Е. М. Вечтомов, А. А. Петров, Многообразие полуколец, порожденное двухэлементными полукольцами с коммутативным идемпотентным умножением, *Чебышевский сб.*, 2014, том 15, выпуск 3, 12–30

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 512.558

МНОГООБРАЗИЕ ПОЛУКОЛЕЦ, ПОРОЖДЕННОЕ ДВУХЭЛЕМЕНТНЫМИ ПОЛУКОЛЬЦАМИ С КОММУТАТИВНЫМ ИДЕМПОТЕНТНЫМ УМНОЖЕНИЕМ[1]

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров (г. Киров)

Аннотация

В статье исследовано многообразие $\mathfrak{N}$, порожденное двухэлементными коммутативными мультипликативно идемпотентными полукольцами.

При изучении многообразий полуколец исходными служат две классические теоремы Биркгофа (о характеризации многообразий алгебраических структур и о подпрямой разложимости).

J. A. Kalman в 1971 году доказал, что с точностью до изоморфизма существует три подпрямо неразложимых коммутативных идемпотентных полукольца, обладающих двойственным законом дистрибутивности $x + yz = (x+y)(x+z)$: двухэлементное поле, двухэлементное моно-полукольцо, а также некоторое трехэлементное полукольцо.

В 1999 году S. Ghosh показал, что произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ будет подпрямым произведением булева кольца и дистрибутивной решетки. Аналогичный результат для класса всех мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей, обладающих тождеством $1 + 2x = 1$, получил F. Guzman в 1992 году. Показано, что любое такое полукольцо коммутативно и является подпрямым произведением семейства двухэлементных полей и двухэлементных цепей, а также может быть порождено одним трехэлементным полукольцом.

Нами в даной работе получены следующие результаты. Доказаны некоторые необходимые условия подпрямой неразложимости полуколец из многообразия $\mathfrak{M}$ всех полуколец с коммутативным идемпотентным умножением. Показано, что произвольное полукольцо из $\mathfrak{M}$ является подпрямым произведением двух коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, одно из которых обладает тождеством $3x = x$, а другое — тождеством $3x = 2x$.

Найдены все подпрямо неразложимые полукольца в $\mathfrak{N}$. Описаны подмногообразия в $\mathfrak{N}$. Показано, что в классе $\mathfrak{M}$ многообразие $\mathfrak{N}$ задается

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К

одним тождеством $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$. Доказано, что решетка всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ является 16-элементной булевой решеткой.

Ключевые слова: полукольцо, мультипликативно идемпотентное полукольцо, многообразие полуколец.

Библиография: 16 названий.

VARIETY OF SEMIRINGS GENERATED BY TWO-ELEMENT SEMIRINGS WITH COMMUTATIVE IDEMPOTENT MULTIPLICATION

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov (Kirov)

Abstract

The article is devoted to investigation of an variety $\mathfrak{N}$ generated by two-element commutative multiplicatively idempotent semirings. Two classical theorems of Birkhoff (about the characterization of varieties of algebraic structures, and subdirect reducibility) are initial in the studying of semiring varieties.

In 1971 J. A. Kalman proved that there exist up to isomorphism three subdirectly irreducible commutative idempotent semirings satisfying the dual distributive law $x + yz = (x + y)(x + z)$, namely a two-element field, a two-element mono-semiring, and the some three-element semiring.

In 1999 S. Ghosh showed that any commutative multiplicatively idempotent semiring with identity $x + 2xy = x$ is the subdirect product of a Boolean ring and a distributive lattice. In 1992 F. Guzman got a similar result for the variety of all multiplicatively idempotent semirings with zero and unit, satisfying the identity $1 + 2x = 1$. It was proved that every such semiring is commutative. This one is the subdirect product of two-element fields and two-element chains and it may be generated by a single three-element semiring.

We obtained the following results in the work. We proved some necessary conditions for subdirect irreducibility of semirings from the variety $\mathfrak{M}$ of all the semirings with commutative indempotent multiplication. It was shown that an arbitrary semiring from $\mathfrak{M}$ is subdirect product of two commutative multiplicatively idempotent semirings, one of which has the identity $3x = x$, and the other has the identity $3x = 2x$. We found all the subdirectly irreducible semirings in $\mathfrak{N}$ and discribed varieties in $\mathfrak{N}$. It was obtained that in the class $\mathfrak{M}$ the variety $\mathfrak{N}$ is defined by the single identity $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$. We proved that the lattice of all the subvarieties of the variety $\mathfrak{N}$ is a 16-element Boolean lattice.

Keywords: semiring, multiplicatively idempotent semiring, the variety of semirings.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Результаты работы анонсированы в [3, 4, 5, 6, 7, 8].

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полурешеткой называется любая идемпотентная коммутативная полугруппа.

Элемент θ полукольца S назовем *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x \in S$ выполняется $x \cdot \theta = \theta \cdot x = \theta$ (соответственно, $x + \theta = \theta$). Элемент полукольца, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим* и обозначается ∞. Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно присоединить естественным образом нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S \cup \{0\}$ и $S \cup \{\infty\}$, соответственно.

Полукольцо называется *коммутативным*, если на нем тождественно $xy = yx$. Полукольцо с тождеством $xx = x$ ($x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (*аддитивно идемпотентным*). Отметим, что любое мультипликативно идемпотентное полукольцо удовлетворяет тождеству $x+x+x+x = x+x$, то есть $4x = 2x$. Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Полукольцо S называется *дистрибутивным*, если на нем выполняется двойственный закон дистрибутивности $x + yz = (x + y)(x + z)$. Идемпотентное полукольцо с тождеством $x + y = xy$ называется *моно-полукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если существует элемент $t \in S$, такой, что $x + y = t$ для всех $x, y \in S$ (равносильно, S удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$).

Отношение эквивалентности ρ на произвольном полукольце S называется *конгруэнцией*, если для всех $x, y, z \in S$ из $x\rho y$ следует

$$(x + z)\rho(y + z), \quad (xz)\rho(yz), \quad (zx)\rho(zy).$$

На любом полукольце S есть две тривиальные конгруэнции: нулевая конгруэнция $\mathbf{0}_S$ — отношение равенства и единичная конгруэнция $\mathbf{1}_S$ — одноклассовая.

