N. M. Tsirelman, E. M. Bronshtein, Variational solution of the third boundary-value problem for heat exchange during flow of a liquid in a channel, *TVT*, 1975, Volume 13, Issue 5, 1003–1008

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 13 1975 № 5

УДК 536.24

ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Н. М. Цирельман, Е. М. Бронштейн

Описывается вариационный метод решения третьей краевой задачи теплообмена в трубах при зависящих от координат теплофизических свойствах жидкости и числе Био, переменном по длине трубы.

В настоящее время отсутствуют методы решения третьей краевой задачи теплообмена при стационарном, гидродинамически стабилизированном течении в плоской ($m=0$) или круглой ($m=1$) трубе произвольной (не обязательно ньютоновской) жидкости, сформулированной в виде

$$f(\xi,\bar{x})\frac{\partial T}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^m\frac{\lambda(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right]+G(\xi,\bar{x})=0,$$

$$0<\xi<1 \qquad \bar{x}>0 \tag{1}$$

$$T(\xi,0)=T_0 \qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_{\xi=1}+\mathrm{Bi}(\bar{x})\left[T(1,\bar{x})-T_{\text{н}}(\bar{x})\right]=0 \qquad \bar{x}>0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=0 \qquad \bar{x}>0. \tag{4}$$

Полагаем закон изменения температуры окружающей среды по длине трубы $T_{\text{н}}(\bar{x})$ таким, что выполняется условие согласования

$$T_{\text{н}}(0)=T_0. \tag{5}$$

Отсутствие условия (5) при постановке конкретных задач теплообмена легко преодолевается искусственным введением участка согласования $\bar{x}_0>0$.

В формулах (1) — (5) обозначены: $\bar{x}=(1/\mathrm{Pe}_0)(x/l_0)$ — безразмерная продольная координата; l_0 — полутолщина плоского канала или радиус круглой трубы; $\xi=y/l_0$ — безразмерная поперечная координата точки в канале, отсчитываемая от плоскости (оси) симметрии; $\mathrm{Pe}_0=w_0l_0/a_0$ — число Пекле; a_0 и λ_0 — молекулярные температуропроводность и теплопроводность жидкости при ее начальной температуре T_0; $G=q_vl_0^2/16\lambda_0$ — безразмерная мощность внутренних источников тепла; $f(\xi,\bar{x})$ — известная функция скоростного профиля, объемной теплоемкости и вида жидкости; w_0 — скорость на оси ламинарного и средняя по сечению скорость турбулентного потоков; Bi — число Био.

Функции $T_{\text{н}}(\bar{x})$, $\mathrm{Bi}(\bar{x})$, $\lambda(\xi,\bar{x})$, а также $f(\xi,\bar{x})$ и $G(\xi,\bar{x})$ предполагаются гладкими.

Приведем задачу (1) — (5) к однородным краевым условиям, перейдя к избыточной температуре

$$\vartheta(\xi,\bar{x})=T(\xi,\bar{x})-T_{\text{н}}(\bar{x}). \tag{6}$$

Тогда рассматриваемая задача принимает вид

$$f(\xi,\bar{x})\frac{\partial\vartheta}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right]+g(\xi,\bar{x})=0,$$

$$0<\xi<1 \qquad \bar{x}>0, \tag{1a}$$

$$\vartheta(\xi,\ 0)=0 \qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{2a}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}+\mathrm{Bi}(\bar{x})\vartheta(1,\bar{x})=0, \tag{3a}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0 \qquad \bar{x}>0. \tag{4a}$$

Здесь $g(\xi,\ \bar{x})=G(\xi,\ \bar{x})+f(\xi,\ \bar{x})\partial T_н/\partial\bar{x}$.

