}{2} + o(\sqrt{1-\tau^2}), \quad \tau \to 1,$$

Таким образом,

$$\frac{\mathbb{K}(q_k)}{\mathbb{K}\Big(\sqrt{1-q_k^2}\Big)} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{\sqrt{1-q_k^2}} + o(1), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Здесь и ниже под $o(1)$ понимается величина, стремящаяся к нулю при $\Delta r \to 0$.

С другой стороны, конденсатор C^* конформно эквивалентен конденсатору $\big(\{z : 0 \leqslant z^n \leqslant 1\}, \{z : z^n \geqslant R^n\}\big)$,

$$R = \left[\frac{r^{n/2} + r^{-n/2}}{(r+\Delta r)^{n/2} + (r+\Delta r)^{-n/2}}\right]^{2/n}, \quad R > 1,$$

и его емкость

$$\operatorname{cap} C^* = 2n \frac{\mathbb{K}\big(\sqrt{R^{-n}}\big)}{\mathbb{K}\Big(\sqrt{1-R^{-n}}\Big)} = \frac{4n}{\pi} \ln \frac{4}{\sqrt{1-R^{-n}}} + o(1).$$

С учетом неравенств (3.2) и (3.3), приходим к соотношению

$$1 \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q_k^2)}{(1-R^{-n})^n}(1+o(1)). \tag{3.4}$$

Рассмотрим отдельно выражения, входящие в правую часть (3.4):

$$1 - R^{-n} = \frac{n\Delta r(1 - r^{2n} + o(1))}{r(r+\Delta r)^n(r^n + r^{-n} + 2)}, \tag{3.5}$$

$$q_k = \frac{1 - |d_t(f^{n/2}(z_k + z_k \Delta r/r))|}{1 + |d_t(f^{n/2}(z_k + z_k \Delta r/r))|},$$

где, при $t = f^{n/2}(z_k)$,

$$d_t(f^{n/2}(z_k + z_k\Delta r/r)) = \frac{f^{n/2}(z_k + z_k\Delta r/r) - f^{n/2}(z_k)}{f^{n/2}(z_k + z_k\Delta r/r) + \overline{f^{n/2}(z_k)}}.$$

Так как

$$f^{n/2}(z_k + z_k\Delta r/r) = f^{n/2}(z_k) + \frac{n}{2}\frac{z_k\Delta r}{r} f'(z_k) f^{n/2-1}(z_k) + o(\Delta r),$$

то

$$1 - q_k^2 = n\Delta r \left| \frac{f^{n/2-1}(z_k) f'(z_k)}{\operatorname{Re} f^{n/2}(z_k)} \right| + o(\Delta r), \quad \Delta r \to 0. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.4) и устремляя Δr к нулю, получаем искомое неравенство (3.1). Равенство проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Неравенство (3.1) было получено ранее при дополнительном условии: $\arg f(z_k) = 2\pi k/n$, $k = 1, .., n$, [2, с. 59]. В этом случае левая часть (3.1) имеет вид

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)/f(z_k)|}.$$

Теорема 3.2. *Если функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$, то для любых φ, $0 < \varphi < \pi/n$, $n \geqslant 1$, и любых ρ, $1 \leqslant \rho < R$, выполняется неравенство*

$$\left| \prod_{k=1}^{2n} f'(z_k) \right| \prod_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{2n} \left| f(z_k) - f(z_l) \right|^{(-1)^{k+l}} \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{h'(\rho^n e^{in\varphi}; R^n)}{n\rho^{n-1}(h(\rho^n e^{in\varphi}; R^n) - h(\rho^n e^{-in\varphi}; R^n))} \right|^{2n}, \tag{3.7}$$

где

$$z_{2j-1} = \rho \exp(i(-\varphi + 2\pi j/n)), \quad z_{2j} = \rho \exp(i(\varphi + 2\pi j/n)), \quad j = 1, .., n.$$

Равенство в (3.7) достигается для функций $w = h_m(z)$ и тех m, при которых система точек $\{z_k\}$ симметрична относительно лучей $\arg(z^m) = 0$.