Полукольцо S называется *подпрямо неразложимым*, если на нем существует наименьшая ненулевая конгруэнция. Неодноэлементное полукольцо называется *конгруэнц-простым*, если на нем нет нетривиальных конгруэнций. Конгруэнц-простые полукольца подпрямо неразложимы.

При изучении многообразий полуколец исходными служат две классические теоремы Биркгофа. Напомним, что *многообразием полуколец* называется класс всех полуколец, удовлетворяющих некоторому набору полукольцевых тождеств. По первой теореме Биркгофа [9, с. 185], произвольный класс полуколец будет многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подполуколец, гомоморфных образов и любых прямых произведений. Из второй теоремы Биркгофа [9, с. 115] следует, что любое полукольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых полуколец.

Собственный идеал I полукольца S называется *простым*, если $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$ $(\forall\, a,\, b \in S)$. Через $Spec\, S$ обозначим множество всех простых идеалов полукольца S.

В произвольном полукольце S вводится «разностное» отношение $\leqslant$:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x = y \text{ или } \exists\, z \in S\, (x + z = y).$$

Оно рефлексивно и транзитивно, но не обязательно антисимметрично. Если отношение $\leqslant$ антисимметрично, то есть является отношением порядка, то полукольцо назовем *упорядочиваемым*. Заметим, что в случае аддитивно идемпотентных полуколец отношение $\leqslant$ является порядком, при этом $x \leqslant y \Leftrightarrow x+y = y$.

Бинарное отношение $\sim$ на полукольце S

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ и } y \leqslant x$$

является конгруэнцией на S. Соответствующее факторполукольцо $S/{\sim}$ уже упорядочиваемо. Упорядочиваемость полукольца S равносильна тому, что $\sim$ есть отношение равенства на S. См. [2, с. 30].

Предложение 1. [11, следствие 1]. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S упорядочиваемо тогда и только тогда, когда на нем тождественно $3x = 2x$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если мультипликативно идемпотентное полукольцо S упорядочиваемо, то для $x \in S$ получаем $3x = 2x$, поскольку $2x \leqslant 3x$ и $3x \leqslant 4x = 2x$.

Достаточность. Пусть на S тождественно $3x = 2x$. Покажем, что отношение $\leqslant$ на S антисимметрично. Пусть $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ в S, то есть существуют такие элементы $s, t \in S$, что $a + s = b, b + t = a$. Тогда $a + s + t = b + t = a$, откуда $a + 2s + 2t = a + s + t = a$. В силу тождества $3x = 2x$ получаем $a = (a + 2s + 2t) + s = a + s = b$. $\square$

Ясно, что полукольцо S мультипликативно идемпотентно (идемпотентно) $\Leftrightarrow$ классы любой конгруэнции на S являются подполугруппами полугруппы $\langle S, \cdot\rangle$ (соответственно, подполукольцами в S).

Любой элемент a коммутативного полукольца S определяет конгруэнцию $\sim_a$ на S :

$$x \sim_a y \Leftrightarrow xa = ya.$$

Нетрудно видеть, что справедлива

Лемма 1. *Для элементов a, b коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S выполняются следующие свойства:*

1. $x \sim_a (ax)$ *для любого* $x \in S$;
2. *если S обладает единицей 1, то $a \sim_a 1$ и 1 является единственным обратимым элементом в S;*
3. *если $a \sim_a b$ и $a \sim_b b$, то $a = b$.*

□

Для произвольного элемента a полукольца S рассмотрим бинарное отношение ${}_a\!\sim$:

$$(\forall x, y \in S)\, x\, {}_a\!\sim y \Leftrightarrow x + a = y + a.$$

Отметим, что отношение ${}_a\!\sim$ является конгруэнцией на полугруппе $\langle S, + \rangle$, и если a — поглощающий элемент по умножению, то ${}_a\!\sim$ является конгруэнцией на полукольце S.

Говорят, что *простые идеалы* полукольца S *разделяют его элементы*, если для любых $a, b \in S, a \neq b$, найдется простой идеал в S, содержащий ровно один из элементов a, b.

Предложение 2. [11, Теорема 1]. *Простые идеалы произвольного полукольца S разделяют его элементы тогда и только тогда, когда S коммутативно и мультипликативно идемпотентно.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть P — простой идеал полукольца S и $a, b \in S$. Тогда $a^2 \in P \Leftrightarrow a \in P$. Тем самым, элементы a^2 и a не разделяются простыми идеалами, и, значит, они равны, а полукольцо S мультипликативно идемпотентно. Далее, пусть $ab \in P$. В P лежит также элемент $baba = ba$. Значит, полукольцо S коммутативно.

Достаточность. Рассмотрим произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S. По умножению S является полурешеткой. Возьмем в полукольце S элементы $a \neq b$. Не выполняется одно из равенств $a = ab$ или $b = ab$. Можно считать, что $a \neq ab$. Главный идеал $bS = \{s \in S\colon\ sb = s\}$ полукольца S не содержит элемент a. В силу леммы Цорна существует идеал P, максимальный среди идеалов J в S, обладающих свойствами $bS \subseteq J$ и $a \notin J$. Покажем, что P — простой идеал. Пусть $x,\ y \in S \setminus P$. Тогда $xS + P \supset P$ и $yS + P \supset P$, поэтому $a \in (xs + P) \cap (yS + P)$. Значит, $a = xs + p = yt + q$ для некоторых $s,\ t \in S$ и $p,\ q \in P$. Следовательно,

$$a = a^2 = (xs + p)(yt + q) = (xy)st + (xsq + pyt + pq),$$

откуда $xy \notin P$, поскольку $xsq + pyt + pq \in P$. Это доказывает простоту идеала P. Остается заметить, что $b = b^2 \in bS \subseteq P$, но $a \notin P$. Тем самым, простой идеал P *разделяет элементы* a и b $(a \neq b)$ данного полукольца S. □

Для произвольного простого идеала P коммутативного полукольца S определяется конгруэнция $\theta(P)$ [12, p. 210]:

$$(\forall x, y \in S)\,(x\theta(P)y) \Leftrightarrow \exists z \in S \setminus P\,(xz = yz).$$

Лемма 2. *Для всякого простого идеала P коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. *множество $S \setminus P$ будет классом конгруэнции $\theta(P)$;*

2. *факторполукольцо $S/\theta(P)$ является полукольцом с единицей.*

Доказательство. (1) Заметим, что $u\theta(P)v$ для любых $u, v \in S \setminus P$, так как $u(uv) = uv = v(uv)$. Пусть теперь для элементов $p \in P, u \in S \setminus P$ выполняется $p\theta(P)u$, то есть $pw = uw$ для некоторого $w \in S \setminus P$. Тогда $uw \in P$, что невозможно, так как P — простой идеал. Таким образом, $S \setminus P$ является классом конгруэнции $\theta(P)$.