Решение (1a) — (4a) будем искать в интервале $0<\bar{x}<X$. С этой целью для непрерывных функций $\Phi(\xi,\ \bar{x})$, определенных в области $0<\xi<1$, $\bar{x}>0$, введем преобразование $\Phi(\xi,\ \bar{x})\to\Phi_X(\xi,\ \bar{x})$ такое, что

$$\Phi_X(\xi,\bar{x})=\begin{cases}\Phi(\xi,\bar{x}) & 0<\bar{x}<X,\\ \Phi(\xi,2X-\bar{x}) & X\leqslant\bar{x}\leqslant 2X,\\ 0 & \bar{x}>2X.\end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, функции $\Phi_X(\xi,\ \bar{x})$ обладают свойством симметрии

$$\Phi_X(\xi,\ 2X-\bar{x})=\Phi_X(\xi,\ \bar{x}) \qquad 0<\bar{x}<2X.$$

Теперь, следуя [1], запишем функционал свертки

$$J=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2X}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\xi}\right]+\xi^m f_X(\xi,\bar{x})\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_X\vartheta(\xi,\bar{x})+2\xi^m g(\xi,\bar{x})\right\}\vartheta(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi\,d\bar{x} \tag{8}$$

и покажем, что экстремаль этого функционала при $\bar{x}<X$ совпадает с решением задачи (1a) — (4a), в которой функции $\lambda(\xi,\ \bar{x})$, $f(\xi,\ \bar{x})$, $\mathrm{Bi}(\bar{x})$ будем полагать замененными по правилу (7) на $\lambda_X(\xi,\ \bar{x})$, $f_X(\xi,\ \bar{x})$, $\mathrm{Bi}_X(\bar{x})$, т. е. симметризованными относительно $\bar{x}=X$ на интервале $0<\bar{x}<2X$. Для этого найдем вариацию функционала δJ, придав функции ϑ вариацию $\delta\vartheta$ в классе функций, удовлетворяющих условиям (2a) — (4a). Тогда имеем

$$\delta J=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2X}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\xi}\right]+f_X(\xi,\bar{x})\xi^m\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_X\delta\vartheta(\xi,\bar{x})\right\}\vartheta(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi\,d\bar{x}+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^{2X}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\xi}\right]+\xi^m f_X(\xi,\bar{x})\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_X\vartheta(\xi,\bar{x})+2\xi^m g(\xi,\bar{x})\right\}\delta\vartheta(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi\,d\bar{x}. \tag{9}$$

Обозначим первое слагаемое в (9) через δJ_1 и преобразуем его, используя (2a) — (4a), (8), а также свойство симметричности свертки

$$\delta J_1=\int_0^{2X}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\vartheta(\xi,2X-\bar x)\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\right|_0^1-$$

$$-\int_0^1\xi^m\frac{\partial\vartheta(\xi,2X-\bar x)}{\partial\xi}\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}d\xi\Bigg]d\bar x+$$

$$+\int_0^1\left\{\xi^m f_X(\xi,\bar x)\vartheta(\xi,2X-\bar x)\delta\vartheta(\xi,\bar x)\right|_0^{2X}-$$

$$-\int_0^{2X}\frac{\partial}{\partial x}[\xi^m f_X(\xi,\bar x)\vartheta(\xi,2X-\bar x)]\delta\vartheta(\xi,\bar x)\Bigg\}d\xi-$$

$$-\int_0^1\int_0^{2X}\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar x)}{\partial x}\right)_X\vartheta(\xi,\bar x)\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)d\xi\,d\bar x=$$

$$=\int_0^{2X}\left\{\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\vartheta(\xi,2X-\bar x)\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}-$$

$$-\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)\Bigg|_0^1+$$

$$+\int_0^1\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\right]\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)d\xi\Bigg\}d\bar x-$$

$$-\int_0^1\int_0^{2X}\xi^m\frac{\partial f_X(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}\vartheta(\xi,2X-\bar x)\delta\vartheta(\xi,\bar x)d\xi\,d\bar x+$$

$$+\int_0^1\int_0^{2X}\xi^m f_X(\xi,\bar x)\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)d\xi\,d\bar x-$$

