Н. И. Нессонов, Характеры бесконечной симметрической инверсной полугруппы, *Функц. анализ и его прил.*, 2020, том 54, выпуск 3, 38–47

DOI: 10.4213/faa3745

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 3, с. 38–47

УДК 519.17+519.21

Характеры бесконечной симметрической инверсной полугруппы

© 2020. Н. И. Нессонов

В статье дается полное описание неразложимых характеров на бесконечной симметрической инверсной полугруппе. Метод существенно опирается на разложение элементов этой полугруппы в произведение независимых квазициклов и теорему мультипликативности. Также построены реализации всех факторпредставлений конечного типа.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3745

§ 1. Введение

Симметрическая инверсная полугруппа n-элементного множества $X_n = \{1, \dots, n\}$ (X_∞ — множество всех натуральных чисел), обозначаемая далее через R_n, состоит из частичных биекций множества X_n в себя. Следуя [5], обозначим через $\mathcal{D}(r)$ и $\mathcal{I}(r)$ область определения биекции $r \in R_n$ и область ее значений соответственно: $r(\mathcal{D}(r)) = \mathcal{I}(r)$. В случае $n = \infty$ мы предполагаем, что дополнение множества $\{x \in X_\infty : rx = x\}$ конечно для всех $r \in R_\infty$. Заметим, что в R_n существует инволюция, обозначаемая символом *. А именно, область определения частичной биекция r^* есть $\mathcal{I}(r)$ и $r^*(i) = d \in \mathcal{D}(r)$, если $r(d) = i$. Полугруппу R_n удобно реализовать в виде $\{0, 1\}$-матриц размера $n \times n$:

$$r = [r_{lk}]_{l,k=1}^{n}, \quad \text{где } r_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{если } r(k) = l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, если $k \notin \mathcal{D}(r)$, то $r_{lk} = 0$ для всех $l \in X_n$. Умножению элементов полугруппы соответствует обычное матричное умножение, а инволюции — транспонирование матриц. Далее удобно отождествлять R_n с этой реализацией. Полугруппа R_n содержит симметрическую группу $\mathfrak{S}_n$, состоящую при $n < \infty$ из всех биекций множества X_n. В случае $n = \infty$ подгруппа $\mathfrak{S}_\infty$ состоит из всех конечных биекций множества X_∞. В частности, $s = [s_{lk}] \in R_n$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{S}_n$, когда матрица $[s_{lk}]$ обратима. Полугруппа R_n содержит абелеву полугруппу тождественных частичных биекций, обозначаемую через Diag_n и определяемую условиями

$$r \in \mathrm{Diag}_n \iff \mathcal{D}(r) = \mathcal{I}(r) \text{ и } r(x) = x \text{ для всех } x \in \mathcal{D}(r).$$

Заметим, что биекции с пустой областью определения соответствует нулевая матрица и она является нулем полугруппы. В частности, в полугруппе R_∞ нет нуля.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть e — единица полугруппы R_∞ и I — единичный оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Под $\star$-представлением полугруппы R_∞ мы понимаем гомоморфизм $R_\infty \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такой, что $\pi(r^\star) = (\pi(r))^*$, где $(\pi(r))^*$ — оператор, сопряженный к $\pi(r)$, и $\pi(e) = I$. Следовательно, при $s \in \mathfrak{S}_\infty$ оператор $\pi(s)$ унитарен, а при $d \in \mathrm{Diag}_\infty$ оператор $\pi(d)$ — самосопряженный проектор.

Результат этой статьи — конструкция реализаций II_1-факторпредставлений полугруппы R_∞ и доказательство полноты соответствующего списка характеров. Мотивацией для этой работы стала статья [1] А. М. Вершика и П. П. Никитина, в которой они, используя правило ветвления для неприводимых представлений конечных полугрупп R_n, нашли полный список характеров полугруппы R_∞.

В этой работе мы используем иной подход, который не опирается на свойства представлений конечных допредельных полугрупп. Принципиальным здесь является возможность, обнаруженная в [5], разложения элементов полугруппы в произведение дизъюнктных квазициклов (аналог разложения в произведение дизъюнктных циклов для симметрической группы) (теорема 1) и свойство мультипликативности характеров факторпредставлений (теорема 2). Это позволило существенно упростить формулу для характера из [1] (теорема 2.12) и значительно сократить ее вывод. Также мы даем новые реализации соответствующих представлений, охватывающие все значения параметров характеров. Наш подход, основанный на изучении свойств асимптотических операторов, введенных А. Ю. Окуньковым в [2], [3], позволяет получить описание более общего класса факторных состояний на R_∞. А именно, для них свойство центральности, характеризующее характеры, заменяется на менее ограничительное свойство $\mathfrak{S}_\infty$-инвариантности. Факторпредставления, соответствующие таким состояниям, уже могут быть полуконечными и типа III.