Доказательство. Положим $Z = \{z_k\}$, $W = \{f(z_k)\}$, $\Delta = \{(-1)^k\}$, $\Psi = \{\mu_k r^{\nu_k}\}$, $\mu_k = \nu_k = 1$, $k = 1, .., 2n$. Применяя последовательно формулу (14) работы [4], свойство монотонности приведенного модуля и формулу для приведенного модуля комплексной сферы [5, с. 78, 84], получаем

$$M(K^*,Z,\Delta,\Psi)=M(f(K^*),W,\Delta,\Psi)-\frac{1}{8\pi n^2}\sum_{k=1}^{2n}\log|f'(z_k)|\leqslant$$

$$\leqslant M(\overline{\mathbb{C}}_w,W,\Delta,\Psi)-\frac{1}{8\pi n^2}\sum_{k=1}^{2n}\log|f'(z_k)|=$$

$$=\frac{1}{8\pi n^2}\left\{-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{2n}(-1)^{k+l}\log|f(z_k)-f(z_l)|-\sum_{k=1}^{2n}\log|f'(z_k)|\right\}.$$

Если число m таково, что система точек $\{z_k\}$ симметрична относительно лучей $\arg(z^m)=0$, то система точек $\{h_m(z_k)\}$ симметрична относительно лучей $\arg(w^m)=0$. Следовательно, функция $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\log|w-h_m(z_k)|$ равна нулю на границе области $h_m(K^*)$. По теореме 3 работы [5] заключаем, что для функции $h_m(z)$ при таких m в приведенных выше соотношениях имеет место равенство. Осталось показать, что величина $\exp(-8\pi n^2 M(K^*,Z,\Delta,\Psi))$ совпадает с правой частью (3.7). Воспользуемся поведением приведенного модуля при конформном отображении. Пусть $K_n^*=\{\zeta : 1/R^n<|\zeta|<R^n\}$, $Z_n=\{\rho^n e^{-in\phi},\rho^n e^{in\phi}\}$, $\Delta_n=\{-1,1\}$, $\Psi_n=\{r/n\rho^{n-1},r/n\rho^{n-1}\}$. Тогда по теореме 4 [5] с применением формулы 6 [4] и учетом симметрии функции $H(\zeta)\overset{\text{def}}{=}h(\zeta;R^n)$, получаем

$$M(K^*,Z,\Delta,\Psi)=\frac{1}{n}M(K_n^*,Z_n,\Delta_n,\Psi_n)=$$

$$\frac{1}{8\pi n}\left[2\log\frac{r(K_n^*,\rho^n\,e^{in\phi})}{1/n\rho^{n-1}}-2g_{K_n^*}(\rho^n e^{-in\phi},\rho^n\,e^{in\phi})\right]=$$

$$=\frac{1}{8\pi n}\left[2\log\frac{r(H(K_n^*),H(\rho^n e^{in\phi}))}{1/n\rho^{n-1}}-2g_{H(K_n^*)}(H(\rho^n e^{-in\phi}),H(\rho^n e^{in\phi}))\right]-$$

$$-\frac{1}{4\pi n}\log|H'(\rho^n e^{in\phi})|=\frac{1}{n}M(\overline{\mathbb{C}}_w,\{H(\rho^n e^{-in\phi}),H(\rho^n e^{in\phi})\},\Delta_n,\Psi_n)-$$

$$-\frac{1}{4\pi n}\log|H'(\rho^n e^{in\phi})| = \frac{1}{8\pi n}\left[-2\log(1/n\rho^{n-1})+\right.$$

$$\left.+\,2\log|H(\rho^n e^{-in\phi}) - H(\rho^n e^{in\phi})|\right] - \frac{1}{4\pi n}\log|H'(\rho^n e^{in\phi})|.$$

Теорема доказана.