$$-\int_0^1\int_0^{2X}\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}\right)_{4X}\vartheta(\xi,\bar x)\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)d\xi\,d\bar x=$$

$$=\int_0^{2X}\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\left[\vartheta(\xi,2X-\bar x)\frac{\partial\delta\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}-\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\right]\Bigg|_{\xi=1}d\bar x+$$

$$+\int_0^1\int_0^{2X}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_X(\xi,\bar x)}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\xi}\right]+\xi^m f_X(\xi,\bar x)\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial f_X(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(\xi,\bar x)}{\partial\bar x}\right)_X\right]\xi^m\vartheta(\xi,\bar x)\right\}\delta\vartheta(\xi,2X-\bar x)d\xi\,d\bar x.$$

Окончательно получаем

$$\delta J=\int_0^1\int_0^{2X}\left\{2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_x(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\xi}\right]+\right.$$

$$+2\xi^m f_x(\xi,\bar{x})\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}+\xi^m\left[\frac{\partial f_x(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_x\right]\vartheta(\xi,\bar{x})+2\xi^m g(\xi,\bar{x})\right\}\delta\vartheta(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi\,d\bar{x}.$$

По основной лемме вариационного исчисления [2], $\delta J=0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^m\frac{\lambda_x(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\xi}\right]+f_x(\xi,\bar{x})\frac{\partial\vartheta(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}+$$

$$+g(\xi,\bar{x})+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_x(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}-\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_x\right]=0. \tag{10}$$

Так как для $0<\bar{x}<X$ $\dfrac{\partial f_x(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}=\left(\dfrac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)_x$, то при этих значениях $\bar{x}$ уравнение (10) совпадает с (1а). Итак, задачу (1а) — (4а) можно решать, отыскивая экстремаль функционала (8) при условиях (2а) — (4а) на интервале $(0, X)$. Приближения к экстремали функционала (8) можно искать, например, методом Канторовича [3], при котором s-е приближение к решению рассматриваемой задачи принимает вид

$$\vartheta_s(\xi,\bar{x})=\sum_{i=1}\varphi_i(\xi,\bar{x})\psi_i(\bar{x}), \tag{11}$$

где функции координат φ полагаем известными и зададим их следующим образом:

$$\varphi_i(\xi,\bar{x})=2i+\mathrm{Bi}_x(\bar{x})\left[1-\xi^{2i}\right], \tag{12}$$

а искомые функции ψ удовлетворяют условию

$$\psi_i(0)=0. \tag{13}$$

Подставляя (11) в (8) и интегрируя по ξ, получим функционал, для которого система уравнений Эйлера относительно функций $\psi_i(\bar{x})$ в матричной форме запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}[L(\bar{x})+L^*(2X-\bar{x})]\Psi(\bar{x})+[M^*(2X-\bar{x})]'\Psi(\bar{x})+\\+[M(\bar{x})+M^*(2X-\bar{x})]\Psi'(\bar{x})+A=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$L=\|\alpha_{ij}(\bar{x})\|,\quad M=\|\beta_{ij}(\bar{x})\|,\quad A=\begin{Vmatrix}A_1(\bar{x})\\ \vdots\\ A_s(\bar{x})\end{Vmatrix},$$

$$\Psi=\begin{Vmatrix}\psi_1(\bar{x})\\ \vdots\\ \psi_s(\bar{x})\end{Vmatrix},\quad \Psi'=\begin{Vmatrix}\psi_1'(\bar{x})\\ \vdots\\ \psi_s'(\bar{x})\end{Vmatrix},\quad M'(\bar{x})=\|\beta_{ij}'(\bar{x})\|,$$