Я благодарен Г. И. Ольшанскому за тщательный анализ статьи. В частности, благодаря его неоднократным советам и замечаниям были устранены существенные пробелы в тексте и акцентировано внимание на теореме 1. Хочу поблагодарить П. П. Никитина за помощь при сравнении формул для характеров. Я признателен А. М. Вершику за внимание.

§ 2. Аналог разложения на циклы в R_∞

В R_n существует аналог разложения элементов группы $\mathfrak{S}_n$ в произведение дизъюнктных циклов [5] (теорема 1). Напомним его построение.

Для $r \in R_n$ и $a \in \mathcal{D}(r) \setminus \mathcal{I}(r)$ положим $\mathfrak{m}(r) = \min\{k \geqslant 1 : r^k \in \mathcal{I}(r) \setminus \mathcal{D}(r)\}$ и $\mathfrak{T}_a = \{a, r(a), \dots, r^{\mathfrak{m}(r)}(a)\}$. Если $a, b \in \mathcal{D}(r) \setminus \mathcal{I}(r)$ и $a \neq b$, то $\mathfrak{T}_a \cap \mathfrak{T}_b = \varnothing$. Зададим частичную биекцию ${}^a q$ формулой

$$
{}^a q(x) = \begin{cases} r(x), & \text{если } x \in \mathfrak{T}_a \setminus r^{\mathfrak{m}(r)}(a), \\ x, & \text{если } x \in X_n \setminus \mathfrak{T}_a. \end{cases}.
$$

Понятно, что $\mathcal{D}({}^a q) = X_n \setminus r^{\mathfrak{m}(r)}(a)$, $\mathcal{I}({}^a q) = X_n \setminus a$.

Если ${}^a c = \{a \mapsto r(a) \mapsto \cdots \mapsto r^{\mathfrak{m}(r)}(a) \mapsto a\}$ — обычный цикл и $\epsilon_{\{j\}}$ — элемент из Diag_n с областью определения $X_n \setminus j$, то

$$ {}^a q = {}^a c \cdot \epsilon_{\{r^{\mathfrak{m}(r)}(a)\}}. \tag{1} $$

Далее частичную биекцию ${}^a q$ мы будем называть нетривиальным *квазициклом*. Элементы из Diag_n, у которых область определения получается выбрасыванием из X_n одной точки, удобно также называть квазициклами (тривиальными).

Если $a, b \in \mathcal{D}(r) \setminus \mathcal{I}(r)$ и $a \neq b$, то соответствующие им согласно (1) циклы ${}^a c$ и ${}^b c$ дизъюнктны и их длина не меньше двух. В этом случае квазициклы ${}^a q$ и ${}^b q$ мы также будем называть дизъюнктными.

Назовем носителем элемента $r = [r_{mn}] \in R_\infty$ множество

$$ \operatorname{supp} r = \{n \in \mathbb{N} : r_{nn} = 0\}. $$

Таким образом мы приходим к важному утверждению из [5].

Теорема 1. *Для $r = [r_{mn}] \in R_\infty$ имеет место следующее единственное разложение в произведение попарно дизъюнктных квазициклов и обычных циклов*:

$$ r = \Bigg[\prod_{a \in \mathcal{D}(r) \setminus \mathcal{I}(r)} {}^a q \Bigg] \Bigg[\prod_i c_i^{(r)} \Bigg] d^{(r)}, \tag{2} $$

где $c_i^{(r)}$ — обычный цикл, а $d^{(r)} \in \mathrm{Diag}_\infty$.

§ 3. Результаты

Пусть π есть II_1-фактор-$\star$-представление полугруппы R_∞ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через $(\pi(R_\infty))'$ коммутант множества $\pi(R_\infty)$. Пусть $(\pi(R_\infty))'' = ((\pi(R_\infty))')'$ есть w^*-алгебра, порожденная множеством $\pi(R_\infty)$, совпадающая с его бикоммутантом. Обозначим через $[v_1, v_2, \ldots]$ замыкание линейной оболочки векторов $v_1, v_2, \dots \in \mathcal{H}$. Пусть tr — нормальный след на факторе $(\pi(R_\infty))''$. Заменяя при необходимости π на квазиэквивалентное представление, мы будем предполагать далее, что

существует единичный вектор $\xi \in \mathcal{H}$, такой, что

$$ [\pi(R_\infty)\xi] = [(\pi(R_\infty))'\xi] = \mathcal{H}, \ \mathrm{tr}(A) = (A\xi, \xi) \ \text{ для всех } \ A \in (\pi(R_\infty))''. \tag{3} $$

Положим $f(r) = \mathrm{tr}(\pi(r))$. Заметим, что при условии (3) представление π унитарно эквивалентно ГНС-представлению, построенному по характеру f.

