В. Г. Журавлев, Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 322, 83–106

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

В. Г. Журавлев

РАЗБИЕНИЯ РОЗИ И МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА НА ТОРЕ

Введение

С помощью конструкции [1] для тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \mod \mathbb{Z}^2$ строится согласованная последовательность разбиений Рози (Rauzy)

$$d^0 \supset d^1 \supset \ldots \supset d^m \supset \ldots$$

уровней m, в которой каждое разбиение d^{m+1} получается делением тайлов из предыдущего разбиения d^m.

Обозначим θ число Пизо, являющееся вещественным корнем уравнения

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$$

и определим сдвиг

$$S(x) = x + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}^2$$

тора $\mathbb{T}^2$, где $\zeta = \theta^{-1}$. В теореме 4.1 доказано, что разбиения d^m согласованы с S: действие сдвига S на разбиение d^m сводится к перекладыванию трех его базисных тайлов, разбивающих область $B^m d$, где $d = d^0$ – нулевое развиение и $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1-\zeta^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}$. Показано, что ограничение $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ сдвига S на подмножество $B^m d \subset \mathbb{T}^2$ (индуцированное отображение или отображение первого возвращения) снова является сдвигом тора, аффинно изоморфного исходному сдвигу S. Последнее свойство означает, что d^m – бесконечно дифференцируемые разбиения единичного периода.

С кубическим числом Пизо θ связаны числа Трибоначчи T_m, определяемые рекуррентным соотношением

$$T_{m+3} = T_{m+2} + T_{m+1} + T_m.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00368).

В п. 3 доказывается, что разбиения Рози d^m также удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$d^{m+3} = Bd^{m+2} + (z + B^2 d^{m+1}) + (z + Bz + B^3 d^m), \qquad (1)$$

где справа в равенстве (1) записано разбиение на три множества, а в скобках указаны множества, полученные сдвигом на вектор $z = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$ и $z + Bz$ соответственно.

Аналогичное рекуррентное соотношение для разбиений Фибоначчи f^m единичной окружности $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \mod \mathbb{Z}$ получено в [2]

$$f^{m+2} = \tau^{-1} \cdot f^{m+1} + (\tau^{-1} + \tau^{-2} \cdot f^m), \qquad (2)$$

где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – квадратичное число Пизо (золотое сечение), являющееся корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Для сравнения заметим, что с τ связаны числа Фибоначчи F_m, удовлетворяющие рекуррентному соотношению второго порядка

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m.$$

Пусть X – некоторое подмножество тора $\mathbb{T}^2$ и

$$Z_N(X) = \sharp\{i : S^i(0) \in X, 1 \leq i \leq N\}$$

– количество возвращений начальной точки 0 в X. Если в качестве X выбрать множество $B^m d$, то для $Z_N(B^m d)$ имеет место следующая явная формула (теорема 5.1)

$$Z_N(B^m d) = \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N}, \qquad (3)$$

где $\overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N}$ обозначает число, полученное из N m-кратным сдвигом влево в системе счисления T_n. При этом для отклонения

$$r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$$

при всех уровнях $m = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5. \qquad (4)$$

Поскольку, как уже было отмечено, индуцированное отображение $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ является сдвигом тора, то по критерию Рози [3] для любого m имеем

$$\sup_N |r_N(B^m d)| < \infty.$$

Малость величины отклонения $r_N(B^m d)$ (4) указывает на глубокую связь арифметических свойств числа Пизо θ с геометрией границы $\partial\bar{d}$ области Рози d [4, 5, 6, 7]. Граница $\partial\bar{d}$ представляет собой фрактальную развертку тора $\mathbb{T}^2$. В одномерном случае $\mathbb{T}^1$ указанная связь рассмотрена в [2, 8], а условия ограниченности остатка были впервые найдены в [9, 10].

Пусть $N = N_{N'}(B^m d)$ – это время N'-го возвращения начальной точки $0 \in \mathbb{T}^2$ в область $B^m d$. Тогда в теореме 6.1 доказано, что $N_{N'}(B^m d)$ вычисляется по формуле

$$N_{N'}(B^m d) = \overset{\overset{m}{\rightarrow}}{N'}$$

где $\overset{\overset{m}{\rightarrow}}{N'}$ обозначает m-кратный сдвиг вправо числа N' в системе счисления Трибоначчи T_n. Как следствие, из последней формулы для перенормировок получается следующая оценка

$$|N_{N'}(B^m d) - \theta^m N'| < 2\theta^m,$$

справедливая для всех $m, N' = 0, 1, 2, \ldots$

Развертка тора $\partial\bar{d}$ строится с помощью инвариантной калибровочной последовательности $u = 1213121\ldots$ Данная последовательность является самоподобной и получается из 1 с помощью подстановки

$$\Pi(1) = 12, \Pi(2) = 13, \Pi(3) = 1.$$

Поскольку, согласно формуле (3), разностная функция

$$\chi_{B^m d}(N) = \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N} - (\overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{\overline{N-1}})$$

принимает значения 1, если точка $N\begin{pmatrix}\zeta\\ \zeta^2\end{pmatrix}$ принадлежит области $B^m = d$, и равна 0 в противном случае, то границу $\partial\overline{B^m d}$ можно строить с помощью системы счисления T_n, минуя подстановку Π.

1. T-система счисления и связанные с ней разбиения

1.1. T-система счисления. Числа Трибоначчи T_n определяются рекуррентным соотношением

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \tag{5}$$

для $n \geq 0$ и начальными условиями $T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$. Так как выполняется неравенство

$$T_{n+1} \leq 2T_n$$

для всех $n \geq 0$, то любое N из множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ можно единственным способом разложить в конечную сумму

$$N = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N)\, T_n,$$

где коэффициенты $\varepsilon_n(N) = 0$ или 1 удовлетворяют условию (закон сокращения)

$$\varepsilon_k(N)\varepsilon_{k+1}(N)\varepsilon_{k+2}(N) = 0 \tag{6}$$

для любого $k \geq 0$. Если $N = 0$, то полагаем $\varepsilon_n(N) = 0$ для всех $n \geq 0$.

Отображение

$$\mathbb{N} \overset{\varepsilon}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} E : N \longmapsto \varepsilon(N) = (\varepsilon_0(N), \varepsilon_1(N), \dots) \tag{7}$$

устанавливает биекцию между множеством неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$ и множеством E последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ из элементов $\varepsilon_n = 0$ или 1 с ограничением (6) и с конечным числом элементов $\varepsilon_n = 1$.

