Ф. Г. КОРАБЛЕВ

ОБ ОДНОЙ СЕРИИ ГРАФ-МНОГООБРАЗИЙ РОДА 2

В работе рассматривается бесконечная серия граф-многообразий, полученных склейкой двух многообразий Зейферта. Первое многообразие расслоено над диском с двумя особыми слоями типа $(2,-1)$ и $(2k+1,k)$, где $k \geqslant 1$. Второе многообразие расслоено над листом Мебиуса с двумя особыми слоями типа $(p_1,q_1),(p_2,q_2)$, где $0 < q_1 < p_1$. Склейка этих многообразий выполняется по гомеоморфизму, заданному матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в естественных системах координат на краях многообразий. Все многообразия из данной серии классифицируются, а также путем явного построения разбиения Хегора доказывается, что все они имеют род 2. Также вычисляются первые группы гомологий всех рассматриваемых многообразий.

Ключевые слова: *граф-многообразие, разбиение Хегора, гомология.*

1. Предварительные сведения

Напомним, что любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить в виде объединения $M = V \cup W$ двух полных кренделей V и W так, что $V \cap W = \partial V = \partial W$. Такое представление называется *разбиением Хегора* многообразия M. *Родом разбиения* называется род кренделей V и W. *Родом многообразия* называется наименьший род его разбиений Хегора.

Пусть B — ориентируемая или неориентируемая поверхность с краем, состоящим из $k > 0$ компонент, $(p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n)$ — пары взаимно простых чисел, где $p_i > 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Напомним, что многообразие Зейферта $M = (B;(p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n))$ устроено следующим образом. Рассмотрим поверхность B_0, полученную из поверхности B вырезанием $n \geqslant 0$ непересекающихся дисков. Обозначим через M_0 прямое произведение $B_0 \times S^1$, если поверхность B_0 ориентируема, и ориентируемое косое произведение $B_0 \widetilde{\times} S^1$, если поверхность B_0 неориентируема. На каждом из $k+n$ торов края ∂M_0 можно естественным образом ввести систему координат: в качестве параллели λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k+n$, взять слой расслоения многообразия M_0 на окружности, а в качестве меридиана μ_i — край какого-либо сечения этого расслоения. Опишем ориентации кривых μ_i и λ_i. Выберем сначала какую-нибудь ориентацию многообразия M_0. Если поверхность B_0 ориентируема, то направления всех параллелей λ_i выберем согласованными, а соответствующие меридианы μ_i ориентируем так, чтобы пара (μ_i,λ_i) давала ориентацию i-го тора, индуцированную ориентацией многообразия M_0. Если поверхность B_0 неориентируема, то параллели λ_i ориентируем произвольным независимым друг от друга образом, а соответствующие меридианы μ_i ориентируем так, чтобы пара (μ_i,λ_i) также давала ориентацию i-го тора, индуцированную ориентацией многообразия M_0.

Многообразие Зейферта M получено из многообразия M_0 приклеиванием n полных торов к тем компонентам края ∂M_0, которые соответствуют дискам,

Работа поддержана РФФИ (грант 06-01-72014) и интеграционным проектом УрО РАН и СО РАН.

вырезанным из поверхности B. Вклеивание каждого полного тора осуществляется по гомеоморфизму, переводящему меридиан полного тора в кривую типа (p_i, q_i) на соответствующем торе края ∂M_0. Говорят, что многообразие M имеет в качестве базы поверхность B и n особых слоев типа $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$.

Отметим, что если произвольное многообразие M задано в таком виде, т. е. указана база и параметры особых слоев, то на крае ∂M возникает естественная система координат.

Определение 1. Замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие M называется *граф-многообразием,* если оно не является многообразием Зейферта и его можно разбить системой непересекающихся торов на многообразия Зейферта.