Следующее утверждение является конкретизацией общего свойства асимптотической факторизации неразложимых состояний на аппроксимативно конечномерных алгебрах, замеченного Пауэрсом в [11], на случай полугрупповой алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$. Для характеров бесконечномерной унитарной группы похожая факторизация получена Войкулеску в [12]. Идея Пауэрса применялась для доказательства свойства мультипликативности сферических функций на $GL(\infty)$ в [6].

Теорема 2 (теорема мультипликативности). *Если произвольный элемент $r \in R_\infty$ представлен в виде произведения $r = r_1 \cdot r_2$, где $\operatorname{supp} r_1 \cap \operatorname{supp} r_2 = \varnothing$, то $f(r) = f(r_1) f(r_2)$.*

Доказательство этой теоремы проводится естественной адаптацией рассуждений, изложенных в [11], [12] и [6], к случаю $\mathbb{C}[R_\infty]$.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 2 и [4].

Предложение 3. *Сужение характера f на подгруппу $\mathfrak{S}_\infty \subset R_\infty$ есть характер Тома $\chi_{\alpha\,\beta}$, где $\alpha = \{\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots > 0\}$ и $\beta = \{\beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots > 0\}$ — соответствующие параметры Тома.*

Положим $f(\epsilon_{\{1\}}) = \rho$. Из $\mathfrak{S}_\infty$-инвариантности характера f вытекает, что $f(\epsilon_{\{j\}}) = \rho$ для всех $j = 1, 2, \dots$.

Замечание 1. Из теорем 1, 2 и соотношения (1) следует, что характер f определяется своими значениями на циклах и квазициклах.

В следующем утверждении мы даем элементарный вывод формулы для характера f. А именно, мы находим его значения на квазициклах и циклах. Можно показать, что наше выражение при подходящем выборе параметров совпадает с формулой из теоремы 2.12 статьи [1]. Ее громоздкий вид обусловлен тем обстоятельством, что она написана для общего элемента полугруппы; т. е. авторы не использовали свойство мультипликативности характера и разложение на квазициклы (теорема 1).

Теорема 4 (формула для характера). *Пусть α, β такие же, как в предложении 3. Тогда найдется параметр Тома $\alpha_i \in \alpha \cup 0$, такой, что для $c = (1\,2\,\dots\,k) \in \mathfrak{S}_\infty$ и $a \in \operatorname{supp} c = \{1, \dots, k\}$ имеют место равенства $f(c\epsilon_{\{a\}}) = \alpha_i^k$ и $f(c) = \chi_{\alpha\beta}(c)$.*

Эта теорема — прямое следствие предложения 5 и леммы 9, доказанных ниже.

Замечание 2. Теорема 4 дает необходимые условия того, что функция f, удовлетворяющая условию мультипликативности (теорема 2) и равная единице на единице полугруппы R_∞, является характером факторпредставления конечного типа. В §5 мы строим реализации таких представлений, доказывая тем самым достаточность условий из теоремы 4.

Замечание 3 (соответствие с формулой для характеров полугруппы R_∞ из работы [1]). Для сравнения формулы для характера из теоремы 2.12 работы [1] с нашей теоремой 4 приведем эту формулу, поменяв обозначения α, β, δ параметров характера, используемые в [1], на $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\delta}$. Тогда значение характера на общем *приведенном*[1] элементе r полугруппы R_∞ вычисляется по формуле

$$\chi_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\delta}}(r) = \sum_{l=0}^{n(r)} \delta^{n(r)-l}(1-\delta)^l \cdot \sum_{\widetilde{r}\in M_l(r)} \chi_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(\widetilde{r}). \tag{4}$$

Теперь выразим параметры α, β через $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\delta}$.

Пусть $r = c\epsilon_{\{a\}}$ (см. теорему 4). Тогда у r нет обратимой части в смысле [1]. Это означает, что внешняя сумма сводится к одному слагаемому $l = 0$ и $\chi_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\delta}}(r) = \delta^{n(r)} = \delta^k$. Следовательно,

$$\delta = \alpha_i. \tag{5}$$

[1] В обозначениях нашей статьи это означает, что $\operatorname{supp} r = \{1, \dots, \#(\operatorname{supp} r)\}$.