1.2. E-разбиения уровня m. Приведем несколько способов построения разбиений множества последовательностей E.

Способ 1 использует E-координаты. Разбиение

$$E^m = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}^m} E_R^m(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in \bar{J}^m} E_G^m(\bar{j}) + \sum_{\bar{k} \in \bar{K}^m} E_B^m(\bar{-k}) \tag{8}$$

состоит из тайлов $E_R^m(\bar{i})$, $E_G^m(\bar{j})$, $E_B^m(\bar{k})$ с E-координатами

$$\bar{i} = (\underbrace{\dots}_{m} 0), \quad \bar{j} = (\underbrace{\dots}_{m} 10), \quad \bar{k} = (\underbrace{\dots}_{m} 11)$$

– последовательностями из E длины $m+1$, $m+2$, $m+2$ соответственно. Тайлы имеют вид

$$\begin{aligned} E_R^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E :\ \varepsilon|_{m+1} = \bar{i}\}, \\ E_G^m(\bar{j}) &= \{\varepsilon \in E :\ \varepsilon|_{m+2} = \bar{j}\}, \\ E_K^m(\bar{k}) &= \{\varepsilon \in E :\ \varepsilon|_{m+2} = \bar{k}\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\varepsilon|_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ – начало последовательности ε длины n.

Способ 2 использует подстановки (инфляцию $E^m \longmapsto E^{m+1}$)

$$E_R^m(\bar{i}) = E_{RR}^m(\bar{i}) + E_{RG}^m(\bar{i}) + E_{RB}^m(\bar{i}), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} E_{RR}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) :\ \varepsilon|_{m+2} = (\bar{i}\,0\ )\}, \\ E_{RG}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) :\ \varepsilon|_{m+3} = (\bar{i}\,10)\}, \\ E_{RB}^m(\bar{i}) &= \{\varepsilon \in E_R^m(\bar{i}) :\ \varepsilon|_{m+3} = (\bar{i}\,11)\}. \end{aligned}$$

Тогда тайлы разбиения E^{m+1} получаются переименовкой и делением тайлов разбиения E^m следующим образом:

$$\begin{aligned} E_R^{m+1}(\bar{i}) &= \begin{cases} E_{RR}^m(\bar{i}_m) & \text{для } \bar{i} = (\bar{i}_m\ 0) \in \overline{I}^{m+1}, \bar{i}_m \in \overline{I}^m, \\ E_G^m(\bar{i}) & \text{для } \bar{i} \in \overline{J}^m \subset \overline{I}^{m+1}; \end{cases} \\ E_G^{m+1}(\bar{j}) &= \begin{cases} E_{RG}^m(\bar{i}_m) & \text{для } \bar{j} = (\bar{i}_m\ 10) \in \overline{J}^{m+1}, \bar{i}_m \in \overline{I}^m, \\ E_B^m(\bar{j}_m) & \text{для } \bar{j} = (\bar{j}_m\ \ 0) \in \overline{J}^{m+1}, \bar{j}_m \in \overline{K}^m; \end{cases} \\ E_B^{m+1}(\bar{k}) &= \ E_{RB}^m(\bar{i}_m) \quad \text{для} \quad \bar{k} = (\bar{i}_m\ 11) \in \overline{K}^{m+1}, \bar{i}_m \in \overline{I}^m. \end{aligned} \tag{11}$$

Разбиение нулевого уровня E^0 имеет вид (8)

$$E^0 = E_R^0(0) + E_G^0(10) + E_B^0(11).$$

Определим на множестве последовательностей E некоммутативную операцию прикладывания ($\oplus$-сумма)

$$\varepsilon \oplus \varepsilon' = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$$

в случае, если последовательность справа обладает свойством (6). Тогда множество E-координат удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \overline{I}^{m+1} &= \overline{I}^m \oplus (0\ ) \ \cup\ \overline{J}^m, \\ \overline{J}^{m+1} &= \overline{I}^m \oplus (10) \ \cup\ \overline{K}^m \oplus (0), \\ \overline{K}^{m+1} &= \overline{I}^m \oplus (11) \end{aligned} \tag{12}$$

для уровней $m \geq 0$, при этом полагаем $\overline{I}^0 = \{(0)\}$, $\overline{J}^0 = \{(10)\}$, $\overline{K}^0 = \{(11)\}$.

Определим на множестве последовательностей E еще две операци: сдвиг вправо (мультипликативный сдвиг)

$$E \xrightarrow{B} E: \quad \varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \longmapsto \overrightarrow{\varepsilon} = B(\varepsilon) = (0, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \qquad (13)$$

и операцию сложения

$$\varepsilon \dot{+} \varepsilon' = \varepsilon(N + N'),$$

индуцированную, в силу биекции (7), операцией сложения целых чисел $N, N' \in \mathbb{N}$, отвечающих последовательностям $\varepsilon, \varepsilon'$.

Способ 3 построения E-разбиений основан на использовании E-рекуррентного соотношения (ср. с соотношением 5 для чисел Трибоначчи T_n)

$$E^{m+3} = BE^{m+2} + [(1) \dot{+} B^2E^{m+1}] + [(11) \dot{+} B^3E^m] \qquad (14)$$

для $m \geq 0$, при этом начальные разбиения E^0, E^1, E^2 определены в (8).

Если на множестве E дополнительно определить аддитивный сдвиг

$$E \xrightarrow{S} E: \quad \varepsilon \longmapsto S(\varepsilon) = \varepsilon \dot{+} (1), \qquad (15)$$

то рекуррентные соотношения (14) можно переписать в виде

$$E^{m+3} = BE^{m+2} + SB^2E^{m+1} + S^3B^3E^m, \qquad (16)$$

где отображения B (13) и S (15) не коммутируют друг с другом (подробнее см. теорему 1.1).

1.3. Глобальные координаты. С помощью биекции (7) отождествим множества E-координат тайлов из разбиения E^m (8) с множествами $\mathbb{N}$-номеров или координат

$$I^m = \varepsilon^{-1}(\overline{I}^m), \ J^m = \varepsilon^{-1}(\overline{J}^m), \ K^m = \varepsilon^{-1}(\overline{K}^m)$$

соответствующих тайлов

$$E_R^m(i) = E_R^m(\bar{i}), \ E_G^m(j) = E_G^m(\bar{j}), \ E_B^m(k) = E_B^m(\bar{k}),$$

где $\bar{i} = \varepsilon(i)$ и т.д. Тогда множества $\mathbb{N}$-координат удовлетворяют рекуррентному соотношению (12). Отсюда получаем

$$I^m = [0, T_m), \quad J^m = [T_m, T_{m+1}), \quad K^m = [T_{m+1} + T_m, T_{m+2}), \qquad (17)$$

где полуинтервал $[T, T')$ состоит из целых чисел $T, T+1, \ldots, T'-1$. Из (5) следует, что множества I^m, J^m, K^m содержат соответственно количество номеров

$$T_{m,R} = T_m, \quad T_{m,G} = T_{m-1} + T_{m-2}, \quad T_{m,B} = T_{m-1}, \tag{18}$$

где $m \geq 0$ и $T_{-2} = 0$, $T_{-1} = 1$.