Определение 2. *Класс* $\mathcal{DM}$ — это множество граф-многообразий, полученных склейкой двух многообразий Зейферта. Первое многообразие расслоено над диском с двумя особыми слоями типа $(2, -1)$ и $(2k + 1, k)$, где $k \geqslant 1$. Второе многообразие расслоено над листом Мебиуса с двумя особыми слоями типа $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$, где $0 < q_1 < p_1$. Склейка этих многообразий выполняется по гомеоморфизму, заданному матрицей $[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в естественных системах координат на краях многообразий. Другими словами, $\mathcal{DM} = \big\{(D^2; (2, -1), (2k + 1, k)) \cup_{[\varphi]} (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2))\big\}$, где $k, p_1, p_2 \geqslant 1$, $0 < q_1 < p_1$ и пары p_1, q_1 и p_2, q_2 взаимно просты.

Замечание 1. Запись $M_1 \cup_A M_2$ означает, что многообразия M_1 и M_2 склеиваются по гомеоморфизму $\mathcal{A}\colon \partial M_1 \to \partial M_2$, заданному матрицей $A = [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в стандартных системах координат, введенных на краях ∂M_1 и ∂M_2, т. е. по гомеоморфизму, переводящему меридиан тора ∂M_1 в кривую типа (a, c) на торе ∂M_2, а параллель тора ∂M_1 в кривую типа (b, d) на торе ∂M_2.

Определение 3. Пусть многообразие H — полный крендель рода 2. Кольцо $A \subset \partial H$ называется *вертикальным,* если оно допускает расслоение на отрезки, индуцированное естественным расслоением на отрезки кренделя H как прямого произведения диска с двумя дырками на отрезок.

2. Классификация многообразий класса $\mathcal{DM}$

Теорема 1. *Все многообразия класса* $\mathcal{DM}$ *различны.*

Доказательство. Это является простым следствием общей теоремы классификации произвольных граф-многообразий [1]. В самом деле, пусть многообразия

$M = (D^2; (2, -1), (2k + 1, k)) \cup_{[\varphi]} (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2))$ и

$M' = (D^2; (2, -1), (2k' + 1, k')) \cup_{[\varphi]} (M^2; (p'_1, q'_1), (p'_2, q'_2))$ гомеоморфны. Тогда под действием этого гомеоморфизма единственный несжимаемый тор в многообразии M должен переходить в единственный несжимаемый тор в многообразии M'. Несжимаемый тор в любом многообразии из класса $\mathcal{DM}$ — это тор, разбивающий многообразие на многообразия Зейферта. Отсюда следует, что существует гомеоморфизм $h_1\colon (D^2;(2,-1),(2k+1,k)) \to (D^2;(2,-1),(2k'+1,k'))$, и существует гомеоморфизм $h_2\colon (M^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2)) \to (M^2;(p_1',q_1'),(p_2',q_2'))$. Так как каждое из рассматриваемых многообразий Зейферта имеет единственное расслоение Зейферта, то гомеоморфизмы h_1 и h_2 являются послойными.

Напомним, что если два многообразия Зейферта $N = (B;(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_n,\beta_n))$ и $N' = (B';(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_m',\beta_m'))$ послойно гомеоморфны, то $B = B'$, $n = m$, $\alpha_i = \alpha_i'$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, а параметры β_i и β_i' таковы, что от пар (α_i,β_i) к парам (α_i',β_i') можно перейти с помощью последовательности преобразований:

1. Все параметры β_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ заменить на $-\beta_i$. Это соответствует смене ориентации многообразия N и, следовательно, не меняет самого многообразия.

2. “Торговля слоями”: $\ldots,(\alpha_i,\beta_i),\ldots,(\alpha_j,\beta_j),\ldots \mapsto \ldots,(\alpha_i,\beta_i \pm \alpha_i),\ldots,(\alpha_j,\beta_j \mp \alpha_j),\ldots$ Такое преобразование соответствует скручиванию вдоль послойного кольца и, следовательно, также не меняет многообразия.