Если $r = c$, то $n(r) = k$ и во внешней сумме остается ровно два слагаемых: $l = 0$ и $l = k$. Во внутренней сумме $M_k(r) = \{c\}$, а при всех $l < k$ множества $M_l(r)$ пустые. Следовательно,

$$\chi_{\alpha\beta}(c) = \chi_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\delta}}(c) = \delta^k + (1-\delta)^k \, \chi_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(c).$$

Отсюда, используя (5) и формулу Тома [4], получаем

$$\alpha_j = (1-\alpha_i)\widehat{\alpha}_j \quad \text{для всех } \ j < i, \qquad \alpha_j = (1-\alpha_i)\widehat{\alpha}_{j-1} \quad \text{при } \ j > i,$$
$$\beta_j = (1-\alpha_i)\widehat{\beta}_j \quad \text{для всех } \ j.$$

§ 4. Свойства II_1-представлений

Следующее утверждения является одним из ключевых для доказательства теоремы 4.

Предложение 5. *Пусть q — квазицикл. Тогда $f(q) = \rho^{\#(\operatorname{supp} q)}$, где $\rho = f(\epsilon_{\{j\}})$.*

Доказательство. Ввиду формулы (1) квазицикл q можно записать в виде произведения: $q = c\epsilon_{\{a\}}$, где $c = (1 \ \ldots \ n) \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\epsilon_{\{a\}} \in \mathrm{Diag}_\infty$. Не ограничивая общности, предположим, что $a = 1$.

Так как $c = (1\ n)(1\ n-1)\cdots(1\ 3)(1\ 2)$, то из соотношений $(1\ 2)\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_1\epsilon_2$ и $f(r_1 r_2) = f(r_2 r_1)$ получаем

$$\begin{aligned} f(c\epsilon_{\{1\}}) &= f((1\ n)(1\ n-1)\cdots(1\ 3)\,\epsilon_{\{2\}}\,(1\ 2)\,\epsilon_{\{1\}}) = f(\epsilon_{\{2\}}c\epsilon_{\{1\}}) \\ &= f(\epsilon_{\{2\}}c\epsilon_{\{1\}}\epsilon_{\{2\}}) = f((1\ n)(1\ n-1)\cdots(1\ 3)\epsilon_{\{1\}}\epsilon_{\{2\}}). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему мультипликативности, получаем

$$f(c\epsilon_{\{1\}}) = f((1\ n)(1\ n-1)\cdots(1\ 3)\epsilon_{\{1\}})f(\epsilon_{\{2\}}).$$

Далее следуют итерации приведенного рассуждения. □

Итоговым результатом этого параграфа является лемма 9, которая вместе с предложением 5 дает доказательство теоремы 4.

Сформулируем две вспомогательные леммы, для доказательства которых надо просто повторить рассуждения, изложенные в [2] и [3] при обосновании подобных утверждений.

Лемма 6. *Для любого k последовательность $\{\pi((k\ n))\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в слабой операторной топологии к самосопряженному оператору $\mathcal{O}_k \in \pi(\mathfrak{S}_\infty)'' \subset \pi(R_\infty)''$.*

Лемма 7. *Пусть $S(\mathcal{O}_k)$ — спектр оператора $\mathcal{O}_k$ и μ — спектральная мера оператора $\mathcal{O}_k$, определяемая вектором ξ. Тогда имеют место следующие факты:*

(i) *мера μ дискретна и единственной точкой сгущения для ее атомов может быть нуль;*

(ii) *если* $\mathcal{O}_k = \sum_{\lambda \in S(\mathcal{O}_k)} \lambda E_k(\lambda)$ — *спектральное разложение оператора* $\mathcal{O}_k$, *то* $(E_k(\lambda)\xi, \xi) = m(\lambda) \cdot |\lambda|$, *где* $m(\lambda) \in \mathbb{N} \cup 0$;

(iii) *если* $\lambda \in S(\mathcal{O}_k)$ *положительно (отрицательно), то существует параметр Тома (см. предложение 3), такой, что* $\lambda = \alpha_k$ $(\lambda = -\beta_k)$ *и* $m(\lambda) = \#\{k : \alpha_k = \lambda\} \geqslant 1$ $(\#\{k : -\beta_k = \lambda\} \geqslant 1)$.

Теперь докажем еще две важные вспомогательные леммы.

Лемма 8. *Операторы* $\mathcal{O}_j$ *и* $\pi(\epsilon_{\{k\}})$ *коммутируют.*

Доказательство. При $k \neq j$ утверждение леммы очевидно. Принимая во внимание (3), достаточно показать, что

$$(\pi(\epsilon_{\{k\}}) \cdot \mathcal{O}_k\xi, \pi(r)\xi) = (\mathcal{O}_k \cdot \pi(\epsilon_{\{k\}})\xi, \pi(r)\xi) \quad \text{для всех } r \in R_\infty. \tag{6}$$

