А.А.Квицинский, С.П.Меркурьев

ПЛОСКАЯ ВОЛНА В СИСТЕМЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ С НУЛЕВЫМ ПОЛНЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

Исследуется плоская волна $\mathcal{F}$ для квантовой системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом, равным нулю. Показано, что $\mathcal{F}$ есть функция двух переменных, которые суть решения соответствующего уравнения эйконала. Для $\mathcal{F}$ получены явные представления и полные асимптотические разложения при малых и больших гиперрадиусах. Доказаны теорема сложения для гиперсферических функций и три новые теоремы сложения для некоторых специальных функций.

В теории рассеяния плоской волной называют решение свободного уравнения Шредингера. Более строго, плоская волна - это ядро унитарного интегрального преобразования, которое диагонализирует оператор кинетической энергии (в евклидовом пространстве R^n таковым является преобразование Фурье в $L_2(R^n)$). Настоящая работа посвящена исследованию плоской волны для системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом, равным нулю.

Оператор кинетической энергии такой системы задается дифференциальным оператором H_0 на трехмерном римановом многообразии, так называемом внутреннем пространстве M. Оператор H_0 можно привести к диагональному виду с помощью унитарного интегрального преобразования $\mathcal{F}$ в $L_2(M)$. Ядро $\mathcal{F}$ и есть плоская волна в рассматриваемой задаче. Она удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом H_0, которое описывает систему трех невзаимодействующих частиц с нулевым полным орбитальным моментом ($\ell=0$). С точки зрения теории рассеяния это - волновая функция начального состояния в процессах рассеяния $(3 \longrightarrow 3)$ при $\ell=0$.

Информация о структуре плоской волны $\mathcal{F}$ играет ключевую роль при построении теории рассеяния для систем трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. В нашем случае плоская волна является довольно сложной функцией, которая не выражается в виде конечной комбинации элементарных или известных специальных функций. Фактически $\mathcal{F}$ представляет собой новую специальную функцию. Исследование ее свойств связано с решением обычного круга задач, возникающих в теории специальных функций. К ним относятся получение интегральных представлений и разложений в ряды, анализ асимптотик и т.п. Решение этих задач - цель настоящей работы. Опишем ее содержание.

Ключевые слова: система трех частиц, нулевой орбитальный момент, плоская волна, гиперсферические функции, теоремы сложения, асимптотики.

В § 1 приведены необходимые сведения о структуре внутреннего пространства и оператора кинетической энергии H_0. Эти результаты хорошо известны. Более подробное изложение соответствующих вопросов можно найти, например, в статье [1].

В § 2 рассматриваются собственные функции угловой части оператора H_0, так называемые гиперсферические гармоники. Последние исследовались в ряде работ [2-8]. Мы получим теорему сложения для гиперсферических гармоник, которая ранее была неизвестна. Эта теорема позволяет, в частности, построить разложение плоской волны $\mathcal{F}$ по гиперсферическим гармоникам, аналогичное разложению плоской волны в евклидовом пространстве по полиномам Лежандра.

§ 3 непосредственно посвящен изучению плоской волны. Мы покажем, что $\mathcal{F}$ есть функция двух переменных, которые являются решениями уравнения эйконала во внутреннем пространстве; получим для $\mathcal{F}$ ряд явных представлений и установим полные асимптотические разложения при малых и больших гиперрадиусах системы.

Из теоремы сложения для гиперсферических гармоник и некоторых представлений для плоской волны вытекают три новые теоремы сложения для полиномов Гегенбауэра, функций Вигнера и сферических функций Бесселя. Они приведены в § 4.

