Доклады Академии наук СССР
1989. Том 309, № 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© А.С. ВШИВЦЕВ, В.К. ПЕРЕС-ФЕРНАНДЕС

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

(Представлено академиком В.П. Масловым 15 VI 1988)

В работе изучается асимптотическое поведение при $\omega \to 0$ функциональных рядов, содержащих специальные цилиндрические функции Макдональда $K_\alpha(n\omega)$, вида

$$(1)\qquad S(\omega,\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_\alpha(n\omega)\, n^{-\beta}.$$

Исследование рядов такого типа оказывается затруднительным по ряду причин, обусловленных логарифмической особенностью функции Макдональда при малых значениях аргумента. Прямое разложение функции Макдональда в ряд под знаком суммы в (1) приводит к ошибочному результату [1] и указывает на необходимость корректного определения процедуры суммирования, что достигается посредством аналитического продолжения $S(\omega,\alpha,\beta)$ по параметрам α и β. Соответствующее аналитическое продолжение может быть реализовано на основе интегрального преобразования Меллина и аналитического продолжения дзета-функции Римана.

Суммы вида (1) представляют интерес при изучении термодинамических свойств различных физических систем. Например, в модели газа невзаимодействующих релятивистских фермиевских частиц термодинамический потенциал большого канонического ансамбля записывается следующим образом:

$$(2)\qquad \Omega = \frac{Vm^4}{\pi^2\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2} K_2(n\omega),$$

где $\omega = m/T$, m — масса частицы, T — температура термостата, V — объем, занимаемый газом. Весьма интересным с точки зрения физических приложений [2] является исследование выражения (2) в пределе высоких температур, т.е. при $m/T \ll 1$ или $\omega \to 0$. Заметим, что в общем случае, т.е. при наличии внешних полей, в соответствующих выражениях для термодинамического потенциала системы возникают суммы, аналогичные (1) и (2). Например, Ω — потенциал кварк-антикваркового газа в хромомагнитном неабелевом поле, заданном неабелевыми постоянными потенциалами в группе SU(2): $A_0^a = 0$, $A_i^a = \sqrt{\lambda}\,\delta_i^a$, $a, i = 1, 2, 3$, имеет вид

$$(3)\qquad \Omega = V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(n\mu/T)}{2\pi^2} \left[\left(\frac{2\omega}{n\beta}\right)^2 K_2(n\omega) + \frac{\omega g H}{n\beta} K_1(n\omega) + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k} K_{2l-2-k}(n\omega x) \left(\frac{n\beta^2}{2\omega x}\right)^{2l-2-k} \frac{(gH)^{2l-k}\, l!\,(2k+1)!!}{(2l)!\,(l-k)!\,(2k)!!} \right],$$

где μ — химический потенциал системы, $x^2 = 1 + 5gH/(4m^2)$, g — константа взаимодействия, $H = g\lambda$ — напряженность хромомагнитного поля.

Таким образом, суммирование выражений вида (1) позволит получить более полную информацию о свойствах физической системы при $\omega \to 0$, т.е. в области высоких температур.

Т е о р е м а. *Для функции* $S(\omega, \alpha, \beta)$ *при* $\omega \to 0$ *и* $\arg|\omega| < \pi$ *справедливы следующие соотношения: при* $\alpha = 2$ *и* $\beta = 2$

$$(4)\qquad S(\omega,2,2) = -\frac{7\pi^4}{360\omega^2} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\omega^2}{16}\left(\ln\frac{\omega}{\pi} - \frac{3}{4} + \mathrm{C}\right) + $$
$$+\frac{\omega^2}{4\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^n (1-2^{-2n-1}) \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+3)} \zeta(2n+1);$$

при $\alpha = r$ *и* $\beta = -r$

$$(5)\qquad S(\omega, r, -r) = -\frac{\Gamma(r)}{4}\left(\frac{2}{\omega}\right)^r -$$
$$-\frac{2^r}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{r-2} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^n (1-2^{-2n-2r+1}) \frac{\Gamma(n+r-1/2)}{\Gamma(n)} \zeta(2n+2r-1);$$

при $\alpha = r$ *и* $\beta = -2k - r$

$$(6)\qquad S(\omega, r, -2k-r) = \frac{(-1)^{k+1}\omega^{r-2}}{2^{r-2}\pi^{2k+2r-2}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^n (1-2^{-2n-2r-2k+1}) \times$$
$$\times \frac{\Gamma(2n+2r+2k-1)\,\zeta(2n+2r+2k-1)}{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(n)},$$