Так как гомеоморфизмы h_1 и h_2 послойны, то $k = k'$, $p_1 = p_1'$ и $p_2 = p_2'$. Кроме того, так как склейка происходит по одной и той же матрице $[\varphi]$ и параметры q_1 и q_1' таковы, что $0 < q_1, q_1' < p_1$, то $q_1 = q_1'$, а следовательно, и $q_2 = q_2'$. □

3. Вычисление рода граф-многообразий из класса $\mathcal{DM}$

Теорема 2. *Любое граф-многообразие из класса $\mathcal{DM}$ имеет род 2.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Многообразие $M = (D^2;(2,-1),(2k+1,k))$, $k \geqslant 1$, можно представить в виде объединения $M = Q_b \cup Q_w$ двух многообразий (черного и белого) так, чтобы были выполнены следующие условия:*

1. *Каждое из многообразий Q_b, Q_w гомеоморфно прямому произведению диска с двумя дырками на отрезок и выходит на ∂M по двум меридиональным кольцам (т. е. по кольцам типа $(1,0)$).*

2. *Кольца из пересечений $Q_b \cap \partial M$, $Q_w \cap \partial M$ являются вертикальными на ∂Q_b и ∂Q_w (см. определение 3).*

3. *$Q_b \cap Q_w = \partial Q_b \cap \partial Q_w$ есть диск с тремя дырками.*

Доказательство. Отметим заранее, что в дальнейшем A^2 обозначает кольцо, K^2 — бутылку Кляйна, N^2 — диск с двумя дырками.

Сначала мы докажем, что многообразие $M' = (A^2;(2,-1))$ можно разбить на два экземпляра Q_b', Q_w' многообразия $N^2 \times I$ так, что каждый экземпляр выходит на один краевой тор $\partial_1 M'$ многообразия M' по двум кольцам типа $(1,0)$, а на второй тор $\partial_2 M'$ — по одному кольцу типа $(2,1)$. Действительно, рассмотрим многообразие $M_1 = (D^2;(2,-1),(2,1)) = K^2 \tilde{\times} I$. Оно получается из прямого произведения $A^2 \times I$ отождествлением оснований $A^2 \times \{0, 1\}$ по гомеоморфизму с двумя неподвижными точками. Поэтому его можно разбить на два толстых кольца $A_b = A^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ и $A_w = A^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$. Каждое из этих колец выходит на край многообразия M_1 по двум меридиональным кольцам. Заметим, что многообразие M' можно получить из многообразия M_1 вырезанием трубчатой окрестности особого слоя типа $(2, 1)$. При этом вырезании толстые кольца A_b, A_w превращаются в многообразия Q'_b, Q'_w нужного типа (рис. 1).

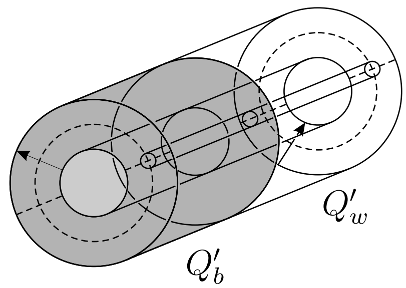

Рис. 1. Разбиение многообразия $M' = (A^2; (2, -1))$ на два полных кренделя. Многообразие M' представлено как результат вырезания одного особого слоя из многообразия $M_1 = (D^2; (2, -1), (2, 1)) = K^2 \tilde{\times} I$. В свою очередь многообразие M_1 представлено как результат склейки оснований цилиндра $A^2 \times I$ по суперпозиции двух симметрий (указаны стрелки, которые должны совпадать при склейке) (см. [1])

Теперь мы вырежем из многообразия M трубчатую окрестность U особого слоя типа $(2k + 1, k)$. Полученное многообразие можно отождествить с многообразием M' так, чтобы тор ∂U совпал с тором $\partial_2 M'$. Заметим, что меридиан $m = (2, 1)$ тора ∂U, рассматриваемого как тор в $\partial M'$, пересекает меридиан $(2k+1, k)$ тора U в одной точке. Поэтому можно считать, что m является параллелью полного тора U и что $U \cap Q'_b$ и $U \cap Q'_w$ есть состоящие из параллелей кольца. Присоединим полный тор U к полному кренделю Q'_w. Поскольку приклеивание полного тора к любому многообразию по составленному из параллелей кольцу не меняет этого многообразия, то многообразие $Q_w = Q'_w \cup U$ гомеоморфно многообразию $N^2 \times I$. Поэтому $M = Q_b \cup Q_w$, где $Q_b = Q'_b$. Поскольку пересечение $\partial Q_b \cap \partial Q_w$ получается из поверхности ∂Q_b вырезанием двух колец $\partial Q_b \cap \partial M$, то оно гомеоморфно диску с 3 дырками. □