(2) Класс $S \setminus P$ является единичным элементом в $S/\theta(P)$. В самом деле, $(pu)\theta(P)p$ для любых $p \in P, u \in S \setminus P$. $\square$

Лемма 3. *Для любого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливо равенство $\bigcap\limits_{P \in Spec\, S} \theta(P) = \mathbf{0}_S$, следовательно, имеет место изоморфное вложение S в коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо $\prod\limits_{P \in Spec\, S} S/\theta(P)$ с единицей.*

Доказательство следует из предложения 2 и леммы 2. $\square$

Лемма 4. *Произвольное коммутативное идемпотентное полукольцо S с единицей 1 является моно-полукольцом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет квазитождеству $x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Для любого $x \in S$ выполняется $x + 1 = (x + 1) + 1$, откуда $x + 1 = x$. Тогда для всех $x, y \in S$ имеем $x + xy = xy, y + xy = xy$. Получаем $x + y = (x + y)^2 = x + xy + xy + y = xy + xy = xy$. $\square$

2. О подпрямо неразложимых полукольцах в $\mathfrak{M}$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец.

Легко видеть, что с точностью до изоморфизма существует четыре двухэлементных коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- двухэлементная цепь $\mathbb{B}$;

- двухэлементное поле $\mathbb{Z}_2$;
- двухэлементное моно-полукольцо $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$ с единицей 1;
- двухэлементное полукольцо $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ с единицей 1 и константным сложением.

Предложение 3. *Решетка $L(\mathfrak{M})$ имеет ровно 4 атома: $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ и является атомной.*

Доказательство. Покажем, что любое неодноэлементное полукольцо $S \in \mathfrak{M}$, имеет двухэлементное подполукольцо.

Если $\exists a \in S$, такой, что $3a \neq 2a$, то $\{2a, 3a\}$ — подполукольцо в S, изоморфное $\mathbb{Z}_2$.

Пусть теперь в S выполняется тождество $3x = 2x$. Если $\exists a \in S$, такой, что $2a \neq a$, то $\{a, 2a\}$ будет подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{T}$.

Если же S идемпотентно, то для всех $a \neq b$ из S либо $a \neq ab$, либо $b \neq ab$. Пусть $a \neq ab$. Тогда либо $a + ab \neq a$, либо $a + ab \neq ab$. В первом случае подполукольцом в S будет $T_1 = \{a, a + ab\}$, во втором — $T_2 = \{ab, a + ab\}$, причем $T_1 \cong \mathbb{D}, T_2 \cong \mathbb{B}$. □

Отметим, что решетка подмногообразий любого нетривиального многообразия атомна [10, с. 376].

Обозначим через $\mathfrak{N}$ многообразие полуколец, порожденное полукольцами $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}$ или, равносильно, одним полукольцом $\mathbb{B} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{D} \times \mathbb{T}$.

Лемма 5. *Полукольца $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}, \mathbb{T}$ суть (с точностью до изоморфизма) все конгруэнц-простые коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца.*

Доказательство. Пусть S — произвольное конгруэнц-простое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо. Для любого элемента $a \in S$ имеем $\sim_a = \mathbf{0}_S$ или $\sim_a = \mathbf{1}_S$. В первом случае получаем, что a — нейтральный элемент по умножению, так как $xa \sim_a x$ для всякого $x \in S$. Во втором случае имеем $x \sim_a y$ для любых $x, y \in S$, в частности $x \sim_a a$, откуда $xa = a$, то есть a — поглощающий элемент по умножению. Нейтральный и поглощающий элементы по умножению произвольного полукольца, если они существуют, единственны. Кроме того, если они равны между собой, то полукольцо одноэлементно. Следовательно, $|S| = 2$. □

В полукольце с единицей 1 обозначим $2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$.

Теорема 1. *Для всякого подпрямо неразложимого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. *S имеет единицу 1;*

2. *множество* $S \setminus \{1\}$ *— наибольший идеал в* S, *обладающий единицей* e;

3. *наименьшей ненулевой конгруэнцией на* S *служит конгруэнция, склеивающая только элементы* 1 *и* e;

4. *в* S *верно равенство* $3 = 2$ *или* $3 = 1$ *и* $e = 2$.

Доказательство. (1) Пусть S — полукольцо, удовлетворяющее условию теоремы. По лемме 3 $S \hookrightarrow \prod\limits_{P \in Spec\, S} S/\theta(P)$, а по лемме 2 $S/\theta(P)$ — полукольцо с единицей для любого $P \in Spec\, S$. Так как S подпрямо неразложимо, то существует $Q \in Spec\, S$, такой, что $S/\theta(Q) \cong S$, откуда S обладает единицей.

(2) Предположим, что $(\forall x \in S \setminus \{1\})\,(\exists y \in S \setminus \{1\})\,(xy \neq y)$. Рассмотрим произвольные элементы $a \neq b$ из $S \setminus \{1\}$. По лемме 1 либо $a \nsim_a b$, либо $a \nsim_b b$. Пусть $a \nsim_a b$, то есть $a \neq ab$. Тогда $a \sim_a 1, b \nsim_a 1$. Кроме того, по предположению $ac \neq c$ для некоторого $c \in S \setminus \{1\}$, откуда $a \nsim_c 1, a \sim_c ac$. Значит, любые элементы $x, y \in S \setminus \{1\}$ можно разделить некоторой нетривиальной конгруэнцией, и для всех $x \in S \setminus \{1\}$ найдется нетривиальная конгруэнция, разделяющая элементы x и 1. Получаем противоречие с подпрямой неразложимостью полукольца S.

Обозначим через e элемент из $S \setminus \{1\}$, для которого $xe = x$ при всех $x \in S \setminus \{1\}$.

Покажем, что $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S. Учитывая пункт (2) леммы 1, $S \setminus \{1\}$ выдерживает умножение на элементы из S. Если же $s + t = 1$ для некоторых $s, t \in S \setminus \{1\}$, то $e = e \cdot 1 = e(s+t) = es+et = s+t = 1$, противоречие.