Методом разделяющего преобразования областей [2] можно получить оценку сверху для произведения модулей производных в случае произвольного (не обязательно четного) числа сомножителей, однако только для симметричных точек на окружности $|z| = 1$. Этот факт был отмечен ранее А. Ю. Солыниным [25, с. 135]. Именно, из 2.17 работы [2] легко следует неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f'(e^{i(\theta+2\pi k/n)})\right| \leqslant \left|\prod_{k=1}^{n} h_n'(e^{i(\pi/n+2\pi k/n)})\right| = \left|h_n'(e^{i\pi/n})\right|^n,$$

где $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$. Естественно было бы предположить, что для функций класса $\mathfrak{M}(R)$ выполняется

$$\prod_{k=1}^{n}\left|f'(e^{i(\theta+2\pi k/n)})\right| \geqslant \left|h_n'(1)\right|^n. \tag{3.8}$$

Однако, рассматривая суперпозиции $s\circ f \in \mathfrak{M}(R)$, где s – дробно-линейный автоморфизм области $|w| > 1$ на себя, легко убеждаемся, что левая часть (3.8) может быть сколь угодно малой величиной. По-видимому, гипотеза (3.8) неверна даже для регулярных функций класса $\mathfrak{M}(R)$. Вместе с тем, если $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$ и точки z_k, $k = 1,..,n$, $n \geqslant 2$, на окружности $|z| = 1$ таковы, что $f(z_k) = e^{i(\varphi+2\pi k/n)}$, $k = 1,..,n$, φ – вещественное число, то выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\left|f'(z_k)\right| \geqslant \left|h_n'(1)\right|^n.$$

Действительно, согласно теореме 1 [26], при $r > 1$ и достаточно близком к единице, минимум выражению

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\Lambda_f^{n/2}(r,\,\varphi+2\pi k/n) - \Lambda_f^{-n/2}(r,\,\varphi+2\pi k/n)\right]$$

дает функция $e^{i\varphi}h_n(z)$. Здесь $\Lambda_f(r,\theta)$ означает расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества

$f(\{z : 1 < |z| < r\})$, лежащей на луче $\arg w = \theta$, $1 < |w|$. Замечая, что $\Lambda_f(r, \varphi + 2\pi k) = 1 + |f'(z_k)|(r-1) + o(r-1)$, $r \to 1$, $k = 1,..,n$, получим отсюда требуемое неравенство.

Доказательству следующей теоремы предпошлем две леммы, касающиеся вычисления приведенных модулей симметричных конфигураций.

Лемма 3.3. *Пусть* $Z = \{1, e^{2\pi i/n}, .., e^{2\pi i(n-1)/n}\}$, $\Delta = \{1, 1, .., 1\}$, $\Psi = \{r, r, .., r\}$. *Тогда*

$$M(K^*, Z, \Delta, \Psi) = \frac{1}{2\pi n}\left\{\log(R^{n/2}/n) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2/k}{1 + R^{2nk}}\right\}.$$

Доказательство. По определению приведенного модуля,

$$M(K^*, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r\to 0}\left(|C(r; K^*, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{1}{2\pi n}\log r\right),$$

где конденсатор $C(r; K^*, Z, \Delta, \Psi)$ можно считать симметричным относительно окружности $|z| = 1$ и лучей $\arg z = \pi k/n$, $k = 0,..,2n-1$, [3, 4]. Обозначим через $\omega(z)$ потенциальную функцию этого конденсатора, которая также обладает указанной симметрией. Введем отображение $w = \frac{1}{2}((ze^{\pi i/n})^{n/2} + (ze^{\pi i/n})^{-n/2})$, переводящее область $G \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in K : |\arg z| < \pi/n\}$ на $D \cap \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, где D – область, ограниченная эллипсом с фокусами в точках ± 1 и полуосями $(R^{n/2} + R^{-n/2})/2$, $(R^{n/2} - R^{-n/2})/2$. Пусть $z = z(w)$ – обратное отображение, и пусть

$$\widetilde{\omega}(w) = \begin{cases} \omega(z(w)), & \operatorname{Im} w \geqslant 0, \\ \omega(z(\overline{w})), & \operatorname{Im} w \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Учитывая принцип симметрии для гармонических функций и принцип Дирихле, заключаем

$$|C(r; K^*, Z, \Delta, \Psi)| = \left\{2n \iint_G |\nabla\omega|^2 dxdy\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{n \iint_D |\nabla\widetilde{\omega}|^2 dudv\right\}^{-1} = \frac{1}{n}\left|C(r; D, \{0\}, \{1\}, \{(n/2)r\})\right|.$$