Введем обозначения

$$i_0 = i, \quad j_0 = j - T_m, \quad k_0 = k - T_{m+1} - T_m. \tag{19}$$

Тогда разбиение E^m (8) можно переписать в виде

$$E^m = \sum_{i \in I^m} E_R^m(i) + \sum_{j \in J^m} E_G^m(j) + \sum_{k \in K^m} E_B^m(k), \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} E_R^m(i) &= \bar{i}_0 \dotplus E_R^m(0) = S^{i_0} E_R^m(0), \\ E_G^m(j) &= \bar{j}_0 \dotplus E_G^m(T_m) = S^{j_0} E_G^m(T_m), \\ E_B^m(k) &= \bar{k}_0 \dotplus E_B^m(T_{m+1} + T_m) = S^{k_0} E_B^m(T_{m+1} + T_m) \end{aligned} \tag{21}$$

Формулы (21) дают основание назвать номера i, j, k глобальными координатами тайлов $E_R^m(i)$, $E_G^m(j)$, $E_B^m(k)$.

1.4. Индуцированное отображениие $S^{(m)}$. Из (20), (21) вытекает инвариантность или согласованность разбиений E^m относительно действия сдвига S (15):

$$SE^m \overset{\text{a.e.}}{=} E^m \backslash W^m + W'^m, \tag{22}$$

где

$$W^m = E_R^m(0) + E_G^m(T_m) + E_B^m(T_{m+1} + T_m),$$

$$W'^m = E_R^m(T_m) + E_G^m(T_{m+1}) + E_B^m(T_{m+2}),$$

и равенство $\overset{\text{a.e.}}{=}$ означает совпадение множеств за исключением, может быть, конечного числа элементов. В последнем разбиении W'^m тайлы соответственно равны

$$\begin{aligned} E_R^m(T_m) &= S^{T_{m,R}} E_R^m(0), \\ E_G^m(T_{m+1}) &= S^{T_{m,G}} E_G^m(T_m), \\ E_B^m(T_{m+2}) &= S^{T_{m,B}} E_B^m(T_{m+1} + T_m). \end{aligned} \tag{23}$$

Если не учитывать разбиения множеств, то можем записать

$$B^m E = W^m \overset{\text{a.e.}}{=} W'^m, \quad W'^m \subset W^m, \tag{24}$$

где B – сдвиг вправо на множестве E. Заметим, что в равенстве (22) разбиения W^m, W'^m индуцированы разбиением нулевого уровня E^0 (8):

$$W^m = B^m E^0, \quad W'^m = B^m S E^0. \tag{25}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ S\ } & E \\ {\scriptstyle B^m}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle B^m} \\ B^m E & \xrightarrow{S^{(m)}} & B^m E \end{array} \tag{26}$$

где $S^{(m)} = S|_{B^m E}$ – производное отображение от S на подмножестве $B^m E \subset E$. Отображение $S^{(m)}$ также называют индуцированным или отображением первого возвращения. Существование индуцированного отображениия $S^{(m)}$ вытекает из (22) и (24).

Теорема 1.1. *Диаграмма* (26) *коммутативна, т.е. выполняется равенство*

$$B^m S = S^{(m)} B^m.$$

Сдвиг S (15) *и его производное отображение* $S^{(m)}$ *связаны следующими соотношениями*

$$S^{(m)}(\varepsilon) = \begin{cases} S^{T_{m,R}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E^m_R(0), \\ S^{T_{m,G}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E^m_G(T_m), \\ S^{T_{m,B}}(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon \in E^m_B(T_{m+1} + T_m), \end{cases}$$

где степени $T_{m,R}$, $T_{m,G}$, $T_{m,B}$ *определены в* (18).

Доказательство вытекает из равенств (20)–(26). □

Кроме сдвига вправо B (13), на множестве последовательностей E можно соответственно определить и сдвиг влево

$$E \xrightarrow{B^{-1}} E: \quad \varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) \longmapsto \overleftarrow{\varepsilon} = B^{-1}(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots).$$

По теореме 1.1 для производного отображения $S^{(m)}$ из диаграммы (26) получаем формулу

$$S^{(m)}(\varepsilon) = B^m S B^{-m}(\varepsilon) \tag{27}$$

сопряжения $S^{(m)}$ с аддитивным сдвигом S (15) на подмножестве $B^m E \subset E$.

2. $\mathbb{N}$-РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ

2.1. $\mathbb{N}$-разбиения. С помощью биекции $\mathbb{N} \overset{\varepsilon}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} E$ (7) разбиениям E^m (8) можно сопоставить разбиения

$$\mathbb{N}^m = \sum_{i\in I^m} \mathbb{N}^m_R(i) + \sum_{j\in J^m} \mathbb{N}^m_G(j) + \sum_{k\in K^m} \mathbb{N}^m_B(k) \qquad (28)$$

множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$, на котором также определен оператор сдвига $S(N) = N + 1$. Очевидно, что $S-$орбитой $0 \in \mathbb{N}$ является все множество $\mathbb{N}$. Поэтому существуют все производные преобразования

$$S|_X, \quad \text{где} \quad X = \mathbb{N}^m_R(i), \quad \mathbb{N}^m_G(j) \quad \text{или} \quad \mathbb{N}^m_B(k)$$

– один из тайлов в разбиении $\mathbb{N}^m$ (28). При этом любой тайл X состоит из одной орбиты относительно соответствующей производной $S|_X$ и начальная точка орбиты – это одновременно и номер тайла X. Элементы тайла X линейно упорядочены и индуцированный отображением $S|_X$ порядок $<|_X$ согласован с порядком $<$ на множестве $\mathbb{N}$. Тем самым, элементы их из X имеют свой порядковый $S|_X$-номер N', а также – первоначальный номер $N \in \mathbb{N}$.

2.2. Перенормировки и количество возвращений.
Отображение

$$N' \overset{X}{\longmapsto} N$$

называется перенормировкой элементов тайла X.