Лемма 2. *Результатом склейки полного кренделя $H = N^2 \times I$ и полного тора $T = A^2 \times I$ по паре колец, вертикальных на краях ∂H и ∂T, по гомеоморфизму, при котором поверхность $\partial(H \cup T)$ ориентируема, будет снова полный крендель рода 2 (рис. 2).*

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить существенный диск, разрезающий многообразие $T \cup H$ до полного тора. В качестве такого диска можно взять диск $D = a \times I$, где a — дуга, разрезающая поверхность N^2 на два кольца. Каждое из этих колец таково, что оно содержит по одной компоненте края, соответствующей вертикальным кольцам, по которым осуществляется приклейка полного тора T. Заметим, что этот диск D разрезает крендель H на два

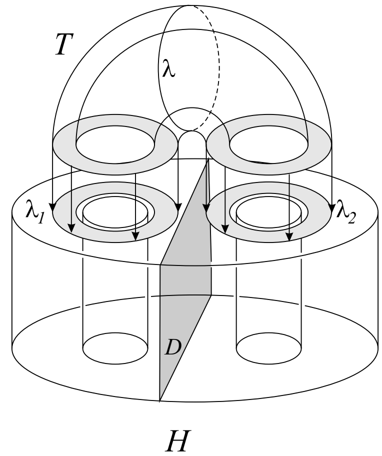

Рис. 2. Приклеивание полного тора T к полному кренделю H по двум вертикальным кольцам, каждое из которых параллельно кривой λ, являющейся параллелью полного тора T. Полный крендель H представлен как прямое произведение $N^2 \times I$, D — существенный диск, разрезающий крендель H на два полных тора, а два из трех вертикальных кольца кренделя H параллельны кривым λ_1 и λ_2

полных тора. Тогда после этого разрезания останется полный тор T, к которому по параллелям приклеены два полных тора, т. е. снова полный тор. $\square$

Доказательство теоремы. Покажем, что произвольное многообразие вида $M = (D^2; (2,-1), (2k+1, k)) \cup_{[\varphi]} (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2))$, где $p_1, p_2, k \geqslant 1$, $0 < q_1 < p_1$ и пары p_1, q_1 и p_2, q_2 взаимно просты, имеет род 2.

Явно построим разбиение всего многообразия на два полных кренделя — черный и белый. Для этого мы сначала каждое из составляющих граф-многообразие многообразий Зейферта разобъем на два полных кренделя, а потом проверим, что при склейке многообразий Зейферта полные крендели склеятся в полные крендели.

Действительно, многообразие $M_2 = (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2))$ разобъем на черный полный тор U_1, содержащий особый слой (p_1, q_1), и белый полный тор U_2, содержащий особый слой (p_2, q_2), с помощью двух существенных послойных колец. При этом тор ∂M_2 будет состоять из четырех колец: двух черных и двух белых. Многообразие $M_1 = (D^2; (2,-1), (2k+1, k))$ разобъем на два полных кренделя Q_b и Q_w точно так, как это описывалось в лемме 1.

Гомеоморфизм, заданный матрицей $[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, приклеивает полный тор U_1 к полному кренделю Q_b по паре колец, которые являются вертикальными на крае ∂Q_b. Приклейку этого полного тора U_1 можно осуществить в два этапа. Сначала приклеить полный тор по паре колец, параллельных параллели, а затем сделать перестройку с параметрами (p_1, q_1) вдоль осевой окружности этого тора. После приклейки полного тора по паре колец, составленных из параллелей, получим снова полный крендель рода 2 по лемме 2, а после перестройки вдоль осевой окружности приклеенного полного тора получим снова полный крендель рода 2, так как эта осевая окружность отрезается от всего многообразия $Q_b \cup U_1$ существенным диском. Аналогичным образом объединение белых частей $Q_w \cup U_2$

в многообразии M является полным кренделем рода 2. Таким образом, имеем разбиение рода 2 граф-многообразия M. $\square$