(3) Легко видеть, что конгруэнция $\sim_e$ склеивает только элементы 1 и e, поэтому она и будет наименьшей ненулевой конгруэнцией на S.

(4) Пусть в S имеем $3 \neq 2$. Поскольку $3 \sim 2$, то конгруэнция $\sim$ ненулевая. Значит, по пункту (3), $1 \sim e$, в частности, $e \leqslant 1$, $e + s = 1$ для некоторого $s \in S$. В силу того, что $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S, получаем $s = 1$, то есть $e + 1 = 1$ и $e + e = e$. Так как $2 \neq 1$, то $e = e + e = 2e = 2$. □

В качестве следствия получаем следующий результат о структуре полуколец из $\mathfrak{M}$.

Предложение 4. *Произвольное полукольцо* $S \in \mathfrak{M}$ *является подпрямым произведением полукольца* $T_1 \in \mathfrak{M}$ *с тождеством* $3x = x$ *и полукольца* $T_2 \in \mathfrak{M}$ *с тождеством* $3x = 2x$.

Доказательство. Представим S как подпрямое произведение семейства S_i $(i \in I)$ подпрямо неразложимых полуколец $S_i \in \mathfrak{M}$: $s \equiv (s_i) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ для каждого $s \in S$. Пусть I_1 — множество всех индексов $i \in I$, таких, что S_i удовлетворяет тождеству $3x = x$, и $I_2 = I \setminus I_1$. По утверждению 4 теоремы 1 для любого $i \in I_2$ полукольцо S_i удовлетворяет тождеству $3x = 2x$. Можно считать, что I_1 и I_2 непустые. Получаем искомые полукольца $T_k = \{(s_i) : i \in I_k\}$ при $k = 1, 2$. □

Для непустого собственного подмножества M полукольца S через τ_M обозначим разбиение S, при котором одним классом будет M, а остальные классы одноэлементны.

Будем говорить, что *разбиение* полукольца S *является конгруэнцией* на S, если оно задает конгруэнцию на нем.

Лемма 6. *Во всяком подпрямо неразложимом полукольце $S \in \mathfrak{M}$, $|S| \geqslant 3$, найдутся такие элементы s, t, что $1 + s = 1, 1 + t \neq 1$.*

Действительно, в противном случае разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}} = \{\{1\}, S\setminus\{1\}\}$ является конгруэнцией на S, разделяющей элементы 1 и e, что невозможно по пункту (2) леммы 1. □

Замечание 1. Если подпрямо неразложимое полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ обладает нулем 0, то полукольцо $S \cup \{\infty\}$ также будет подпрямо неразложимым. В самом деле, для любых $a, b \in S$ и конгруэнции ρ на $S \cup \{\infty\}$ из $a\rho\infty$ следует $0\rho\infty$, так как $(a \cdot 0)\rho(\infty \cdot 0)$. Тогда $b\rho\infty$, поскольку $(b+0)\rho(b+\infty)$. Таким образом, $\rho = \mathbf{1}_{S\cup\{\infty\}}$, откуда для любой нетривиальной конгруэнции ρ' на $S \cup \{\infty\}$ класс $[\infty]_{\rho'}$ одноэлементен. Значит, полукольцо $S\cup\{\infty\}$ подпрямо неразложимо вместе с S. Аналогично проверяется, что для всякого подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{M}$ с поглощающим элементом ∞ полукольцо $S \cup \{0\}$ является подпрямо неразложимым. Поэтому и на основании теоремы 1 полукольца $\mathbb{B} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}, \mathbb{D} \cup \{0\}, \mathbb{T} \cup \{0\}$ будут (единственными с точностью до изоморфизма) трехэлементными подпрямо неразложимыми полукольцами в $\mathfrak{M}$.

Отметим результат А. Романовской [16, corollary 2.9]: для любого кардинала $m \geqslant 2$ существует по крайней мере два подпрямо неразложимых коммутативных идемпотентных полукольца мощности m.

3. Подмногообразия в $\mathfrak{N}$

Опишем все подмногообразия многообразия $\mathfrak{N}$.

Для полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ будем обозначать многообразие полуколец, порожденное этими полукольцами. Это означает, что многообразие $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ задается множеством всевозможных тождеств, выполняемых на каждом из полуколец $S_1, \ldots, S_n$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$.

Отметим, что $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$ есть многообразие всевозможных дистрибутивных решеток, то есть полуколец с полурешеточным умножением, обладающих законом поглощения $x + xy = x$. Легко видеть, что многообразие всех булевых колец характеризуется в $\mathfrak{M}$ тождеством $x + 2y = x$ и совпадает с $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$.

Предложение 5. *Произвольное моно-полукольцо есть подпрямое произведение семейства полуколец $\mathbb{D}$. Следовательно, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$ — многообразие всевозможных моно-полуколец.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое моно-полукольцо. Рассмотрим разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ полукольца S. Для любых $x, y \in S \setminus \{1\}$ имеем $x+y = xy \neq 1, 1+x = 1 \cdot x = x \neq 1$. Значит, $\tau_{S\setminus\{1\}}$ — двухклассовая конгруэнция на S, разделяющая элементы 1 и e. По теореме 1 $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{D}$. □

Многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$ фактически совпадает с многообразием всех полурешеток, а многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ представляет собой класс всевозможных полурешеток с поглощающим элементом.

Предложение 6. *Всякое полукольцо из $\mathfrak{M}$ с константным сложением будет подпрямым произведением семейства полуколец $\mathbb{T}$. Значит, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ — многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с константным сложением.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее константным сложением. Для любого $x \in S\setminus\{1\}$ имеем $1+x = \infty \neq 1$. Как и в предложении 5, разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией, $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$. □

Лемма 7. *Для любого элемента a дистрибутивного идемпотентного полукольца S бинарное отношение ${}_a\!\sim$ является конгруэнцией на S.*

Доказательство. Требуется проверить только замкнутость умножения. Если для некоторых элементов $x, y, z \in S$ выполняется $x {}_a\!\sim y$, то $xz + a = (x+a)(z+a) = (y+a)(z+a) = yz + a$, то есть $(xz) {}_a\!\sim (yz)$. Аналогично, $(zx) {}_a\!\sim (zy)$. □

Приведем новые доказательства двух известных результатов.