Предложение 2.1. *Для тайлов $\mathbb{N}^m_R(i)$, $\mathbb{N}^m_G(j)$, $\mathbb{N}^m_B(k)$ разбиения $\mathbb{N}^m$ (28) соответствующие перенормировки имеют вид*

$$N = i + B^{m+1}N', \quad N = j + B^{m+2}N', \quad N = k + B^{m+3}N'. \qquad (29)$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$ принадлежит одному из тайлов $\mathbb{N}^m_R(i)$, $\mathbb{N}^m_G(j)$ или $\mathbb{N}^m_B(k)$. Тогда, согласно определению E-координат (8), имеют место соответственно разложения

$$\overline{N} = \overline{i} \oplus \overline{N}', \quad \overline{N} = \overline{j} \oplus \overline{N}', \quad \overline{N} = \overline{k} \oplus (0) \oplus \overline{N}'. \qquad (30)$$

Теперь переход от E-последовательностей к числам (29) осуществляется с помощью оператора сдвига B (13). □

Пусть элементы $x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots$ некоторого тайла X из разбиения $\mathbb{N}^m$ (28) расположены в порядке возрастания. Обозначим

$$Z_N(X) = \sharp\{i:\ x_i \leq N,\ i > 0\}$$

– количество возвращений в тайл X начальной точки x_0 под действием сдвига S. Как отмечалось, начальными точками x_0 в тайлах $\mathbb{N}^m_R(i)$, $\mathbb{N}^m_G(j)$, $\mathbb{N}^m_B(k)$ являются их номера i, j, k, что согласуется с формулами перенормировок (29) (нужно в формулах (29) выбрать $N' = 0$).

Отсюда и из разложений (20) вытекает

Предложение 2.2. *Для количества возвращений начальной точки в тайлы из разбиения $\mathbb{N}^m$ (28) под действием сдвига $S:\ N \mapsto N+1$ выполняются следующие явные формулы*

$$Z_N(\mathbb{N}^m_R(i)) = B^{-(m+1)}(N-i) = (\overset{\overset{m+1}{\longleftarrow}}{N-i}),$$

$$Z_N(\mathbb{N}^m_G(j)) = B^{-(m+2)}(N-j) = (\overset{\overset{m+2}{\longleftarrow}}{N-j}),$$

$$Z_N(\mathbb{N}^m_B(k)) = B^{-(m+3)}(N-k) = (\overset{\overset{m+3}{\longleftarrow}}{N-k}),$$

при этом сдвиги B^{-m} на множестве $\mathbb{N}$ определены равенством

$$B^{-m}(N) = \varepsilon^{-1}B^{-m}\varepsilon(N),$$

где ε – биекция (7). □

Замечание 2.1. С помощью биекции $\varepsilon:\ \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$ все утверждения предложений 2.1 и 2.2 могут быть соответствующим образом переформулированы для разбиений E^m (8) множества последовательностей E. Введение разбиений $\mathbb{N}^m$ (28) обусловлено тем обстоятельством, что определения и доказательства упрощаются, если использовать разбиения целых чисел $\mathbb{N}$.

3. Конструкция Рози

3.1. Калибровочная последовательность. Пусть $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ – конечный алфавит и $\mathcal{A}^{fin}$ – множество конечных последовательностей (слов) в алфавите $\mathcal{A}$. Зададим на $\mathcal{A}$ подстановку Трибоначчи [1]

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{A}^{fin}:\ \Pi(1) = 12,\ \Pi(2) = 13,\ \Pi(3) = 1$$

и продолжим Π на множество последовательностей $\mathcal{A}^{fin}$, полагая

$$\mathcal{A}^{fin} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{A}^{fin} : \ v = v_1 \dots v_m \mapsto \Pi(v) = \Pi(v_1) \dots \Pi(v_m)$$

и $\Pi(\varnothing) = \varnothing$ для пустого слова. Аналогично продолжаем Π на $\mathcal{A}^{\infty}$ – множество всех конечных и бесконечных последовательностей: если $v = v_1 \dots v_m \dots$ принадлежит $\mathcal{A}^{\infty}$, то $\Pi(v) = \Pi(v_1) \dots \Pi(v_m) \dots$ Подстановка Π имеет единственную неподвижную последовательность

$$u = 12131211213\dots = u_1 u_2 u_3 \dots \tag{31}$$

Назовем u калибровочной последовательностью. Мотивировкой для этого является то обстоятельство, что с помощью последовательности u обмотка тора удерживается в компактной области.

Начальные подпоследовательности из u длины $N = 0, 1, 2, \dots$ обозначим

$$U_N = u_1 u_2 \dots u_N \tag{32}$$

для $N \geq 1$ и $U_0 = \varnothing$. Для $v = v_1 \dots v_m$ из $\mathcal{A}^{fin}$ и $k = 1, 2, 3$ из $\mathcal{A}$ пусть

$$r(v) = \begin{pmatrix} r_1(v) \\ r_2(v) \\ r_3(v) \end{pmatrix}$$

где $r_k(v)$ равно количеству букв $v_i = k$ в последовательности v.

3.2. Подстановка Π и числа Трибоначчи. Подстановка Π действует на столбец $r(v)$ по следующему правилу

$$r(\Pi(v)) = A \cdot r(v), \quad \text{где} \ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие из приведенной формулы, для $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$r(\Pi^n(v)) = A^n \cdot r(v), \tag{33}$$

где $\Pi^n(v) = \Pi(\dots(\Pi(v))$ – $n-$раз. Подстановочная матрица A задает

$$\begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

последовательность чисел Трибоначчи T_n, также определяемую рекуррентным соотношением (5). Характеристический многочлен матрицы A равен

$$Ch_A(x) = x^3 - x^2 - x - 1,$$

он имеет один вещественный корень $\theta \approx 1.8392$ и два комплексно сопряженных корня $\alpha, \overline{\alpha}$. Так как $\theta > 1$ и $|\alpha|^2 = \frac{1}{\theta}$, то $|\alpha| = |\overline{\alpha}| < 1$ и, следовательно, θ – число Пизо. Для него обратное число $\zeta = \frac{1}{\theta} \approx 0.5436$ удовлетворяет соотношению

$$\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 = 1. \tag{34}$$

3.3. Отклонения. Для последовательности $v \in \mathcal{A}^{fin}$ определим отклонения

$$\Delta_k(v) = \zeta^k l(v) - r_k(v)$$

где $k = 1, 2, 3$ и $l(v) = r_1(v) + r_2(v) + r_3(v)$ – длина последовательности v. Из общей теории подстановок следует ограниченность отклонений

$$|\Delta_k(\Pi^n(v))| \leq c_{v,k} < \infty$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Согласно (34) отклонения $\Delta_k(v)$ удовлетворяют линейному соотношению

$$\Delta_1(v) + \Delta_2(v) + \Delta_3(v) = 0.$$

Поэтому поведение отклонений $\Delta_k(v)$ полностью описывается вектор-столбцом

$$\Delta(v) = \begin{pmatrix} \Delta_1(v) \\ \Delta_2(v) \end{pmatrix} = l(v) \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(v) \\ r_2(v) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\Delta(v)$ – собственный вектор для подстановки Π:

$$\Delta(\Pi(v)) = B \cdot \Delta(v), \tag{35}$$

где матрица $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен

$$Ch_B(x) = x^2 + (\zeta + \zeta^2)x + \zeta.$$

Из уравнения (34) для него вытекает разложение

$$Ch_B(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}),$$

где

$$\alpha, \overline{\alpha} = \frac{-(\zeta + \zeta^2) \pm i\sqrt{d}}{2} \tag{36}$$

и $d = \zeta^2 + 4\zeta - 1 > 0$.