L^* и M^* — матрицы, транспонированные L, и M соответственно; $i=1,2\ldots s$; $j=1,2\ldots s$. Элементы матриц $\alpha_{ij}(\bar{x})$, $\beta_{ij}(\bar{x})$, A_i определяются соотношениями

$$\alpha_{ij}(\bar{x})=\int\limits_0 \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^m \frac{\lambda_x(\xi,\bar{x})}{\lambda_0}\frac{\partial \varphi_j(\xi,\bar{x})}{\partial \xi}\right]+\right.$$

$$\left.+\xi^m f_x(\xi,\bar{x})\frac{\partial \varphi_j(\xi,\bar{x})}{\partial \bar{x}}-\frac{1}{2}\xi^m\left(\frac{\partial f(\xi,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)_x \varphi_j(\xi,\bar{x})\right\}\varphi_i(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi,$$

$$\beta_{ij}(\bar{x})=\int\limits_0^1 \xi^m f_x(\xi,\bar{x})\varphi_i(\xi,\bar{x})\varphi_j(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi,$$

$$A_i=2\int\limits_0^1 \xi^m g(\xi,\bar{x})\varphi_i(\xi,2X-\bar{x})\,d\xi.$$

Система линейных уравнений (14) всегда имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям $\psi_i(0)=0$. Его можно получить при конкретном задании функций f, g, Bi, $T_н$, λ.

Для частного случая стационарного гидродинамически стабилизированного ламинарного течения в круглой трубе жидкости с постоянными теплофизическими свойствами и без внутренних источников тепла, когда $f(\xi,\bar{x})=-[(3n+1)/(n+1)](1-\xi^{(n+1)/n})$ и условия Bi=const при $T_н(\bar{x})=T_0+\omega\bar{x}$ имеем при использовании второго приближения к решению соответствующей вариационной задачи

$$\psi_1(\bar{x})=-\frac{1}{2(\beta_{22}\beta_{11}-\beta_{12}^2)}\left[\frac{p_1(\beta_{22}A_1+\beta_{12}A_2)+\alpha_{22}A_1+\alpha_{12}A_2}{(p_1-p_2)p_1}(e^{p_1\bar{x}}-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{p_2(\beta_{22}A_1+\beta_{12}A_2)+\alpha_{22}A_1+\alpha_{12}A_2}{(p_2-p_1)p_2}(e^{p_2\bar{x}}-1)\right],$$

$$\psi_2(\bar{x})=-\frac{1}{2(\beta_{22}\beta_{11}-\beta_{12}^2)}\left[\frac{p_1(\beta_{21}A_1+\beta_{11}A_2)+\alpha_{12}A_1+\alpha_{11}A_2}{(p_1-p_2)p_1}(e^{p_1\bar{x}}-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{p_1(\beta_{21}A_1+\beta_{11}A_2)+\alpha_{12}A_1+\alpha_{22}A_2}{(p_2-p_1)p_2}(e^{p_2\bar{x}}-1)\right],$$

где p_1 и p_2 определяются из уравнения

$$(\beta_{22}\beta_{11}-\beta_{12}^2)p^2+(\beta_{11}\alpha_{22}+\alpha_{11}\beta_{22}-2\alpha_{12}\beta_{21})p+\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{11}^2=0. \qquad (15)$$

Следуя методике, изложенной в [4], определяем в этом случае число Нуссельта при

$$\mathrm{Nu}=\frac{1}{2}\frac{p_1p_2(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2)\omega}{C_1(\alpha_{21}A_1+\alpha_{12}A_2)+C_2(\alpha_{12}A_1+\alpha_{11}A_2)}$$

где

$$C_1=8\frac{3n+1}{n+1}\left[\frac{2+\mathrm{Bi}}{2}-\frac{\mathrm{Bi}}{4}+\frac{(2+\mathrm{Bi})n}{3n+1}+\frac{\mathrm{Bi}\cdot n}{5n+1}\right]$$

$$C_2=8\frac{3n+1}{n+1}\left[\frac{4+\mathrm{Bi}}{2}-\frac{\mathrm{Bi}}{6}-\frac{(4+\mathrm{Bi})n}{3n+1}+\frac{\mathrm{Bi}\cdot n}{7n+1}\right]$$

Следует отметить, что число Nu не зависит от ω, так как A_1 и A_2 — линейные функции ω.