Утверждение А [14, theorem]. *С точностью до изоморфизма существует три подпрямо неразложимых дистрибутивных коммутативных идемпотентных полукольца: двухэлементная цепь $\mathbb{B}$, двухэлементное моно-полукольцо с единицей $\mathbb{D}$ и трехэлементное полукольцо $\mathbb{B} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое коммутативное идемпотентное дистрибутивное полукольцо. Обозначим $Q = S\setminus\{1, e\}$. Заметим, что в силу леммы 1 $xy \notin \{1, e\}$ для всех $x, y \in Q$.

Далее, отметим, что $e + 1 \notin Q$. Действительно, если $e + 1 = q \in Q$, то $e = e + e = e(e + 1) = eq = q$. Противоречие.

Возможны два случая: $e+1 = 1$ или $e+1 = e$. Заметим, что в обоих случаях $e + e = e$.

Первый случай. Пусть $e + 1 = 1$. По лемме 7 отношение ${}_e\!\sim$ является конгруэнцией на S, причем $1 {}_e\!\nsim e$, так как $1 = 1 + e \neq e + e = e$. Значит, ${}_e\!\sim$ есть отношение равенства на S, откуда элемент e аддитивно сократим.

Выше показано, что $QS \subseteq Q$, при этом множество $S \setminus Q = \{1, e\}$ мультипликативно замкнуто. Рассмотрим элементы $x, y \in Q$. Заметим, что $x+y \neq 1$ в силу того, что $S\setminus\{1\}$ — идеал. Если $x+y=e$, то $x+e=x+x+y=x+y=e=e+e$, откуда $x=e$, противоречие. Таким образом, Q — простой идеал в S.

Покажем, что $S\setminus Q+Q\subseteq Q$. Действительно, если для некоторого $q\in Q$ выполняется $1+q\in\{1,e\}$ (или $e+q\in\{1,e\}$), то $e+q=e=e+e$, откуда $q=e$, противоречие.

Если $|S|=2$, то $S\cong\mathbb{B}$. Если же $|S|\geqslant 3$, то, учитывая лемму 6, разбиение τ_Q является конгруэнцией на S, разделяющей элементы $1,e$. Значит, $\tau_Q=\mathbf{0}_S$ и $S\cong\mathbb{B}\cup\{\infty\}$.

Второй случай. Пусть $e+1=e$. По лемме 7 конгруэнция ${}_1\!\sim$ есть отношение равенства на S, откуда элемент 1 аддитивно сократим. По лемме 4 S является моно-полукольцом, и по предложению 5 $S\cong\mathbb{D}$. □

Следствие 1. $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D})=\mathfrak{M}(\mathbb{B}\cup\{\infty\})$ — *многообразие всех дистрибутивных коммутативных идемпотентных полуколец.*

Утверждение B [13, corollary 4.4]. *Любое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x+2xy=x$ является подпрямым произведением двухэлементных полей и двухэлементных цепей, стало быть, булева кольца и дистрибутивной решетки.*

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x+2xy=x$. Подставляя в тождество $x=1$, получаем $1=1+2y=(1+y)+y$ для всех $y\in S$, откуда $1+s=1$ для любого $s\neq 1$, в силу того, что $S\setminus\{1\}$ является идеалом в S. Тогда $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, откуда $\tau_{S\setminus\{1\}}=\mathbf{0}_S$. Теперь, если $2=1$, то $S\cong\mathbb{B}$. Если же $2\neq 1$, то $S\cong\mathbb{Z}_2$. □

Следствие 2. $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2)$ — *многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x+2xy=x$.*

Предложение 7. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x+xy=2x$ является подпрямым произведением полуколец $\mathbb{B}$ и $\mathbb{T}$, а значит, дистрибутивной решетки и коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением. Таким образом, $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{T})$ — это многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x+xy=2x$.*

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x+xy=2x$. При $x=1$ имеем $1+y=1+1$ для всех $y\in S$, откуда для всех $s\neq 1$ получаем либо $1+s=1+1=1$, либо $1+s=1+1\neq 1$. В обоих случаях $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1\}}=\mathbf{0}_S$. В первом случае $S\cong\mathbb{B}$, а во втором $S\cong\mathbb{T}$. □

Предложение 8. *Любое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x+y=2xy$ является подпрямым произведением семейства полуколец $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$, равносильно, некоторых моно-полукольца* *и коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением. Поэтому $\mathfrak{M}(\mathbb{D},\mathbb{T})$ есть многообразие всех мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x+y=2xy$.*

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x+y=2xy$. При $y=1$ получаем $x+1=x+x$ для всех $x\in S$. Значит, для любого s из идеала $S\setminus\{1\}$ имеем $1+s=s+s\neq 1$. Таким образом, $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S. Значит, $\tau_{S\setminus\{1\}}=\mathbf{0}_S$. Если $2=1$, то $S\cong\mathbb{D}$, если же $2\neq 1$, то $S\cong\mathbb{T}$. □

Предложение 9. *Всякое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $2x=2y$ является подпрямым произведением семейства полуколец $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{T}$, стало быть, булева кольца и коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением. Следовательно, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ совпадает с многообразием всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x=2y$.*

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $2x=2y$. Подставляя $x=s\neq 1, y=1$, получаем $s+s=1+1$ для всякого $s\in S\setminus\{1\}$, откуда $2\neq 1$.

Предположим, что существует $a\in S\setminus\{1\}$, такой, что $1+a=1$. Тогда в силу тождества $2x=2y$, получаем $1=1+a=(1+a)+a=1+(a+a)=$ $=1+(t+t)=(1+t)+t$ для любого $t\in S\setminus\{1\}$. Откуда $1+t=1$, так как $S\setminus\{1\}$ является идеалом в S. Получаем, что $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1\}}=\mathbf{0}_S$ и $S\cong\mathbb{Z}_2$.

Если $1+b\neq 1$ для некоторого $b\in S\setminus\{1\}$, то по только что доказанному $1+t\neq 1$ для всех $t\in S\setminus\{1\}$. В этом случае $S\cong\mathbb{T}$. □

Предложение 10. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $2x+xy=xy$ является подпрямым произведением семейства полуколец $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2\cup\{\infty\}$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{D},\mathbb{Z}_2)=\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2\cup\{\infty\})$ является многообразием всевозможных коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x+xy=xy$.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое полукольцо из многообразия полуколец с тождеством $xy+2x=xy$. Оно обладает единицей 1 и элементом e, таким, что $em=m$ для любого m из максимального идеала $M=S\setminus\{1\}$. При этом из тождества $xy+2x=xy$ следует, что для всех $x\in S$ выполняется $x+2=x$.