где $r = 1, 2, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots,$ $\mathrm{C} = 0{,}5772157\ldots$ *– постоянная Эйлера,* $\zeta(x)$ *– дзета-функция Римана,* $\Gamma(n)$ *– гамма-функция.*

Наметим схему д о к а з а т е л ь с т в а теоремы в случае $\alpha = 2$ и $\beta = 2$. Проведем преобразование Меллина функции Макдональда $K_2(n\omega)$ по параметру ω. Последнее оказывается возможным, так как функция $K_2(n\omega)\omega^{s-1} \in L(0, +\infty)$, при $\operatorname{Re} s > 2$. В результате получим следующее выражение [3]:

$$(7)\qquad K_2(n\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} n^{-s}2^{s-2}\Gamma(s/2-1)\,\Gamma(s/2+1)\,\omega^{-s}ds,$$

где $\operatorname{Re}\sigma > 2$. Подставив (7) в (1), при $\alpha = 2$ и $\beta = 2$ придем к следующей формуле:

$$(8)\qquad S(\omega,2,2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} n^{-s}2^{s-2}\Gamma(s/2-1)\,\Gamma(s/2+1)\,\omega^{-s}ds\right\},$$

В (5) поменяем порядок интегрирования и суммирования, что законно в силу равномерной сходимости (при $\operatorname{Re}\sigma > 2$) интеграла. Суммируя по индексу n, найдем

$$(9)\qquad S(\omega,2,2) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} [\Gamma(s/2)]^2\zeta(s+2)\,2^{-3}(1-2^{s+1})\frac{s}{s-2}\,\omega^{-s}ds,$$

где $\operatorname{Re}\sigma > 2$. Вычисление интеграла, стоящего в правой части соотношения (9), проводится замыканием контура γ в левой полуплоскости. При этом необходимо воспользоваться аналитическим продолжением $\Gamma(z)$- и $\zeta(z)$-функций соответствующей области. Учитывая сказанное, выражение (9) преобразуется к виду

$$(10)\qquad S(\omega,2,2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\lim_{s\to\infty}\int_{C_s}[\Gamma(s/2)]^2\frac{\Gamma(-1-s)\,\zeta(-1-s)}{\Gamma(1+s/2)\,\Gamma((-1-s)/2)}\,\frac{1-2^{s+1}}{2^3}\,\frac{s}{s-2}(2\pi)^{s+2}\omega^{-s}ds + \right.$$
$$\left. + \int_{\tilde{C}}[\Gamma(s/2)]^2\zeta(s+)\,2^{-3}(1-2^{s+1})\frac{s}{s-2}\,\omega^{-s}ds\right\},$$

где контуры C_s и $\tilde{C}$ изображены на рис. 1, там же отмечены полюсы подынтегрального выражения и их порядок.

После вычисления интеграла в выражении (10) по контуру $\tilde{C}$ и преобразования подынтегрального выражения в интеграле по некоторой правильной системе контуров $\{C_s\}$ это соотношение может быть представлено следующим образом:

$$(11)\quad S(\omega,2,2) = -\frac{7\pi^4}{360\omega^2} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\omega^2}{16}\left(\ln\frac{\omega}{\pi} - \frac{3}{4} + \mathrm{C}\right) + $$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\lim_{s\to\infty}\int_{C_s}\frac{\pi^2 s\Gamma(s/2)\,\Gamma(-1-s)\,\zeta(-1-s)}{\Gamma((-1-s)/2)\,(s^2-4)}(1-2^{s+1})\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{-s} ds,$$

где $\operatorname{Re} C_s < -2$. Из формы записи подынтегрального выражения (11) следует, что при $\operatorname{Re} s < -2$ на системе контуров $\{C_s\}$ (в качестве системы контуров можно выбрать, например, систему дуг окружностей C_s: $|2s + 3{,}5|$, ограниченных справа прямой $s = -3$) мы имеем функциональную последовательность $\{R_n\}$. Явное выражение для R_n таково:

$$(12)\quad R_n = \frac{\omega^2}{4\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^k (1-2^{-2k-1})\,\frac{\Gamma(k+½)}{\Gamma(k+3)}\,\zeta(2k+1).$$

Очевидно, что $\{R_n\}$ при $n\to\infty$ в области $|\omega| < \pi$ сходится, причем равномерно. Таким образом, для $S(\omega,2,2)$ является справедливым представление (4).

Доказательство соотношений (5) и (6) проводится аналогично.

В качестве следствия теоремы рассмотрим применение соотношений (4)–(6) при вычислении Ω-потенциала релятивистского ферми-газа (2) и свободной энергии кварк-антикваркового газа в хромомагнитном неабелевом поле (3).