Зафиксируем натуральное $N(r)$, такое, что $r \in R_{N(r)}$. Для достаточно большого N имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
(\pi(\epsilon_{\{k\}}) \cdot \mathcal{O}_k\xi, \pi(r)\xi) &\overset{\text{лемма } 6}{=} \lim_{n\to\infty} (\pi(\epsilon_{\{k\}}) \cdot \pi((k\ n))\xi, \pi(r)\xi) \\
&\overset{N>\max\{k,N(r)\}}{=} (\pi(\epsilon_{\{k\}}) \cdot \pi((k\ N))\xi, \pi(r)\xi) = (\pi(\epsilon_{\{k\}}) \cdot \pi((k\ N)) \cdot (\pi(r))^*\xi, \xi) \\
&= (\pi((k\ N)) \cdot \pi(\epsilon_{\{N\}}) \cdot (\pi(r))^*\xi, \xi) \overset{N>N(r)}{=} (\pi((k\ N)) \cdot (\pi(r))^* \cdot \pi(\epsilon_{\{N\}})\xi, \xi) \\
&= (\pi(\epsilon_{\{N\}}) \cdot \pi((k\ N)) \cdot (\pi(r))^*\xi, \xi) = (\pi(\epsilon_{\{N\}}) \cdot \pi((k\ N))\xi, \pi(r)\xi) \\
&= (\pi((k\ N)) \cdot \pi(\epsilon_{\{k\}})\xi, \pi(r)\xi) = (\mathcal{O}_k \cdot \pi(\epsilon_{\{k\}})\xi, \pi(r)\xi).
\end{aligned}$$

Равенство (6) доказано. □

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{A}_j$ *есть* w^**-алгебра, порожденная операторами* $\mathcal{O}_j$ *и* $\pi(\epsilon_{\{j\}})$. *Тогда* $\pi(\epsilon_{\{j\}})$ — *минимальный проектор в* $\mathfrak{A}_j$ *и при* $\pi(\epsilon_{\{j\}}) \neq 0$ *найдется параметр Тома* α_i, *для которого* $(\pi(\epsilon_{\{j\}})\xi, \xi) = \alpha_i$.

Доказательство. Заметим, что

$$\pi(\epsilon_{\{j\}}) \cdot \pi((j\ n)) \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}}) = \pi(\epsilon_{\{j\}}) \cdot \pi(\epsilon_{\{n\}}). \tag{7}$$

Так как π есть II_1-факторпредставление, то в слабой операторной топологии существует предел последовательности $\{\pi(\epsilon_{\{n\}})\}$:

$$w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \pi(\epsilon_{\{n\}}) = \kappa \cdot I, \quad \text{где } \kappa = (\pi(\epsilon_{\{1\}})\xi, \xi).$$

Отсюда, используя равенство (7) и леммы 6 и 8, после предельного перехода $n \to \infty$ мы получаем

$$\mathcal{O}_j \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}}) = \pi(\epsilon_{\{j\}}) \cdot \mathcal{O}_j \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}}) = \kappa \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}}). \tag{8}$$

Следовательно, $\mathcal{O}_j^m \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}}) = \kappa^m \cdot \pi(\epsilon_{\{j\}})$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, в частности, минимальность проектора $\pi(\epsilon_{\{j\}})$ в $\mathfrak{A}_j$ и существование единственного спектрального проектора $E_j(\hat{\lambda})$, для которого

$$\hat{\lambda} E_j(\hat{\lambda}) \pi(\epsilon_{\{j\}}) = \kappa \pi(\epsilon_{\{j\}}).$$

Следовательно, предполагая, что $\pi(\epsilon_{\{j\}}) \neq 0$, и учитывая условие (3), получаем

$$\hat{\lambda} = \kappa = (\pi(\epsilon_{\{j\}})\xi, \xi) > 0.$$

Теперь наше утверждение вытекает из п. (iii) леммы 7. □

§ 5. Реализации II_1-факторпредставлений

Пусть $B(\mathbf{H})$ — множество всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Обозначим через Tr нормальный след на $B(\mathbf{H})$, значения которого на минимальных ненулевых проекторах равны единице. Зафиксируем самосопряженный ядерный оператор A, такой, что $\mathrm{Tr}(A) \leqslant 1$, и оператор $\mathbf{q}$, который далее будет или минимальным проектором из $B(\mathbf{H})$, или нулем, со следующими свойствами:

(a) $A\mathbf{q} = \mathbf{q}A$, т. е. $\mathbf{q}$ является проектором на не более чем одномерное собственное подпространство оператора A;

(b) если $\mathrm{Tr}(|A|) = 1$, то $\operatorname{Ker} A = 0$;

(c) если $\mathrm{Tr}(|A|) < 1$, то $\dim(\operatorname{Ker} A) = \infty$;

(d) $\mathbf{q}\cdot E([-1,0]) = 0$, где $E(\Delta)$ — спектральный проектор оператора A; т. е. при $\mathbf{q} \neq 0$ одномерное подпространство $\mathbf{qH}$ лежит в собственном подпространстве, соответствующем положительному собственному значению оператора A.