Вновь по определению приведенного модуля,

$$M(D, \{0\}, \{1\}, \{(n/2)r\}) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(\left|C(r;D,\{0\},\{1\},\{(n/2)r\})\right| + \frac{1}{2\pi}\log r\right).$$

Таким образом,

$$M(K^*,Z,\Delta,\Psi) = \frac{1}{n}M(D,\{0\},\{1\},\{(n/2)r\}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\log\left[r(D,0)/(n/2)\right].$$

Осталось воспользоваться формулой для вычисления внутреннего радиуса области D [27, с. 315].

Лемма 3.4. *Пусть* $Q = \mathbb{C}_z \setminus \{z = x + i0 : |x| \leqslant 1/a,$ *либо* $|x| \geqslant 1/a\}$, $Z = \{i,-i\}$, $\Delta = \{1,1\}$, $\Psi = \{\mu r, \mu r\}$, *где* $a > 1$, $\mu > 0$. *Тогда*

$$M(Q,Z,\Delta,\Psi) = \frac{1}{4\pi}\log\left[(a+1/a)/\mu\right].$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, рассмотрим симметричный относительно вещественной оси и окружности $|z| = 1$ конденсатор $C(r;Q,Z,\Delta,\Psi)$, и пусть $\omega(z)$ – его потенциальная функция. Обозначим через $z(w)$ ветвь функции, обратной функции Жуковского $w = (z+1/z)/2$, отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на $\{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\} \stackrel{\text{def}}{=} G$. Определяя $\widetilde{\omega}(w)$ так же, как в (3.9), получаем

$$|C(r;Q,Z,\Delta,\Psi)| = \left\{4\iint_G |\nabla\omega|^2 dxdy\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{2\iint_{\mathbb{C}_w} |\nabla\widetilde{\omega}|^2 dudv\right\}^{-1} = \frac{1}{2}\left|C(r;D,\{0\},\{1\},\{\mu r\})\right|,$$

где область D на этот раз есть w-плоскость с разрезами вдоль лучей $\{w = u + iv : v = 0, |u| \geqslant (a+1/a)/2\}$. Отсюда,

$$M(Q,Z,\Delta,\Psi) = \frac{1}{2}M(D,\{0\},\{1\},\{\mu r\}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\log[r(D,0)/\mu] = \frac{1}{4\pi}\log[(a+1/a)/\mu].$$

Лемма доказана.

Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$. Обозначим через $\Lambda_f(\theta)$ расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки области $f(K)$, лежащей на открытом луче $\arg w = \theta$, $1 < |w| < \infty$. Если при данном θ указанной точки не существует, то полагаем $\Lambda_f(\theta) = +\infty$.

Теорема 3.5. *Для функций $w = f(z)$ класса $\mathfrak{M}(R)$ справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{|f'(z_k)|}{\Lambda_f(\alpha_k)^{\pi/\beta_k} + \Lambda_f(\alpha_k)^{-\pi/\beta_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{R^{n^2/2}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n/k}{1+R^{2nk}}\right), \qquad (3.10)$$

где $z_k = \exp(2\pi ik/n)$, $n \geqslant 2$, $\alpha_k = (\varphi_{k+1} + \varphi_k)/2$, $\beta_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, $\varphi_k = \arg f(z_k)$, $k = 1,..,n$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$, непрерывная ветвь аргумента выбрана так, что $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n$. Равенство в (3.10) достигается для функции $w = h_n(e^{i\pi/n}z)$.