Замечание 2. В статье [2] было получено явное описание структуры разбиения Хегора для произвольного многообразия Зейферта. На основе этого результата стало возможным вычисление рода произвольного многообразия Зейферта. До этого момента были известны только верхние оценки рода многообразий Зейферта, и лишь для некоторых серий многообразий Зейферта был известен их род. Аналогичный результат по описанию структуры разбиений Хегора для граф-многообразий был получен в статье [3], однако в ней рассматривались только те граф-многообразия, которые склеиваются из многообразий Зейферта, каждое из которых имеет ориентируемую базу. Многообразия из серии $\mathcal{DM}$ не попадают под этот случай, и поэтому род рассматриваемых многообразий не мог быть вычислен, основываясь только на результатах статьи [3].

4. Первая группа гомологий многообразий из класса $\mathcal{DM}$

Теорема 3. *Пусть многообразие $M \in \mathcal{DM}$ и имеет вид*

$$M = (D^2; (2,-1), (2k+1, k)) \cup_{[\varphi]} (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2)),$$

где $k, p_1, p_2 \geqslant 1$, $0 < q_1 < p_1$ и пары p_1, q_1 и p_2, q_2 взаимно просты. Тогда

$$H_1(M) = \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{\frac{4p_1p_2}{d}},$$

$$\text{где } d = \begin{cases} \text{НОД}\,(2p_1, p_1+p_2), & \text{если } q_1, q_2 \text{ — нечетны;} \\ \text{НОД}\,(2p_1, p_2), & \text{если } q_1 \text{ — нечетно, } q_2 \text{ — четно;} \\ \text{НОД}\,(p_1, 2p_2), & \text{если } q_1 \text{ — четно, } q_2 \text{ — нечетно;} \\ 2\cdot\text{НОД}\,(p_1, p_2), & \text{если } q_1, q_2 \text{ — четны.} \end{cases}$$

В частности, $|H_1(M)| = 4p_1p_2$, и первая группа гомологий не зависит от величин q_1 и q_2, а зависит только от их четности.

Доказательство. Пусть $M = M_1 \cup_{[\varphi]} M_2$, где $M_1 = (D^2; (2,-1), (2k+1,k))$, $M_2 = (M^2; (p_1, q_1), (p_2, q_2))$. Тогда

$$H_1(M_1) = \langle c_1, c_2 \,|\, 2kc_1 + (2k+1)c_2 = 0\rangle,$$
$$H_1(M_2) = \langle a_1, c_3, c_4, t_2 \,|\, p_1c_3 + q_1t_2 = 0,\ p_2c_4 + q_2t_2 = 0,\ 2t_2 = 0\rangle.$$

По теореме Ван-Кампена, чтобы найти копредставление первой группы гомологий $H_1(M)$, надо записать вместе порождающие и соотношения групп $H_1(M_1)$ и $H_1(M_2)$, а потом добавить еще два соотношения, в которых приравниваются выражения порождающих группы $H_1(M_1 \cap M_2)$ через порождающие группы $H_1(M_1)$ и группы $H_1(M_2)$. Меридиан тора ∂M_1 выражается как $-c_1 - c_2$, и он при склейке по матрице $[\varphi]$ переходит в параллель тора ∂M_2, которая выражается как t_2. Поэтому первое дополнительное соотношение будет $-c_1 - c_2 = t_2$. Аналогично параллель тора ∂M_1 выражается как $2c_1$, и она переходит в меридиан тора ∂M_2, который выражается как $-c_4-c_3-2a_1$, поэтому второе дополнительно соотношение будет $2c_1=-c_4-c_3-2a_1$. В итоге получим

$$H_1(M)=\langle a_1,c_1,c_2,c_3|\quad \begin{array}{l} 2kc_1+(2k+1)c_2=0,\ q_1c_1+q_1c_2-p_1c_3=0,\\ 2p_2a_1+(2p_2+q_2)c_1+q_2c_2+p_2c_3=0,\\ 2c_1+2c_2=0\rangle. \end{array}$$

Матрица этого копредставления имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2k & 2k+1 & 0\\ 0 & q_1 & q_1 & -p_1\\ 2p_2 & 2p_2+q_2 & q_2 & p_2\\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Она преобразуется к матрице $\begin{pmatrix} 0 & q_1 & -p_1\\ 2p_2 & q_2 & p_2\\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Здесь мы отбросили одну строку и один столбец, которые целиком состоят из нулей, за исключением их общего элемента, равного единице. Отметим, что $|H_1(M)|=4p_1p_2$. Далее рассмотрим четыре случая.