Замечание 4. Из условия (a) вытекает, что операторы $\mathbf{q}$ и A можно считать, не ограничивая общности, диагональными. Если (α, β) — набор параметров Тома представления $\mathcal{L}_A^{(0)}$, построенного в разд. 5.3, то множество положительных диагональных элементов оператора A совпадает с набором α, а $-\beta$ есть семейство отрицательных диагональных элементов оператора A.

Замечание 5. Излагаемая далее конструкция похожа на конструкции представлений группы $\mathfrak{S}_\infty$ в [13, с. 134] и [8]. Однако в этих работах возникало условие, что сумма параметров Тома равна 1, которое у нас снимается..

5.1. Вложение полугруппы R_∞ в $B(\mathbf{H})^{\otimes\infty}$. Сначала подчеркнем, что излагаемые ниже построения не зависят от условий на $\mathrm{Tr}(|A|)$, или, что то же самое, на параметры Тома. Их можно рассматривать как обобщение представления из [10] (лемма 5.4) на случай суперпространства.

Отождествляя $a \in B(\mathbf{H})^{\otimes k}$ с $a \otimes \mathrm{I} \in B(\mathbf{H})^{\otimes(k+1)}$, определим алгебру

$$B(\mathbf{H})^{\otimes\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{H})^{\otimes n}.$$

Положим

$$a^{(k)} = \underbrace{\mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I}}_{k-1} \otimes a \otimes \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \cdots, \qquad a \in B(\mathbf{H}),$$

и $U_{E_-}^{(k,\,k+1)} = I - 2E_-^{(k)} E_-^{(k+1)}$, где $E_- = E([-1,0[)$. Определим отображение T следующим образом:

$$\mathfrak{S}_\infty \ni (k\ k+1) \xrightarrow{T} U_{E_-}^{(k,\,k+1)} \sum_{ij} e_{ij}^{(k)} e_{ji}^{(k+1)}, \qquad \epsilon_{\{j\}} \overset{T}{\mapsto} \mathbf{q}^{(j)}.$$

Заметим, что $T(s)$ является унитарным при $s \in \mathfrak{S}_\infty$.

Покажем, что T расширяется до $\star$-гомоморфизма полугруппы R_∞ в алгебру $B(\mathbf{H})^{\otimes\infty}$. Для этого мы воспользуемся результатами из [9], которые в более современном изложении содержатся в [7, с. 7], для реализации полугруппы R_∞ через систему кокстеровских образующих $s_i = (i\ i+1)$ симметрической подгруппы и образующую $\epsilon_{\{1\}}$ с соотношениями

$$\epsilon_{\{1\}}^2 = \epsilon_{\{1\}}, \quad \epsilon_{\{1\}} s_i \epsilon_{\{1\}} = \epsilon_{\{1\}} s_i \quad \text{при } i > 1, \qquad (\epsilon_{\{1\}} s_1)^2 = (s_1 \epsilon_{\{1\}})^2 = \epsilon_{\{1\}} s_1 \epsilon_{\{1\}}.$$

Проверяя соотношения между $T(s_i)$ $(i \geqslant 1)$ и $T(\epsilon_{\{1\}})$, убеждаемся, что T расширяется до гомоморфизма.

5.2. Гильбертово пространство $\mathcal{H}_A$. Зафиксируем систему матричных единиц $\{e_{kl}\}_{k,l\in\mathbb{S}} \subset B(\mathbf{H})$ и предположим для удобства, что $\mathbf{q}e_{ll} = e_{ll}\mathbf{q}$, $Ae_{ll} = e_{ll}A$ для всех $l \in \mathbb{S} = \{1, \dots, \dim \mathbf{H}\}$. Положим $\mathbb{S}_{\mathrm{reg}} = \{n_1 < n_2 < \cdots\} = \{l : e_{ll}\mathbf{H} \subset \operatorname{Ker} A\}$ и зададим состояние ψ_k на $B(\mathbf{H})$ формулой

$$\psi_k(b) = \operatorname{Tr}(b|A|) + (1 - \operatorname{Tr}(|A|)) \operatorname{Tr}(b e_{n_k n_k}), \qquad b \in B(\mathbf{H}).$$

Соотношение ${}_1\psi_k(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = \prod_{j=1}^k \psi_j(b_j)$ определяет состояние ${}_1\psi_k$ на $B(\mathbf{H})^{\otimes k}$. Из свойств (a)–(b), используя определение вложения T, получаем свойство центральности состояния ${}_1\psi_k$:

$${}_1\psi_k(T(r_1)T(r_2)) = {}_1\psi_k(T(r_2)T(r_1)) \quad \text{для всех } r_1, r_2 \in R_\infty. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_k$ гильбертово пространство, задаваемое скалярным произведением $(v, u)_k = {}_1\psi_k(u^*v)$ на $B(\mathbf{H})^{\otimes k}$. Отождествляя $\mathcal{H}_k$ с подпространством в $\mathcal{H}_{k+1}$ с помощью вложения $\mathcal{H}_k \ni v \mapsto v \otimes \mathrm{I} \in \mathcal{H}_{k+1}$, определим гильбертово пространство $\mathcal{H}_A$ как пополнение множества $\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{H}_k$.