Доказательство. Введем семейство областей

$$\{D_k\}_{k=1}^n, \quad D_k = \{w : \varphi_k < \arg w < \varphi_{k+1}\}, \quad k = 1,..,n,$$

и семейство функций $\{p_k\}_{k=1}^n$, $\zeta = p_k(w) \equiv i\big(e^{-i\varphi_k}w\big)^{\pi/\beta_k}$, отображающих соответственно области D_k на правую полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. Пусть $\{C_k\}_{k=1}^n$ – результат разделяющего преобразования конденсатора $C(r; f(K^*), W, \Delta, \widetilde{\Psi})$ относительно семейства функций

$$\{p_k\}_{k=1}^n, \quad W = \{f(z_1),..,f(z_n)\},$$

$$\Delta = \{1,..,1\}, \quad \widetilde{\Psi} = \{|f'(z_1)|r, \ldots, |f'(z_n)|r\}$$

[2, с. 27]. Ввиду конформной инвариантности емкости и по теореме 1.8 [2], для емкостей конденсаторов выполняется неравенство

$$\mathrm{cap}\, C(r; K^*, Z, \Delta, \Psi) = \mathrm{cap}\, C(r; f(K^*), W, \Delta, \widetilde{\Psi}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cap}\, C_k, \quad Z = \{z_1,..,z_n\}, \quad \Psi = \{r,..,r\}.$$

Далее, положим

$$C_k^* = s^{-1}(\mathrm{Sym}(s(C_k))), \quad k = 1,..,n,$$

где $s(\zeta) = (\zeta - i)/(\zeta + i)$, а Sym означает симметризацию относительно единичной окружности [2, с. 25]. Наконец, положим

$$\widetilde{C}_k = C\big(r; Q_k, \{i, -i\}, \{1,1\}, \{\mu_k r, \mu_k r\}\big),$$

где

$$Q_k = \mathbb{C}_\zeta \setminus \{\zeta = \xi + i0 : |\xi| \leqslant \Lambda_f(\alpha_k)^{-\pi/\beta_k} \quad \text{либо} \quad |\xi| \geqslant \Lambda_f(\alpha_k)^{\pi/\beta_k}\},$$

$$\mu_k = \frac{\pi}{\beta_k}\sqrt{|f'(z_k)f'(z_{k+1})|}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Из теоремы 1.7 [2] и монотонности емкости следует

$$\operatorname{cap} C_k \geqslant \operatorname{cap} C_k^* \geqslant \operatorname{cap} \widetilde{C}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Суммируя выписанные соотношения, получим

$$\operatorname{cap} C(r; K^*, Z, \Delta, \Psi) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} \widetilde{C}_k.$$

Отсюда

$$n^2 M(K^*, Z, \Delta, \Psi) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2M(Q_k, \{i, -i\}, \{1, 1\}, \{\mu_k r, \mu_k r\})$$

(см. [2, с. 12]). Завершает доказательство неравенства (3.10) применение лемм 3.3 и 3.4, а также классического неравенства:

$$\prod_{k=1}^{n} \beta_k^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \frac{2\pi}{n}.$$

Для функции $f(z) = h_n(e^{i\pi/n}z)$ во всех приведенных выше соотношениях имеет место равенство, следовательно, равенство имеет место и в (3.10). Теорема доказана.