Подставляя (4) в (2), получим следующее выражение для Ω-потенциала в единице объема:

$$(13)\quad \frac{\Omega}{V} = -\frac{7\pi^2}{360}T^4 + \frac{m^2}{24}T^2 + \frac{m^4}{(4\pi)^2}\left(\ln\frac{m}{\pi T} - \frac{3}{4} + \mathrm{C}\right) + $$
$$+ \frac{m^4}{(2\pi)^2\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{m}{\pi T}\right)^2\right]^n (1-2^{-2n-1})\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+3)}\zeta(2n+1).$$

Найденное выражение, очевидно, позволяет учесть зависимость Ω-потенциала релятивистского ферми-газа от массы частиц. Если в (13) положить $m = 0$, то получим хорошо известный закон Стефана–Больцмана.

Рассмотрение выражения (3) с учетом (4)–(6) в случае $\mu = 0$ довольно просто позволяет получить выражение для свободной энергии кварк-антикваркового газа в единице объема (мы рассмотрим случай высоких температур $m\beta \ll 1$ и слабого поля $gH/m^2 \ll 1$):

$$(14)\quad \frac{F}{V} = \frac{7\pi^2}{90}T^4 - \frac{m^2}{6}T^2 - \frac{m^4}{8\pi^2}\left[\ln\frac{m}{\pi T} + \mathrm{C} - \frac{3}{4} + \right.$$
$$+ x^4\left(\ln\left(2x\frac{m}{\pi T}\right) + \mathrm{C} - \frac{3}{4}\right) + \frac{gH}{m^2}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{C} - \ln\frac{m}{\pi T}\right) + $$
$$+ \frac{3}{2}\frac{gH}{m^2}x^2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{C} - \ln\frac{mx}{\pi T}\right) + $$
$$\left. + 21\left(\frac{gH}{m^2}\right)^2\left(\ln\frac{mx}{\pi T} - \mathrm{C}\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{gH}{m^2}\right)^3\frac{1}{x^2} + \ldots\right].$$

Из формулы (14) можно увидеть явную зависимость свободной энергии кварк-антикварковой системы от температуры и поля.

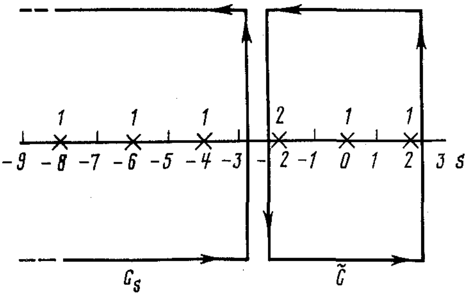

Рис. 1

Как следует из (13) и (14), при выполнении условия $m/(\pi T) < 1$ соответствующие ряды, стоящие в правых частях выражений, сходятся. Более того, в силу знакопеременности рядов ими удобно пользоваться, проводя численные оценки термодинамических потенциалов.

Следует заметить, что при описании термодинамических свойств системы, основанном на применении потенциала Гиббса

$$\Omega_{F,B}(\mu) = -\frac{1}{\beta} \sum_n \ln[1 \pm e^{(\mu - E_n)\beta}], \tag{15}$$

где верхний индекс отвечает частицам, подчиняющимся ферми-статистике, а нижний — бозе-статистике (использован нами выше при выводе явных выражений (2) и (3)), существенным образом учитывается наше знание спектра энергии частиц. Это очень сложная математическая задача, которая в настоящее время решена для ряда физически интересных случаев [4, 5] и может служить основой для изучения физически нетривиальных явлений с учетом термпературных эффектов.

В качестве одного из таких примеров, а также ситуации, где возникают суммы типа (1), укажем на работу [6], в которой проводится учет температурных эффектов при вычислении сдвига массы частиц и аномального магнитного момента.

Принимая во внимание сказанное, можно надеяться, что результаты настоящей работы могут быть полезны при соответствующих расчетах физических величин с учетом влияния тепловых эффектов и внешнего поля.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессорам В.Ч. Жуковскому и В.Р. Халилову за обсуждение возможных применений полученных результатов.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
25 VII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Actor A.* New perspect. quant. field. theor. Proc. XVI GIFT Int. Semin. theor. phys. Jaca, June 3–8, 1985. Singapore, 1986, p. 345–444. 2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 4. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 5. *Багров В.Г.* и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982. 6. *Жуковский В.Ч., Курилин А.И., Эминов П.А.* – Изв. вузов. Физика, 1987, № 12.