Для отклонения $\Delta(v)$ в случае последовательности $v = U_N$ (32) введем специальное обозначение

$$\delta(N) = \Delta(U_N) = N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(U_N) \\ r_2(U_N) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Тогда

$$\delta(N) \equiv N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}^2 \tag{38}$$

для $N = 0, 1, 2, \ldots$ и поэтому отображение $N \mapsto \delta(N)$ задает обмотку тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \mod \mathbb{Z}^2$, получающуюся сдвигом нулевой точки на вектор $\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \equiv z \mod \mathbb{Z}^2$, где

$$z = \delta(1) = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

3.4. Собственные последовательности. Последовательности $v = \Pi^n(1)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\Pi^0(1) = 1$, назовем собственными последовательностями из $\mathcal{A}^{fin}$. Из равенств

$$\Pi^3(1) = \Pi^2(1)\Pi^1(1)\Pi^0(1),$$
$$\Pi^{n+1}(1) = \Pi^1(\Pi^n(1))$$

индукцией по n получается некоммутативное рекуррентное соотношение для собственных последовательностей (ср. (5) и (16))

$$\Pi^{n+3}(1) = \Pi^{n+2}(1)\Pi^{n+1}(1)\Pi^n(1) \tag{40}$$

для $n \geq 0$ с начальными условиями $\Pi^0(1) = 1$, $\Pi^1(1) = 12$, $\Pi^2(1) = 1213$. Так как длины этих последовательностей соответственно раны $1, 2, 4$, то из рекуррентного соотношения (40) следует, что собственные последовательности $\Pi^n(1)$ имеют длины

$$T_n = l(\Pi^n(1)), \tag{41}$$

равные числам Трибоначчи T_n (5).

Поскольку для калибровочной последовательности u (31) справедливы равенства $\Pi(u) = u$, $u = 1u'$, то $u = \Pi^n(u) = \Pi^n(1)\Pi^n(u')$ и, значит,

$$\Pi^n(1) = U_{T_n} \tag{42}$$

являются начальными подпоследовательностями калибровочной последовательности u длины T_n. Из (35) следует

$$\Delta(\Pi^n(1)) = B^n\Delta(1). \tag{43}$$

Отсюда и из (37) вытекает формула

$$\delta(T_n) = B^n z \tag{44}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где z – сдвиг тора (39).

Индукцией по N из рекуррентного соотношения (40) получаются следующие формулы

$$r_k(\Pi^n(1)) = r_k(U_{T_n}) = T_{n-k} \tag{45}$$

для $k = 1, 2, 3$, $n \geq 1$, где согласно (5) $T_{-2} = 0$, $T_{-1} = 1$.

В силу (35) отклонение $\delta(T_n)$ связано с корнями характеристического уравнения $Ch_B(x)$ соотношением

$$\delta(T_n) = \alpha^n a + \overline{\alpha}^n\overline{a} \tag{46}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{\alpha} - \alpha}\begin{pmatrix} (\zeta - 1)\overline{\alpha} + 1 - 2\zeta \\ \zeta^2(\overline{\alpha} - \alpha) + 1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Из (47) и (36) ля коэффициентов a_1, a_2 выводим явные выражения

$$a_1 = \frac{\zeta - 1}{2} + i\frac{\zeta^2 - 2\zeta + 1}{2\sqrt{d}}, \quad a_2 = \zeta^2 - i\frac{1}{\sqrt{d}} \tag{48}$$

и, следовательно, для них получаем неравенства $|a_1| < 0.2438$, $|a_2| < 0.8761$.

4. Разбиения Рози

4.1. Разбиения Рози уровня m. Рассмотрим множество $D = \delta(E)$ из $\mathbb{R}^2$, где для последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots) \in E$ отображение δ определяется равенством

$$\delta(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z, \tag{49}$$

где B – матрица из (35) и $z = \delta(1)$ – вектор сдвига тора (39). Разбиение E^m (8) индуцирует разбиение

$$D^m = \delta(E^m)$$

на тайлы $D^m_R(i)$, $D^m_G(j)$, $D^m_B(k)$ – δ-образы тайлов (9). Обозначим

$$d^m_R(i), \quad d^m_G(j), \quad d^m_B(k)$$

– множества внутренних точек замыканий $\overline{D^m_R(i)}$, $\overline{D^m_G(j)}$, $\overline{D^m_B(k)}$ соответственно. Рози [1] доказал, что для уровня $m = 0$ множество

$$d^0 = d^0_R(0) + d^0_G(1) + d^0_B(3) \tag{50}$$

содержит D^0 и его составляющие образуют разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \mod \mathbb{Z}^2$, обладающего следующими свойствами:

1. Тайлы $d^0_*(*)$ в (50) являются односвязными множествами.
2. Множества $d^0_R(0)+\mathbb{Z}^2$, $d^0_G(1)+\mathbb{Z}^2$, $d^0_B(3)+\mathbb{Z}^2$ не пересекаются.
3. Объединение их замыканий совпадает с $\mathbb{R}^2$.
4. Если $v, v' \in \mathbb{Z}^2$, $v \neq v'$ и $d^0_*(*)$ – какой-либо тайл из разбиения (50), то множества $d^0_*(*) + v$ и $d^0_*(*) + v'$ не пересекаются.