Пусть $2=1$. Тогда для всех $x,y\in S$ справедливо $x+1=x, y+1=y$, откуда $x+xy=xy=y+xy$. Получаем $x+y=x+y+2xy=2xy=xy$. Таким образом, S — моно-полукольцо и по предложению 5 $S\cong\mathbb{D}$.

Пусть $2=e$. Тогда для всякого $x\in S$ справедливо $x+e=x$. Заметим, что множество $S\setminus\{1,e\}$ является простым идеалом в S. Если $S\setminus\{1,e\}=\varnothing$, то

$S \cong \mathbb{Z}_2$. Если же $S \setminus \{1, e\} \neq \varnothing$, то разбиение $\tau_{S\setminus\{1,e\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1,e\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.

Пусть теперь $2 \notin \{1, e\}$. Тогда $e + e = 2$ и $x + 2 = x$ для всех $x \in S$. Если $e + 1 = 1$, то $2 = e + 2 = e$. Если же $e + 1 \notin \{1, e\}$, то $e + 1 = e(e + 1) = e + e = 2$, откуда $e = e + 2 = 2 + 1 = 1$. Противоречие. Значит, $e + 1 = e$. Теперь, $1 = 2 + 1 = (e + e) + 1 = e + (e + 1) = e + e = 2$, противоречие. □

В произвольном полукольце $S \in \mathfrak{N}$ выполняется тождество

$$x + 2xy + yz = x + 2xz + yz, \qquad (*).$$

поскольку ему удовлетворяют полукольца $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}$.

Лемма 8. *Если $S \in \mathfrak{N}$ обладает единицей 1, а элементы из $S \setminus \{1\}$ аддитивно идемпотентны, то $\forall x \in S, \forall y \in S \setminus \{1\}$ справедливо равенство:*

$$1 + x + y = 1 + x + xy. \qquad (**)$$

Доказательство. Пусть полукольцо S удовлетворяет условию леммы. Тогда на S выполняется тождество (*). Подставив в (*) $x = 1$ и переобозначив переменные, получаем равенство $1+2x+xy = 1+2y+xy$. Если $x \in S$ и $y \in S\setminus\{1\}$, то $1+x+xy = 1+y+xy$. Имеем $1+x+xy = (1+x+xy)+x = (1+y+xy)+x = 1+x+y$. □

Замечание 2. Полукольца $\mathbb{D} \cup \{0\}$ и $\mathbb{T} \cup \{0\}$ не удовлетворяют тождеству (*), стало быть, они не принадлежат многообразию $\mathfrak{N}$. В самом деле, для полукольца $\mathbb{D} \cup \{0\}$ при $x = 1, y = \infty, z = 0$ имеем $\infty = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \infty + 1 \cdot \infty \cdot 0 \neq 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot \infty \cdot 0 = 1$. В полукольце $\mathbb{T} \cup \{0\}$ при $x = y = 1, z = 0$ получаем $\infty = 1 + 1 + 0 \neq 1 + 0 + 0 = 1$.

Лемма 9. *Для произвольного коммутативного идемпотентного подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1. *отношение ${}_1\!\sim$ является конгруэнцией на S;*
2. *если $1 + e = 1$, то отношение ${}_e\!\sim$ является конгруэнцией на S.*

Доказательство.(1) Достаточно проверить, что ${}_1\!\sim$ сохраняет полукольцевое умножение. Пусть для некоторых $a, b \in S$ выполняется $a + 1 = b + 1$. Рассмотрим произвольный элемент $c \in S$. Имеем $1 + a + c = 1 + b + c$. Из равенства (**) получаем $1 + a + c = 1 + a + ac$. Подставляя теперь в (**) $x = a, y = ac$, имеем $1 + a + ac = 1 + ac + ac = 1 + ac$. Аналогично, $1 + b + c = 1 + bc$. Таким образом, ${}_1\!\sim$ является конгруэнцией на S.

(2) Покажем, что ${}_e\!\sim$ сохраняет полукольцевое умножение. Пусть для элементов $a, b \in S$ выполняется $a \,{}_e\!\sim b$, то есть $a + e = b + e$. Нужно показать, что $ac + e = bc + e$ для любого $c \in S$. Заметим, что из $a + e = b + e$ следует $ac + ec = bc + ec$.

При $c = 1$ получаем требуемое.

Пусть теперь $c \neq 1$. Учитывая $e+1 = 1$, имеем $a+1 = a+e+1 = b+e+1 = b+1$. Тогда из пункта (1) $ac + 1 = bc + 1$, откуда $ac + e = bc + e$, так как $c \neq 1$. $\square$

Пусть S — произвольное подпрямо неразложимое полукольцо в $\mathfrak{M}$, причем $|S| \geqslant 3$. Тогда в силу леммы 6 существует следующее разбиение полукольца S :

$$\tau = \{\{1\}, A = \{x \in S : x \neq 1, x + 1 = 1\}, B = \{x \in S : x \neq 1, x + 1 \neq 1\}\}.$$

Лемма 10. *Разбиение τ произвольного подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{M}$, $|S| \geqslant 3$, обладает следующими свойствами:*

1. $1 + A = \{1\}, A + A \subseteq A, AA \subseteq A, B + S \subseteq B$;
2. *если $S \in \mathfrak{N}$ и в нем $3 = 1 \neq 2$, то $\tau = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. (1) Ясно, что $A + 1 = \{1\}$.

Пусть $a, a' \in A$, то есть $a + 1 = a' + 1 = 1$. Тогда $a + a' + 1 = (a + 1) + a' = 1 + a' = 1$, откуда $a + a' \in A$. Заметим, что $aa' = aa' \cdot 1 = aa'(a+1) = aa' + aa'$. Учитывая это, получаем $1 = a + a' + 1 = a + 2aa' + a' + 1 = aa' + 1$, откуда $aa' \in A$.

Если для некоторых $x \neq 1 \neq y$ выполняется $x+y+1 = 1$, то $x+1 = y+1 = 1$. Значит, если $b \in B$, то $b + s \in B$ для любого $s \neq 1$.