5.3. Левое действие полугруппы R_∞ на $\mathcal{H}_A$. Обозначим через $\mathcal{L}_A(r)$, где $r \in R_\infty$, оператор в $\mathcal{H}_A$, определяемый левым умножением на $T(r)$:

$$B(\mathbf{H})^{\otimes\infty} \ni x \overset{\mathcal{L}_A(r)}{\longmapsto} T(r)x.$$

Так как T — гомоморфизм, то из определения скалярного произведения в $\mathcal{H}_A$ мы получаем, что $\mathcal{L}_A$ есть $\star$-представление полугруппы R_∞.

Пусть ξ_0 — единичный вектор в $\mathcal{H}_A$, определяемый единицей алгебры $B(\mathbf{H})^{\otimes\infty}$. Положим $f_A^{(\mathbf{q})}(r) = (\mathcal{L}_A(r)\xi_0, \xi_0)$, $r \in R_\infty$. Из определения представления $\mathcal{L}_A$ путем прямых вычислений получаем формулу для значений функции $f_A^{(\mathbf{q})}$ на циклах и квазициклах:

$$f_A^{(\mathbf{q})}(r) = \begin{cases} \operatorname{Tr}(|A|A^{k-1}), & \text{если } r = c = (1\ \dots\ k), \\ \operatorname{Tr}(\mathbf{q}|A|^k), & \text{если } r = c\epsilon_{\{1\}}. \end{cases} \tag{10}$$

Из определений вложения T (см. разд. 5.1) и состояний ${}_1\psi_k$ (см. разд. 5.2) вытекает, что состояние $f_A^{(\mathbf{q})}$ обладает свойством мультипликативности (теорема 2). Отсюда, учитывая (9), получаем, что сужение $\mathcal{L}_A$ на подпространство

$\mathcal{H}_A^{(0)} = [\mathcal{L}_A(R_\infty)\xi_0]$ является II_1-факторпредставлением полугруппы R_∞, которое мы обозначим через $\mathcal{L}_A^{(0)}$.

Сравнивая (10) с теоремой 4, мы видим, что параметры Тома представления $\mathcal{L}_A^{(0)}$ совпадают с собственными числами (с учетом кратности) оператора A.

5.4. Правое действие полугруппы R_∞ на $\mathcal{H}_A$. Если $\mathrm{Tr}(|A|) = 1$, то оператор $\mathcal{R}_A(r)$, определяемый отображением

$$B(\mathbf{H})^{\otimes\infty} \ni x \overset{\mathcal{R}_A(r)}{\mapsto} xT(r^*),$$

также корректно определен для всех $r \in R_\infty$, а $\mathcal{R}_A$ является $\star$-представлением полугруппы R_∞. Очевидно, что $\mathcal{R}_A(R_\infty)$ принадлежит коммутанту представления $\mathcal{L}_A$.

Если $\mathrm{Tr}(|A|) < 1$, то уже для $r \in \mathfrak{S}_\infty$ правое умножение на $T(r^*)$ не является корректно определенным оператором во всем пространстве $\mathcal{H}_A$. Например, рассматривая проектор $E_1 = e_{n_2n_2} \otimes \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \otimes \ldots$ как элемент пространства $\mathcal{H}_A$, мы видим, что

$$\|E_1\|^2 = \psi_1(e_{n_2n_2}) = 0.$$

С другой стороны

$$\|E_1T((1\ 2))\|^2 = \|\mathrm{I} \otimes e_{n_2n_2} \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots\|^2 = (1 - \mathrm{Tr}(|A|)) > 0.$$

Но в подпространстве $\mathcal{H}_A^{(0)}$ (см. разд. 5.3) ввиду центральности состояния $f_A^{(\mathbf{q})}$ правое умножение задает корректные операторы $\mathcal{R}_A^{(0)}(r)$ из коммутанта сужения представления $\mathcal{L}_A$ на $\mathcal{H}_A^{(0)}$. Этот факт — следствие абстрактной конструкции представления группы (полугруппы) $G \times G$ по центральному состоянию на группе (полугруппе) G. Таким образом, в $\mathcal{H}_A^{(0)}$ мы получили представление $\Pi^{(0)}$ полугруппы $R_\infty \times R_\infty$: $\Pi^{(0)}((r_1, r_2)) = \mathcal{L}_A^{(0)}(r_1) \cdot \mathcal{R}_A^{(0)}(r_2)$.