Пусть

$$S(x) = x + \xi \mod \mathbb{Z}^2, \tag{51}$$

где $\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$, – сдвиг тора $\mathbb{T}^2$. Из определения сдвига S (15) на множестве последовательностей E следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\delta"] \\ D \arrow[r, "S"] & D \end{tikzcd} \tag{52}$$

где нижняя стрелка означает перекладывание множества D, определяемое равенствами

$$S(x) = x + z^0_R, \quad x + z^0_G, \quad x + z^0_B \tag{53}$$

в зависимости от того, какому из тайлов в разбиении

$$D^0 = D^0_R(0) + D^0_G(1) + D^0_B(3) \tag{54}$$

принадлежит x. При этом в (53)

$$
\begin{aligned}
z_R^0 &= \delta(1) - \delta(0) = \xi - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
z_G^0 &= \delta(2) - \delta(1) = \xi - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
z_B^0 &= \delta(4) - \delta(3) = \xi.
\end{aligned} \tag{55}
$$

Заметим, что ограничение сдвига тора S (51) на множество D совпадает с перекладыванием (55) $\mod \mathbb{Z}^2$.

4.2. Дифференцируемость разбиений Рози.

Теорема 4.1. 1. *Для* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место разбиения*

$$d^m = \sum_{i \in I^m} d_R^m(i) + \sum_{j \in J^m} d_G^m(j) + \sum_{k \in K^m} d_B^m(k), \tag{56}$$

тора $\mathbb{T}^2$*, обладающие свойсвами* 1)-4). *При этом*

$$d_R^m(i) = S^{i_0} d_R^m(0), \quad d_G^m(j) = S^{j_0} d_G^m(T_m), \quad d_B^m(k) = S^{k_0} d_k^m(T_{m+1}+T_m), \tag{57}$$

где S *– сдвиг тора* (51) *и степени* i_0, j_0, k_0 *определены в* (19).

2. *Сумма тайлов*

$$w^m = d_R^m(0) + d_G^m(T_m) + d_B^m(T_{m+1} + T_m) \tag{58}$$

представляет собою разбиение тора

$$B^m \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \mod B^m \mathbb{Z}^2, \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix},$$

также обладающего свойствами 1)-4). *При этом* $w^0 = d^0$ *– разбиение Рози* (50) *и*

$$w^m = B^m w^0 \tag{59}$$

для $m \geq 0$.

3. *Разбиения* d^m (56) *согласованы с действием сдвига* S (51) *на торе* $\mathbb{T}^2$*, т.е.*

$$S d^m \overset{\text{a.e.}}{=} d^m \backslash w^m + w'^m, \tag{60}$$

где

$$w'^m = d_R^m(T_m) + d_G^m(T_{m+1}) + d_B^m(T_{m+2}) \tag{61}$$

– снова разбиение тора $B^m\mathbb{T}^2$ *со свойствами* 1)–4) *и*

$$\begin{aligned} d_R^m(T_m) &= S^{T_{m,R}} d_R^m(0) \mod \mathbb{Z}^2,\\ d_G^m(T_{m+1}) &= S^{T_{m,G}} d_G^m(T_m) \mod \mathbb{Z}^2,\\ d_B^m(T_{m+2}) &= S^{T_{m,B}} d_B^m(T_{m+1}+T_m) \mod \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{62}$$

Замыкания $\overline{w}^m, \overline{w}'^m$ *разбиений* w^m, w'^m *совпадают и* $\overset{\text{a.e.}}{=}$ *означает, что замыкания множеств в правой и левой части* (60) *равны.*

4. *Индуцированное отображение*

$$S^{(m)} = S|_{w^m}$$

есть перекладывание тайлов из разбиения w^m (58):

$$\begin{aligned} d_R^m(T_m) &= d_R^m(0) + z_R^m\\ d_G^m(T_{m+1}) &= d_G^m(T_m) + z_G^m,\\ d_B^m(T_{m+2}) &= d_B^m(T_{m+1}+T_m) + z_B^m, \end{aligned} \tag{63}$$

где

$$\begin{aligned} z_R^m &= B^m z_R^0 \equiv T_{m,R}\xi \mod \mathbb{Z}^2,\\ z_G^m &= B^m z_G^0 \equiv T_{m,G}\xi \mod \mathbb{Z}^2,\\ z_B^m &= B^m z_B^0 \equiv T_{m,B}\xi \mod \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \tag{64}$$

для $m \geq 0$ *и векторы* z_R^0, z_G^0, z_B^0 *определены в* (55).

5. *Преобразование перекладывания тайлов* $S^{(m)}$ (63) *представляет собой сдвиг тора* $B^m\mathbb{T}^2$. *При этом* $S^{(m)}$ *получается сопряжением*

$$S^{(m)} = B^m S B^{-m} \tag{65}$$

сдвига S *тора* $\mathbb{T}^2$ *и, следовательно, производный сдвиг* $S^{(m)}$ *аффинно изоморфен исходному сдвигу* S.

Доказательство. Из способа 2 построения разбиений E^m (10), (11) и определения сдвига B (13) на множестве E получаем

$$E_R^0(0) = E_R^1(0) + E_G^1(2) + E_B^1(6) = BE_R^0(0) + BE_G^0(1) + BE_B^0(3) = BE^0,$$

т.е. B-сдвиг преобразует разбиение E^0 в разбиение тайла $E_R^0(0)$ из E^1. Отсюда и из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{B} & E\\ {\scriptstyle\delta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta}\\ D & \xrightarrow{B} & D \end{array} \tag{66}$$

где нижняя стрелка означает умножение на матрицу B, индукцией по m получаем разбиения d^m (56). Равенства (57) вытекают из (21).

Утверждения 2) следуют из коммутативности диаграммы (55) и равенств $W^m = B^m W^0$ (25), $w^m = \delta(W^m)$, где W^m – разбиение (22).

Утверждения 3), 4) вытекают из теоремы 1.1, коммутативности диаграммы (52) и (53)–(55). Согласно (55) имеем $z_R^0 = \delta(1) - \delta(0) = \Delta(\Pi^0(1))$. Поэтому в силу формулы (43) можем записать

$$z_R^m = B^m z_R^0 = \Delta(\Pi^m(1)) = \delta(T_m) = \delta(T_{m,R}) = T_{m,R}\xi \mod \mathbb{Z}^2.$$

Аналогично доказываются сравнения для векторов z_G^m, z_B^m. Формулы перекладывания (63) вытекают из (53)–(55).

Равенство (66) следует из (62)–(64) и коммутативности диаграмм (26) и (52). □

Доказанная теорема 4.1 содержит реализацию построения разбиений E^m способом 1 в виде разбиений d^m тора $\mathbb{T}^2$: разбиение d^m получается из трех базисных тайлов $d_R^m(0)$, $d_G^m(T_m)$, $d_B^m(T_{m+1}+T_m)$ (58) с помощью многократного повторения сдвига тора S (51).

Способы 2, 3 построения разбиений E^m позволяют строить разбиения d^m индукционно через подстановки (деление или инфляцию) и рекуррентные соотношения.