Пусть $b \in B$. Рассмотрим элемент $b+1 \neq 1$. Предположим, что $b+1 \in A$, то есть $b + 1 + 1 = 1$. Если $1 + 1 = 1$, то $1 = b + 1 + 1 = b + 1 \neq 1$, противоречие. Если же $1 + 1 = s \neq 1$, то $b + s = b + 1 + 1 = 1$, что также невозможно, так как $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S. Таким образом, $1 + B \in B$.

Итак, имеем $1 + A = \{1\}, A + A \subseteq A, AA \subseteq A, B + S \subseteq B$.

(2) По пункту (4) теоремы 1 имеем $e = 2$, откуда $e + 1 = 1$. Значит, $S \setminus \{1\}$ является идемпотентным подполукольцом в S, и по лемме 8 на S для всех $x, y \in S \setminus \{1\}$ выполняется равенство (**).

Пусть $a \in A, b \in B$, то есть $a + 1 = 1, b \neq 1 \neq b + 1$. Если $ab + 1 = 1$, то, учитывая (**), получаем $1 = 1 + a + ab = 1 + a + b = 1 + b \neq 1$, противоречие. Значит, $AB \subseteq B$.

Пусть теперь $b, b' \in B$. Предположим, что $bb' + 1 = 1$. Тогда $b = b \cdot 1 = b(bb' + 1) = b + bb'$. Из равенства (**) получаем $1 + bb' + b = 1 + bb' + b \cdot bb'$, откуда $1 = 1 + bb' = 1 + b + bb' = 1 + b \neq 1$, противоречие. Стало быть, $BB \subseteq B$.

Таким образом, учитывая пункт (1), τ является конгруэнцией на S, причем τ разделяющей элементы 1 и e. Значит, $\tau = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$. $\square$

Теорема 2. *Полукольца $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{B} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$ исчерпывают — с точностью до изоморфизма — все подпрямо неразложимые полукольца многообразия $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое полукольцо из $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $2 = 1$, то есть S идемпотентно.

1.1) Предположим, что $1 + e = 1$. По лемме 9 ${}_e\!\sim$ будет конгруэнцией на S, причем $e \,{}_e\!\nsim 1$, поэтому ${}_e\!\sim = \mathbf{0}_S$. Таким образом для всех $x, y \in S$ справедлива импликация $x + e = y + e \Rightarrow x = y$. Тогда для всякого $x \in S$ выполняется $x + e = x$, так как $x + e = x + e + e$.

Рассмотрим произвольные элементы $s, t \in S \setminus \{1, e\}$. Заметим, что $1 + s \notin$ $\notin \{1, e\}$, иначе $s = s + s = e$. Далее, заметим, что если $s + t \in \{1, e\}$, то $s + t + 1 = 1$, в силу $1 + 1 = 1 + e = 1$. Так как $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S, то должно выполняться $1 + s = 1$ и $1 + t = 1$, что, как показано выше, невозможно. Значит, $s + t \notin \{1, e\}$.

Если $|S| = 2$, то $S \cong \mathbb{B}$. Если же $|S| \geqslant 3$, то разбиение $\tau_{S\setminus\{1,e\}}$ является конгруэнцией на S. Значит, $\tau_{S\setminus\{1,e\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{B} \cup \{\infty\}$.

1.2) Пусть $1 + e \neq 1$. Тогда $e + 1 = e(e + 1) = e + e = e$. По лемме 9 отношение ${}_1\!\sim$ является конгруэнцией на S, при этом $e \,{}_1\!\nsim 1$. Значит, ${}_1\!\sim = \mathbf{0}_S$ и элемент 1 аддитивно сократим. По лемме 4 S — моно-полукольцо, поэтому $S \cong \mathbb{D}$.

2. Пусть $3 = 2 \neq 1$.

2.1) Предположим, что $2 = e$. Тогда $e + 1 = 3 = 2 = e$. Если для любого $x \in S\setminus\{1\}$ выполняется $x + 1 \in S\setminus\{1\}$, то разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$.

Пусть теперь существует $a \in S \setminus \{1, e\}$, такой, что $a + 1 = 1$. Тогда $a + e = e, a + a = a$ и, по замечанию 2, подполукольцо $\{a, 1, 2\} \cong \mathbb{T} \cup \{0\} \notin \mathfrak{N}$. Противоречие.

2.2) Пусть $2 \notin \{1, e\}$. Тогда $e + e = e + 1 = 2 = e + 2$. Если для любого $x \in S \setminus \{1\}$ выполняется $x + 1 \neq 1$, то разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, откуда $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$.

Если же существует $a \notin \{1, e\}$, такой, что $a + 1 = 1$, то тогда $a + e = e, a + a =$ $= a, a + 2 = 2$, и подполукольцо $\{a, 1, 2, e\} \notin \mathfrak{N}$, так как в нем не выполняется (*). Противоречие.

3. Пусть $3 \neq 2$. Тогда $3 = 1$ по пункту (4) теоремы 1. Если $|S| = 2$, то $S \cong \mathbb{Z}_2$. Если же $|S| \geqslant 3$, то по лемме 10 (2) $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$. □

Следствие 3. *Произвольное полукольцо $S \in \mathfrak{N}$ будет подпрямым произведением некоторого семейства полуколец $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{B} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.*

Следствие 4. *В классе $\mathfrak{M}$ многообразие $\mathfrak{N}$ задается одним тождеством* $(*)$.

Теорема 3. *Решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ является 16-элементной булевой решеткой.*

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}(\mathbb{B} \cup \{\infty\}) = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D})$ и $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}) =$ $= \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D})$. Поэтому в силу теоремы 2 любое подмногообразие в $\mathfrak{N}$ определяется подмножеством множества $M = \{\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}.\}$ При этом, как легко видеть, разные подмножества в M порождают разные многообразия. Стало быть, решетка $L(\mathfrak{N})$ подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ будет 16-элементной булевой решеткой. Наименьшим элементом в $L(\mathfrak{N})$ является тривиальное многообразие, наибольшим — само $\mathfrak{N}$. Многообразия $\mathfrak{M}(\mathbb{B}), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2), \mathfrak{M}(\mathbb{D}), \mathfrak{M}(\mathbb{T})$ — атомы в $L(\mathfrak{N})$, многообразия $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}), \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}), \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T}), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$ — коатомы. □

Замечание 3. Теорема 3 может быть также выведена из одного результата Б. М. Верникова и М. В. Волкова [1]. Действительно, легко видеть, что многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D})$ удовлетворяет следующему условию: в каждой алгебре многообразия у каждой нетривиальной конгруэнции есть неодноэлементный класс, являющийся подалгеброй. Поэтому по [1, теорема] решетка подмногообразий этого многообразия является 8-элементной булевой решеткой. Решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})$ будет прямым произведением 8-элементной булевой решетки и двухэлементной цепи, то есть 16-элементной булевой решеткой.