1. Если q_1 и q_2 нечетны, то эта матрица преобразуется к виду $\begin{pmatrix} 2p_2 & p_1+p_2\\ 0 & 2p_1 \end{pmatrix}$. Будем вычитать из первой строки вторую и наоборот, пока не получим матрицу вида $\begin{pmatrix} a_{11} & d_1\\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, где a_{11} и a_{21} — получившиеся в результате преобразований числа, $d_1=\text{НОД}\,(2p_1,p_1+p_2)$. По сути процедура очень схожа с вычислением наибольшего общего делителя чисел p_1+p_2 и $2p_1$. Заметим, что оба числа a_{11} и a_{21} кратны $2p_2$. Далее, так как $d_1|p_1+p_2$, то $d_1|2p_1+2p_2$, а поскольку $d_1|2p_2$, то $d_1|2p_2$. Поэтому оба числа a_{11} и a_{21} кратны d_1. Следовательно, $H_1(M)=\mathbb{Z}_{d_1}\oplus\mathbb{Z}_{\frac{4p_1p_2}{d_1}}$.

2. Если q_1 — нечетно, q_2 — четно, то матрица копредставления первой группы гомологий преобразуется к виду $\begin{pmatrix} 2p_2 & p_2\\ 0 & 2p_1 \end{pmatrix}$. Аналогично предыдущему случаю она приводится к матрице $\begin{pmatrix} b_{11} & d_2\\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$, где оба числа b_{11} и b_{21} кратны $2p_2$, $d_2=\text{НОД}\,(2p_1,p_2)$. Так как $d_2|p_2$, то $d_2|2p_2$, следовательно, $H_1(M)=\mathbb{Z}_{d_2}\oplus\mathbb{Z}_{\frac{4p_1p_2}{d_2}}$.

3. Если q_1 — четно, q_2 — нечетно, то матрица копредставления первой группы гомологий приводится к виду $\begin{pmatrix} 0 & p_1\\ 4p_2 & 2p_2 \end{pmatrix}$. Аналогично предыдущим случаям приводим ее к виду $\begin{pmatrix} c_{11} & d_3\\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}$, где оба числа c_{11} и c_{21} кратны $4p_2$, $d_3=\text{НОД}\,(p_1,2p_2)$. Так как $d_3|2p_2$, то $d_3|4p_2$, следовательно, $H_1(M)=\mathbb{Z}_{d_3}\oplus\mathbb{Z}_{\frac{4p_1p_2}{d_3}}$.

4. Если q_1 и q_2 четны, то матрица копредставления первой группы гомологий приводится к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_1\\ 0 & 2p_2 & p_2 \end{pmatrix}$. Аналогично предыдущим случаям, преобра-

зуя вторую и третью строки этой матрицы, приведем ее к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2p_1p_2}{d_4} \end{pmatrix}$, где $d_4 = \text{НОД}\,(p_1, p_2)$. Следовательно, $H_1(M) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{d_4} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{2p_1p_2}{d_4}} = \mathbb{Z}_{2d_4} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{2p_1p_2}{d_4}}$. Последнее равенство справедливо в силу того, что из четности q_1 и q_2 следует нечетность p_1 и p_2, и поэтому d_4 взаимно просто с 2. $\square$

Список литературы

1. **Матвеев, С. В.** Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии / С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. — М. : Изд-во МГУ, 1991.
2. **Moriah, Y.** *Irreducible Heegaard splittings of Seifert fibered spaces are either vertical or horizontal* / Y. Moriah, J. Schultens // Topology. — 1998. — Vol. 37, № 5. — P. 1089—1112.
3. **Schultens, J.** *Heegaard splittings of graph manifolds* / J. Schultens // Geometry and Topology. — 2005. — Vol. 8. — P. 831—876.