Способ 2. Разбиение d^{m+1} получается из d^m с помощью следующих подстановок (ср. (10)–(11))

$$\begin{aligned} d_R^m(i) &= d_R^{m+1}(i) + d_G^{m+1}(i+T_{m+1}) + d_B^{m+1}(i+T_{m+2}+T_{m+1}), \\ d_G^m(j) &= d_R^{m+1}(j), \\ d_B^m(k) &= d_G^{m+1}(k). \end{aligned} \tag{67}$$

Способ 3. Разбиения d^m удовлетворяют рекуррентному соотношению (ср. с соотношением (5) для чисел Трибоначчи T_n и с (14) для разбиений E^m)

$$d^{m+3} = Bd^{m+2} + (z + B^2 d^{m+1}) + (z + Bz + B^3 d^m), \tag{68}$$

где $z = \delta(1) = \xi - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и B – матрица из (35). Поскольку

$$z + Bz = \delta(3) = 3\xi - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то с помощью сдвига S (51) соотношение (68) можно переписать в виде рекуррентного соотношения (ср. (16))

$$d^{m+3} \equiv Bd^{m+2} + SB^2 d^{m+1} + S^3 B^3 d^m \mod \mathbb{Z}^2 \tag{69}$$

для разбиений тора $\mathbb{T}^2$.

5. Распределение точек на торе

Пусть d обозначает множество внутренних точек замыкания $\delta(E)$, где δ – отображение (49). Тогда можем записать

$$B^{m+1} d = d_R^m(0), \tag{70}$$

где B – матрица из 2.5 и $d_R^m(0)$ – множество внутренних точек замыкания тайла $D_R^m(0) = \delta(E_R^m(0))$. Обозначим

$$Z_N(B^m d) = \sharp\{i : S^i(0) \in B^m d + \mathbb{Z}^2, 1 \le i \le N\}$$

– количество точек S-орбиты 0, где S – сдвиг (51) тора $\mathbb{T}^2$, попавших в область $B^m d + \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{T}^2$. Поскольку выполняется равенство

$$d_R^m(0) \overset{\text{a.e.}}{=} w^{m+1}, \tag{71}$$

где w^{m+1} – разбиение (59), то для $Z_N(B^m d)$ из (70), (71) и предложения 2.2 вытекает формула

$$Z_N(B^m d) = \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N} \tag{72}$$

для любого уровня $m \ge 0$. Заметим, что определитель матрицы B равен $0 < \zeta < 1$ и d является фундаментальной областью для тора $\mathbb{T}^2$, поскольку $d \overset{\text{a.e.}}{=} d^0$. Поэтому естественно рассмотреть разность $N\zeta^m - \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N}$ как отклонение $Z_N(B^m d)$ от площади.

К оценке этого отклонения применим формулу (46). Рассматривая только первые координаты, записываем

$$T_n \zeta - T_{n-1} = 2\,\mathrm{Re}(a_1 \alpha^n)$$

для любого $n \ge 0$. При условии $1 \le m \le n+1$ из последнего равенства выводим

$$T_n \zeta^m - T_{n-m} = 2\,\mathrm{Re}(a_1 \alpha^{n-m+1}[1 + \alpha\zeta + \cdots + (\alpha\zeta)^{m-1}]) \tag{73}$$

и, следовательно, получаем оценку

$$|T_n\zeta^m - T_{n-m}| \leq c_1|\alpha|^{n-m+1}, \tag{74}$$

где $|\alpha| < 1$ и константа $c_1 = \frac{2|a_1|}{1-\zeta|\alpha|}$ не зависит от параметров m, n.

Выберем произвольное $k \geq 0$ и разобъем N на две части

$$N = \sum_{n\geq 0} \varepsilon_n(N)T_n = N_k + N_{>k},$$

где N_k равно сумме слагаемых с индексами $n \leq k$. Поскольку данное разложение инвариантно относительно сдвига

$$\overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N} = \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N_k} + \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N_{>k}},$$

то разность $N\zeta^m - \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N}$ можем записать в виде суммы

$$N\zeta^m - \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N} \;=\; N_k\zeta^m - \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N_k} \;+\quad r_n(m,k), \tag{75}$$

где остаток равен

$$r_N(m,k) = N_{>k}\zeta^m - \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N_{>k}}.$$

Применяя неравенство (74) и учитывая ограничения на коэффициенты $\varepsilon_n(N)$ (6), получаем

$$\begin{aligned}|r_N(m,k)| &\leq c_1 \sum_{n\geq k+1} \varepsilon_n(N)|\alpha|^{n-m+1}\\ &\leq c_1|\alpha|^{k-m+1}(1 + |\alpha| + |\alpha|^3 + |\alpha|^4 + \cdots)\end{aligned}$$

и, значит, для остатка $r_N(m,k)$ имеет место оценка

$$|r_N(m,k)| \leq c_2|\alpha|^{k-m+2} \tag{76}$$

с константой $c_2 = c_1\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|^3}$.

Для конкретных значений уровня m формула (75) и неравенство (77) сводят вычисление разностей $N\zeta^m - \overset{\overset{m}{\longleftarrow}}{N}$ к вычислению аналогичных разностей для ограниченных значений N. Так, например, из (75), (77) получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} c_m^+ &= \sup_{N\in\mathbb{N}}\{N\zeta^m - \overset{m}{\overleftarrow{N}}\} = \sup_{N<T_{k+1}}\{N\zeta^m - \overset{m}{\overleftarrow{N}}\} + r^+(m,k), \\ c_m^- &= \inf_{N\in\mathbb{N}}\{N\zeta^m - \overset{m}{\overleftarrow{N}}\} \ = \inf_{N<T_{k+1}}\{N\zeta^m - \overset{m}{\overleftarrow{N}}\} + r^-(m,k), \end{aligned} \tag{77}$$

где

$$|r^+(m,k)| \le c_2|\alpha|^{k-m+2}, \quad |r^-(m,k)| \le c_2|\alpha|^{k-m+2}$$

и $k \ge 0$ – произвольное фиксированное число.

Для уровеней $m \le 10$ в Таблице 5.1 приведены соответствующие верхние и нижние границы для c_m^+ и c_m^-.