Предложение 11. *Для всякого полукольца $S \in \mathfrak{M}$ имеют место следующие утверждения:*

1. $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$ *обладает тождеством* $x + 2xy = 3x$;
2. $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$ *дистрибутивно* $\Leftrightarrow S \in \mathfrak{N}$ *и удовлетворяет тождеству* $3x = 2x$;
3. $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$ *обладает тождеством* $x + 2xy = 3xy$;
4. $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}) \Leftrightarrow S \in \mathfrak{N}$ *и* S *удовлетворяет тождеству* $3x = x$.

Доказательство. (1) Ясно, что полукольцо $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ удовлетворяют тождеству $x + 2xy = 3x$, а оно, в свою очередь, влечет тождество (*), но неверно на $\mathbb{D}$. Остается применить теорему 3.

Утверждения (2)–(4) доказываются аналогичным образом. Только надо показать, что тождество (*) выполняется в любом дистрибутивном полукольце $S \in \mathfrak{M}$. Для этого заметим, что в S выполняется тождество $x + xy = x + 3xy$, а из двойственного закона дистрибутивности получаем $x + yz = (x + y)(x + z) = x+xy+xz+yz$. Откуда $x+2xy+yz = x+3xy+xz+yz = x+xy+xz+yz = x+yz$. Поэтому и $x + 2xz + yz = x + yz$. □

Замечание 4. Мы видим, что многообразие $\mathfrak{N}$ содержит четыре подмногообразия с идемпотентным тождеством $x + x = x$: тривиальное, $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D})$. Как показано в [15] в многообразии $\mathfrak{M}$ существует еще одно «идемпотентное» подмногообразие — многообразие всех коммутативных идемпотентных полуколец. Оно совпадает с $\mathfrak{M}(\mathbb{D} \cup \{\infty\})$ и строго содержит $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D})$.

В заключение отметим, что в классе полуколец $\mathfrak{M}$ каждое тождество, из которого вытекает тождество (*), задает одно из 16 подмногообразий в $\mathfrak{N}$ в силу теоремы 3. Приведем несколько примеров.

1. Во всяком полукольце $S \in \mathfrak{M}$ тождество (*) эквивалентно любому из следующих тождеств:

$$x + 2xy + xyz = x + 2xz + xyz,$$

$$x + 2xy + 2xyz = x + 2xz + 2xyz,$$

определяющих многообразие $\mathfrak{N}$. Однако тождество (*) не равносильно ни одному из тождеств $2x+2xy+2yz = 2x+2xz+2yz$ и $2x+2xy+2xyz = 2x+2xz+2xyz$. В самом деле, полукольцо $(\mathbb{T}\cup\{0\})\cup\{\infty\} \notin \mathfrak{N}$, но в нем выполняются указанные тождества.

2. В многообразии $\mathfrak{M}$ каждое из тождеств

$$x + xy + yz = x + xz + yz,$$

$$x + yz = x + xy + yz$$

равносильно двойственному закону дистрибутивности, то есть любое из этих тождеств определяет многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T})$.

3. В классе $\mathfrak{M}$ тождество $3x = 3y$ равносильно каждому из тождеств $x+y = x + z, x + y = u + v$ и определяет многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$.

4. Заключение

В работе изучено многообразие $\mathfrak{N}$, порожденное двухэлементными коммутативными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Описаны подмногообразия в $\mathfrak{N}$. Показано, что в классе $\mathfrak{M}$ всех полуколец с коммутативным идемпотентным умножением многообразие $\mathfrak{N}$ задается одним тождеством $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$, и что решетка всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ будет 16-элементной булевой решеткой.

Сформулируем несколько задач для дальнейшего исследования:

1. описать подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$;
2. изучить свободные мультипликативно идемпотентные полукольца с конечным числом свободных образующих;
3. построить теорию полумодулей над мультипликативно идемпотентными полукольцами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верников Б. М., Волков М. В. Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий // Изв. вузов. Математика. 1982. №11. С. 17–20.

2. Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. Киров: Изд-во ВГПУ, 2000. 44 с.

3. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Некоторые многообразия коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец // Современные проблемы математики и ее приложений: труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посв. 75-летию В. И. Бердышева. Екатеринбург, 2014. С. 10–12.

4. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О многообразии полуколец с идемпотентным умножением // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. памяти В.П. Шункова. Красноярск, 2013. С. 33–34.

5. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О подмногообразиях многообразия полуколец с полурешеточным умножением // Алгебра и математическая логика: теория и приложения: матер. Междунар. конф. Казань, 2014. С. 155–156.

6. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О подпрямо неразложимых коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольцах // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. Саратов, 2013. С. 14–15.

7. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О полукольцах с полурешеточным умножением // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: материалы XII Международной конф., посв. 80-летию проф. В. Н. Латышева. Тула, 2014. С. 154–157.

8. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Полукольца с коммутативным идемпотентным умножением // Математика в современном мире: материалы Международной конференции, посв. 150-летию Д. А. Граве. Вологда, 2013. С. 10–11.

9. Кон П. Универсальная алгебра // М.: Мир, 1968. 351 с.

10. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

11. Петров А. А. Полукольца с условиями идемпотентности // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 118–129.

12. Chermnykh V. V. Functional representations of semirings // Journal of Math. Sci. (New York), 2012. Vol. 187, №2. P. 187–267.

13. Ghosh S. A characterization semirings which subdirect products of rings and distributive lattices // Semigroup Forum, 1999. Vol. 59. P. 106–120.

14. Kalman J. A. Subdirect decomposition of distributive quasilattices // Fund. Math., 1971. Vol. 71. P. 161–163.

15. McKenzie R., Romanowska A. Varieties of $\wedge$-distributive bisemilattices // Contrib. Gen. Algebra: Proc. Klagefurt Conf. Klagefurt, 1979. P. 213–218.

16. Romanowska A. On bisemilattices with one distributive law // Algebra universalis. 1980. Vol. 10. P. 36–47.

Вятский государственный гуманитарный университет (г. Киров)
Поступило 18.07.2014