При температуре окружающей среды, изменяющейся по длине трубы экспоненциально $T_н = T_0 + \omega(1 - e^{-k\bar{x}})$, имеем

$$\psi_1(\bar{x}) = \frac{\omega k}{2(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{12}^2)}\left\{\frac{e^{p_1\bar{x}} - 1}{(p_1 - p_2)(p_1 + k)p_1}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)p_1(\alpha_{22} + \beta_{22}p_1) + \right.\right.$$

$$\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)p_1(\alpha_{12} + \beta_{12}p_1)\right] + \frac{e^{p_2\bar{x}} - 1}{(p_1 - p_2)(p_2 + k)p_2}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)p_2(\alpha_{22} + \beta_{22}p_2) + \right.$$

$$\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)p_2(\alpha_{12} + \beta_{12}p_1)\right] - \frac{e^{-k\bar{x}} - 1}{(p_1 + k)(p_2 + k)}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)(\alpha_{22} - \beta_{22}k) + \right.$$

$$\left.\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)(\alpha_{12} - \beta_{12}k)\right]\right\},$$

$$\psi_2(\bar{x}) = \frac{\omega k}{2(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{12}^2)}\left\{\frac{e^{p_1\bar{x}} - 1}{(p_2 - p_1)(p_1 + k)p_1}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)p_1(\alpha_{12} + \beta_{12}p_1) + \right.\right.$$

$$\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)p_1(\alpha_{11} + \beta_{11}p_1)\right] + \frac{e^{p_2\bar{x}} - 1}{(p_2 - p_1)(p_2 + k)p_2}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)p_2(\alpha_{12} + \beta_{12}p_1) + \right.$$

$$\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)p_2(\alpha_{11} + \beta_{11}p_2)\right] - \frac{e^{-k\bar{x}} - 1}{(p_1 + k)(p_2 + k)}\left[\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)(\alpha_{12} - \beta_{12}k) + \right.$$

$$\left.\left. + 2\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)(\alpha_{11} - \beta_{11}k)\right]\right\},$$

где p_1 и p_2 — по-прежнему определяются из уравнения (15). В предположении $|p_1| < |p_2|$ и $k > -p_1$ получаем $\mathrm{Nu} = -p_1/2$ при $\bar{x} \to \infty$. Отсутствие зависимости Nu от k при $\bar{x} \to \infty$ для экспоненциального изменения температуры на стенке находится в полном соответствии с результатами [5].

При $k \to \infty$ имеем на входе в трубу скачок $T_н$ по отношению начальной температуры жидкости T_0; интенсивность стабилизированной теплоотдачи ($\bar{x} \to \infty$) по-прежнему определяется соотношением $\mathrm{Nu} = -p_1/2$.

Легко показать, что в частном случае ламинарного течения в круглой трубе ньютоновской жидкости ($n = 1$) при линейном изменении $T_н$ и $\mathrm{Bi} = \infty$ на участке стабилизированной теплоотдачи $\mathrm{Nu} = 4{,}36$, что совпадает с известным точным значением [4]. Для тех же условий при экспоненциальном изменении температуры на стенке и $k > -p_1$ получаем $\mathrm{Nu} = 3{,}14$ при использовании соответствующей формулы для числа Нуссельта второго приближения.

Заметим, что совпадение полученных значений Nu с точными подтверждает пригодность второго приближения для описания температурного поля и интенсивности теплоотдачи на достаточном удалении от входного сечения канала.

Авиационный институт им. С. Орджоникидзе
г. Уфа

Поступила в редакцию
15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Я. Айнола.* Инж.-физ. ж., *12*, № 4, 1967.
2. *Л. Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. «Наука», 1969.
3. *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
4. *Б. С. Петухов.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в канале. «Энергия», 1967.
5. *В. Д. Виленский.* Теплофизика высоких температур, *4*, № 5, 1966.