Таблица 5.1

m	c_m^-	c_m^+
1	−0.33	0.92
2	−0.26	1.14
3	−0.24	1.21
4	−0.26	1.32
5	−0.26	1.36
6	−0.26	1.37
7	−0.26	1.39
8	−0.26	1.40
9	−0.26	1.41
10	−0.27	1.41

Чтобы получить границы для разности $N\zeta^m - \overset{m}{\overleftarrow{N}}$ в случае произвольного m, воспользуемся следующими итерациями

$$\overset{t}{\overleftarrow{N}}\zeta^{m-t} + c_t^-\zeta^{m-t} \le N\zeta^m \le \overset{t}{\overleftarrow{N}}\zeta^{m-t} + c_t^+\zeta^{m-t},$$

где $t \leq m$, и получим нужные неравенства

$$c^{-} \ \leq \ N\zeta^{m} - \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N} \ \leq \ c^{+}, \tag{78}$$

где

$$c^{+} = \max_{0 \leq t < m'} \{c_t^{+} + c_{m'}^{+} \frac{\zeta^t}{1-\zeta^{m'}}\},$$
$$c^{-} = \min_{0 \leq t < m'} \{c_t^{-} + c_{m'}^{-} \frac{\zeta^t}{1-\zeta^{m'}}\},$$

$m' \geq 1$ – любое фиксированное значение и $c_0^{+} = c_0^{-} = 0$. Если в качестве m' выбрать, скажем, $m' = 10$ и воспользоваться Таблицей 5.1, то для констант c^{+}, c^{-} получим соответственно оценки $c^{+} < 1.7$, $c^{-} > -0.5$.

Из (72) и (78) вытекает

Теорема 5.1. *Пусть* $S(x) = x + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}^2$ *– сдвиг тора* $\mathbb{T}^2$*; d – множество внутренних точек из $\overline{\delta(E)}$, где δ – отображение (49) и E – множество последовательностей из 0 и 1 с ограничением (6); $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1-\zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}$, где $\zeta^{-1} > 1$ – кубическое число Пизо, являющееся корнем многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.*

1. *Тогда для количества $Z_N(B^m d)$ попаданий точек орбиты $S(0), S^2(0), \ldots, S^N(0)$ в область $B^m d$, $m \geq 0$, имеет место формула*

$$Z_N(B^m d) = \overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N},$$

где $\overset{\overset{m}{\leftarrow}}{N}$ обозначает число, полученное из N m-кратным сдвигом влево в системе счисления Трибоначчи T_n (5).

2. *Для отклонения*

$$r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$$

при любом уровне m выполняются неравенства

$$-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5.$$

6. Перенормировки сдвига тора

Для орбиты $S^0(0), S^1(0), S^2(0), \ldots$ точки 0 рассмотрим перенормировку (ср. с перенормировкой из п. 2.2)

$$\mathbb{N} \xrightarrow{B^m d} \mathbb{N}: \ N' \mapsto N \tag{79}$$

ее ограничения на область $B^m d + \mathbb{Z}^2$ тора $\mathbb{T}^2$. Если $S^{(m)}$ – ограничение сдвига тора S (51) на область $B^m d$, то перенормировка (79) означает выполнение следующего соотношения

$$(S^{(m)})^{N'}(0) = S^N(0)$$

для всех $N' = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, $N = N_{N'}(B^m d)$ – это время N'-го возвращения начальной точки 0 в область $B^m d$.

Теорема 6.1. 1. *Пусть*

$$N' = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N') T_n$$

– разложение числа N' в системе счисления Трибоначчи (5) и

$$\overset{\overset{m}{\to}}{N'} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n(N') T_{n+m} \tag{80}$$

– m-кратный сдвиг вправо числа N'. Тогда время N'-го возвращения начальной точки 0 в область $B^m d$ вычисляется по формуле

$$N_{N'}(B^m d) = \overset{\overset{m}{\to}}{N'} \tag{81}$$

для всех m, $N' = 0, 1, 2, \ldots$.

2. *Пусть $\theta > 1$ – вещественный корень многочлена $x^3 - x^2 - x - 1$. Тогда перенормировки удовлетворяют неравенству*

$$|N_{N'}(B^m d) - \theta^m N'| < 2\theta^m. \tag{82}$$

Доказательство. Формула (81) вытекает из равенства (70) для области $B^m d$ и из первой формулы перенормировок (29). Неравенство (82) получается прямыми вычислениями, если воспользоваться соотношением $\theta = \zeta^{-1}$, определением (80) сдвига $\overset{\overset{m}{\to}}{N'}$ и неравенством (74).

Литература

1. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
2. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. (2005). (В печати.)
3. S. Ferenczi, *Bounded remainder sets.* — Acta Arithmetica **61** (1992), 319–326.
4. S. Akiyma, *On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers.* — J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 283–308.
5. A. Messaoudi, *Properiétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy.* — J. Théorie Nombers de Bordeaux **10** (1998), 135–162.
6. S. Ito and M. Kimura, *On Rauzy fractal.* — Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 461–486.
7. S. Ito and M. Ohtsuki, *Modified Jacobi–Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms.* — **16**, No. 2 (1993), 441–472.
8. А. В. Шутов, *О распределении дробных долей.* — Чебышевский сборник **5** вып. 3 (2004), Тула (2004), 111–121.
9. E. Hecke, *Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins.* — Math. Sem. Hamburg. Univ. **Bd. 1** (1921), 54–76.
10. H. Kesten, *On a cojecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod* 1. — Acta Arith. **14** (1973), 26–38.

Zhuravlev V. G. Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus.

For the two dimensional torus $\mathbb{T}^2$ we construct the Rauzy tilings $d^0 \supset d^1 \supset \ldots \supset d^m \supset \ldots$, where each tiling d^{m+1} turns out by inflation of d^m. The following results are proved:

1) Any tiling d^m is invariant with respect to the shift $S(x) = x + \left(\begin{smallmatrix}\zeta \\ \zeta^2\end{smallmatrix}\right)$ mod $\mathbb{Z}^2$, here $\zeta^{-1} > 1$ is a Pisot number satisfying the equation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

2) The induced map $S^{(m)} = S|_{B^m d}$ is an exchange transformation of $B^m d \subset \mathbb{T}^2$, where $d = d^0$ and $B = \left(\begin{smallmatrix}-\zeta & -\zeta \\ 1-\zeta^2 & \zeta^2\end{smallmatrix}\right)$.

3) The map $S^{(m)}$ is a shift of the torus $B^m d \simeq \mathbb{T}^2$ and $S^{(m)}$ is isomorphic to the initial shift S. It means that d^m are infinite differentiable tilings.

Let $Z_N(X)$ be equal to the number of points in the orbit $S^1(0), S^2(0), \ldots, S^N(0)$ visited the domain $B^m d$. Then the remainder $r_N(B^m d) = Z_N(B^m d) - N\zeta^m$ satisfies $-1.7 < r_N(B^m d) < 0.5$ for all m.

Владимирский государственный педагогический университет

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 марта 2005 г.