В заключение отметим, что теоремы искажения в §1, 3 приводят к оценкам коэффициентов в некоторых классах однолистных функций. Например, пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и пусть, дополнительно, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Тогда в некоторой окрестности точки $z = 0$ функция $f(z)$ представляется в виде степенного ряда

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

Полагая в неравенстве Фана (§1) $z_1 = -re^{i\varphi}$, $z_2 = re^{i\varphi}$, и устремляя $r \to 0$, получим соотношение $\operatorname{Re} e^{2i\varphi}(a_2^2 - a_3) \leqslant 1$, которое ввиду произвольности φ дает классическое неравенство

$$|a_2^2 - a_3| \leqslant 1, \qquad (|S_f(0)| \leqslant 6).$$

Любопытно, что это же неравенство вытекает из оценки в другую сторону (1.3). Еще интереснее тот факт, что устремляя в соотношении (1.4) r к нулю, получим оценку

$$\left|2a_5 - 4a_2a_4 - 3a_3^2 + 8a_2^2a_3 - 3a_2^4\right| \leqslant 1.$$

Эта оценка эквивалентна неравенству $|S_f''(0) - S_f^2(0)| \leqslant 60$, и была получена ранее [5, с. 91] так же из монотонности приведенного модуля, но относительно набора из трех точек (а не четырех как в нашем случае). Экстремальной функцией в выписанных неравенствах является функция Кебе $k(z)$. Далее, теорема 3.1 при $n = 2$, $z_1 = -z_2 = r$ и $r \to 0$ дает оценку

$$|a_2|^2 - (7/4)(\operatorname{Re} a_2)^2 + \operatorname{Re} a_3 + 1 \geqslant 0,$$

где экстремальной будет функция $f(z) = z/(1+z^2) = z - z^3 + z^5 - \dots$.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II,* Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.
3. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций,* Докл. РАН **363**, No. 6 (1998), 731–734.
4. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
5. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.
6. В. Н. Дубинин, Е. В. Костюченко, *Экстремальная задача Тейхмюллера и теоремы искажения в теории однолистных функций,* Сиб. мат. журн. **40**, No. 2 (1999), 302–306.
7. Ch. He, *Piecewise symmetrization in geometric function theory,* J. Fudan. Univ. Nat. Sci. **24**, No. 4 (1985), 445–451.
8. Seong-A Kim, D. Minda, *Two-point distortion theorems for univalent functions,* Pacific J. Math. **163**, No. 1 (1994), 137–157.
9. O. P. Juneja, S. Ponnusamy, S. Rajasekaran, *Two-point distortion and rotation theorems,* Glasnik Math. **30** (50) (1995), 221–242.
10. А. Ю. Васильев, Г. Н. Камышова, *Модули полосообразных областей в решении изопериметрической задачи конформного отображения,* Сиб. мат. журн. **37**, No. 1 (1996), 60–69.
11. J. A. Jenkins, *On weighted distortion in conformal mapping. II,* Bull. Lond. Math. Soc. **30**, No. 2 (1998), 151–158.
12. W. Ma, D. Minda, *Two-point distortion for univalent functions,* J. Comput. and Appl. Math. **105** (1999), 385–392.

13. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
14. Ky Fan, *Distortion of univalent functions,* J. Math. Anal. and Appl. **66**, No. 3 (1978), 626–631.
15. C. Blatter, *Ein Verzerrungssatz für schlichte Funktionen,* Comment. Math. Helv. **53** (1978), 651–659.
16. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.
17. Ю. Е. Аленицын, *Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **94** (1968), 4–18.
18. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций,* М., 1970.
19. Е. Г. Емельянов, *О максимуме конформного радиуса в семействах областей, удовлетворяющих дополнительным условиям,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 93–108.
20. А. Ю. Солынин, *Геометрические свойства экстремальных разбиений и оценки модулей семейств кривых в круговом кольце,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 93–114.
21. E. Rengel, *Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung,* Schr. Math. Sem. und Inst. fur angew. Math. Univ. Berlin. 1, No. 4 (1933), 141–162.
22. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям,* М., 1969.
23. M. Marcus, *Radial averaging of domains, estimates for Dirichlet integrals and applications,* J. Anal. Math. **27** (1974), 47–48.
24. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного,* Т. 2, М., 1962.
25. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 115-142.
26. В. Н. Дубинин, *Теоремы покрытия отрезков при конформном отображении кольца,* Изв. вузов. Математика No. 9 (1987), 42–50.
27. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике,* М., 1962.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток

Поступило 19 июля 2000