Было бы хорошо построить представление Π полугруппы $R_\infty \times R_\infty$ во всем пространстве $\mathcal{H}_A$, которое при сужении на $\mathcal{H}_A^{(0)}$ совпадает с $\Pi^{(0)}$ и

$$\Pi((r, e))\eta = \mathcal{L}_A(r)\eta \quad \text{для всех } \eta \in \mathcal{H}_A, \tag{11}$$

где e — единица в R_∞.

Для этого определим в $\mathbf{H}$ унитарное представление $\mathfrak{R}$ группы $\mathfrak{S}_\infty$:

$$\mathfrak{R}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} e_{s(k)\,k} + \sum_{l \in \mathbb{S}\setminus\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}} e_{ll}.$$

Далее замечаем, что отображение

$$\theta_s\colon b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \mapsto \mathfrak{R}(s)b_1\mathfrak{R}(s)^* \otimes \mathfrak{R}(s)b_2\mathfrak{R}(s)^* \otimes \cdots$$

задает автоморфизм алгебры $B(\mathbf{H})^{\otimes\infty}$ и

$$\theta_s(T(r)) = T(r) \quad \text{для всех } r \in R_\infty,\ s \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{12}$$

Теперь определим правое действие $\mathcal{R}_A$ полугруппы R_∞ отображениями

$$B(\mathbf{H})^{\otimes\infty} \ni x \overset{\mathcal{R}_A(s)}{\longmapsto} \theta_s(x)T(s^*) \text{ при } s \in \mathfrak{S}_\infty, \qquad x \overset{\mathcal{R}_A(\epsilon_{\{1\}})}{\longmapsto} x\mathbf{q}^{(1)}.$$

Нетрудно увидеть, что $\mathcal{R}_A(s)$ — унитарный оператор из $(\mathcal{L}(R_\infty))'$ при $s \in \mathfrak{S}_\infty$, а $\mathcal{R}_A(\epsilon_{\{1\}})$ расширяется по непрерывности до проектора из $(\mathcal{L}(R_\infty))'$. Продолжая $\mathcal{R}_A$ по мультипликативности с образующих на всю R_∞, мы получаем $\star$-представление полугруппы. Следовательно, операторы $\Pi((r_1, r_2)) = \mathcal{L}_A(r_1) \cdot \mathcal{R}_A(r_2)$ определяют $\star$-представление полугруппы $R_\infty \times R_\infty$ во всем пространстве $\mathcal{H}_A$. Из соотношения (12) легко следует, что $\Pi((r_1, r_2))\eta = \Pi^{(0)}((r_1, r_2))\eta$ при всех $\eta \in \mathcal{H}_A^{(0)}$ и выполняется (11).

Литература

[1] А. М. Вершик, П. П. Никитин, *Описание характеров и факторпредставлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы*, Функц. анализ и его прил., **45**:1 (2011), 16–30.

[2] А. Ю. Окуньков, *Теорема Тома и представления бесконечной бисеммитрической группы*, Функц. анализ и его прил., **28**:2 (1994), 31–40.

[3] А. Ю. Окуньков, *О представлениях бесконечной симметрической группы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240** (1997), 166–228; arXiv: 9803037.

[4] E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe*, Math. Z., **85**:1 (1964), 40–61.

[5] W. D. Munn, *The characters of the symmetric inverse semigroup*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**:1 (1957), 13–18.

[6] Н. И. Нессонов, *Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы*, Матем. сб., **130(172)**:2(6) (1986), 131–150.

[7] J. East, *Generators and relations for partition monoids and algebras*, J. Algebra, **339** (2011), 1–26.

[8] Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$*, Алгебра и анализ, **1**:4 (1989), 178–210.

[9] Л. М. Попова, *Определяющие соотношения некоторых полгурупп частичных преобразований конечного множества*, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **218** (1961), 191–212.

[10] L. Solomon, *Representations of the rook monoid*, J. Algebra, **256**:2 (2002), 309–342.

[11] R. T. Powers, *Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings*, Ann. of Math., 2nd Ser., **86**:1 (1967), 138–171.

[12] D. Voiculescu, *Representations factorielles de type* II_1 *de* $U(\infty)$, J. Math. Pures Appl., **55**:1 (1976), 1–20.

[13] A. Wassermann, *Automorphic actions of compact groups on operator algebras*, *Phd thesis*, University of Pennsylvania, 1981.

Н. И. Нессонов
Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина Национальной академии наук
Украины, Харьков, Украина
E-mail: n.nessonov@gmail.com

Поступила в редакцию
9 декабря 2019 г.
После доработки
9 февраля 2020 г.
Принята к публикации
2 марта 2020 г.