§ 1. Внутреннее пространство и оператор кинетической энергии

Рассматривается система трех частиц в пространстве R^3. Частицы нумеруются индексом $\alpha=1,2,3$. Пусть $\mathbf{r}_\alpha$, m_α – радиус-вектор и массы частиц. В с.ц.м. конфигурация системы задается набором приведенных векторов Якоби

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{2m_2m_3}{m_2+m_3}\right)^{1/2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{y} = \left[\frac{2(m_2+m_3)m_1}{m_1+m_2+m_3}\right]^{1/2}\left(\mathbf{r}_1 - \frac{m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3}{m_2+m_3}\right). \tag{1}$$

Выражения для векторов Якоби с $\alpha=2,3$ получаются из (1) циклической перестановкой индексов. Вектора с разными индексами связаны ортогональным преобразованием

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_\alpha\\ \mathbf{y}_\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\alpha\beta} & s_{\alpha\beta}\\ -s_{\alpha\beta} & c_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_\beta\\ \mathbf{y}_\alpha\end{pmatrix}, \qquad c^2_{\alpha\beta} + s^2_{\alpha\beta} = 1, \tag{2}$$

коэффициенты которого зависят от масс частиц:

$$c_{\alpha\beta} = -\left[\frac{m_\alpha m_\beta}{(M-m_\alpha)(M-m_\beta)}\right]^{1/2}, \qquad M = \sum_\alpha m_\alpha,$$

$$s_{\alpha\beta} = (-1)^{\beta-\alpha}\,\mathrm{sign}\,(\beta-\alpha)(1-c^2_{\alpha\beta})^{1/2}.$$

Таким образом, в с.ц.м. конфигурационное пространство системы представляет собой векторное пространство $Q\simeq R^6\simeq R^3\otimes R^3$ с элементами $X=\{\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{y}_\alpha\}$.

На пространстве Q естественным образом определено действие группы вращений

$SO(3)$:

$$X=\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\} \longrightarrow gX = \{g\mathbf{x}_\alpha,\ g\mathbf{y}_\alpha\}.$$

Эта группа действует свободно на множестве $\dot{Q}=Q-D$, где D отвечает конфигурациям, в которых все частицы лежат на одной прямой: $D=\{X: a\mathbf{x}_\alpha+b\mathbf{y}_\alpha=0,\ a^2+b^2\neq 0\}$. Поэтому $\dot{Q}$ есть пространство $SO(3)$-орбит фактор-многообразия $M=\dot{Q}/SO(3)$. Многообразие M называется внутренним пространством системы трех частиц.

Вращения $g\in SO(3)$ параметризуются тремя углами Эйлера, которые фиксируют ориентацию в пространстве плоскости, натянутой на вектора Якоби. Точки внутреннего пространства определяют относительную конфигурацию частиц в этой плоскости.

Очевидно, что M – трехмерное многообразие. Оно топологически эквивалентно полупространству

$$R^3_+ = \{r=(z^1_\alpha, z^2_\alpha, z^3_\alpha);\quad z^1_\alpha, z^2_\alpha \in (-\infty,\infty),\ z^3_\alpha \in (0,\infty)\}, \tag{3}$$

состоящему из трехмерных векторов с компонентами

$$z^1_\alpha = \frac{\mathbf{x}^2_\alpha - \mathbf{y}^2_\alpha}{\rho},\quad z^2_\alpha = \frac{2(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)}{\rho},\quad z^3_\alpha = \frac{2|\mathbf{x}_\alpha\times\mathbf{y}_\alpha|}{\rho}, \tag{4}$$

где ρ – гиперрадиус системы:

$$\rho = (\mathbf{x}^2_\alpha + \mathbf{y}^2_\alpha)^{1/2} = \left[\sum_i (z^i_\alpha)^2\right]^{1/2}.$$

Тем самым внутреннее пространство можно снабдить естественной векторной структурой пространства R^3_+ со скалярным произведением

$$(r,\ \tilde{r})_M = \sum_i z^i_\alpha\, \tilde{z}^i_\alpha. \tag{5}$$

Три координаты (ξ^1,ξ^2,ξ^3), параметризующие внутреннее пространство, будем называть внутренними координатами. Кроме декартовых координат (4), мы будем использовать еще 3 набора внутренних координат:

1) гиперсферические координаты $(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = (\rho,\chi_\alpha,\theta_\alpha)$:

$$r = (z^1_\alpha, z^2_\alpha, z^3_\alpha) = (\rho\cos\chi_\alpha,\ \rho\sin\chi_\alpha\cos\theta_\alpha,\ \rho\sin\chi_\alpha\sin\theta_\alpha),$$

$$\chi_\alpha \in (0,\pi),\quad \theta_\alpha \in (0,\pi); \tag{6}$$

2) координаты Dragt'a [4] $(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=(\rho,\psi,\varphi_\alpha)$:

$$r = (z^1_\alpha, z^2_\alpha, z^3_\alpha) = (\rho\cos\psi\cos\varphi_\alpha,\ \rho\cos\psi\sin\varphi_\alpha,\ \rho\sin\psi),$$

$$\psi \in (0,\ \pi/2),\ \varphi_\alpha \in [0,\ 2\pi]; \tag{7}$$

3) координаты Якоби $(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = (x_\alpha, y_\alpha, \theta_\alpha)$:

$$x = |\mathbf{x}_\alpha| = \rho \cos (\chi_\alpha/2),$$

$$y_\alpha = |\mathbf{y}_\alpha| = \rho \sin (\chi_\alpha/2), \quad \cos \theta_\alpha = (\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \tag{8}$$

(углы θ_α в (6) и (8) совпадают). Первые 2 набора внутренних координат суть обычные сферические координаты в R^3_+, в которых полярные углы X_α и $(\pi/2-\psi)$ определены относительно разных осей. Связь координат с разными индексами α получается из преобразования (2) для векторов Якоби:

$$(z^1_\alpha, z^2_\alpha, z^3_\alpha)^T = g(\omega_{\alpha\beta})(z^1_\beta, z^2_\beta, z^3_\beta)^T. \tag{9}$$

Здесь $g(\cdot)$ - матрица поворота в R^3_+ вокруг оси z^3_α:

$$g(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а угол поворота в (9) зависит от масс частиц:

$$\cos \omega_{\alpha\beta} = c^2_{\alpha\beta} - s^2_{\alpha\beta}, \quad \sin \omega_{\alpha\beta} = 2\, c_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}.$$

Из соотношения (9) вытекает, что углы φ_α при замене индекса сдвигаются на константу,

$$\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega_{\alpha\beta},$$

а координаты ρ и ψ инвариантны относительно индекса α.

Многообразие M имеет границу ∂M. Она состоит из точек с нулевой координатой z^3_α в (3). В сферических координатах (6) И (7) множество ∂M параметризуется следующим образом:

$$\partial M = \{(\rho, \psi, \varphi_\alpha) : \psi = 0\} = \{\rho, \chi_\alpha, \theta_a) : \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha = 0\}. \tag{11}$$

Оно отвечает конфигурациям, в которых все частицы лежат на одной прямой.

Евклидова метрика исходного пространства Q индуцирует риманову структуру многообразия M с метрикой и элементом объема [1]

$$dr^2 = \sum_{i,j} b_{ij} d\xi^i d\xi^j, \qquad dM(r) = \sigma(r)[\det(b_{ij})]^{1/2} \bigwedge_i d\xi^i, \tag{12}$$

где

$$\sigma(r) = \frac{1}{2}\rho^3 \sin \psi = \frac{1}{2}\rho^3 \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha = x_\alpha y_\alpha \sqrt{x^2_\alpha + y^2_\alpha}\, \sin \theta_\alpha,$$

а метрический тензор (b_{ij}) в координатах (6)-(8) дается равенствами

$$dr^2 = d\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2(d\chi_\alpha^2 + \sin^2\chi_\alpha d\theta_\alpha^2) =$$

$$= d\rho^2 + \frac{1}{4}\rho^2(d\psi^2 + \cos^2\psi\ d\varphi_\alpha^2) =$$

$$= dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 + \frac{x_\alpha^2\ y_\alpha^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}\ d\theta_\alpha^2. \qquad (13)$$

Опишем теперь оператор кинетической энергии системы трех частиц с нулевым полным орбитальным моментом. Он определяется сужением лапласиана $-\Delta_X$ в исходном пространстве Q на подпространство состояний, инвариантных относительно действия группы $SO(3)$. Такое сужение представляет собой дифференциальный оператор на римановом многообразии M [1]:

$$H_0 = -\left[\sigma(r)[\det(b_{ij})]^{1/2}\right]^{-1}\sum_{i,j}\partial_{\xi^i}\sigma[\det(b_{ij})]^{1/2}b_{i,j}\partial_{\xi^j},$$

где $(b^{ij})=(b_{ij})^{-1}$. Используя выражения (13) для метрики внутреннего пространства, нетрудно записать этот оператор в терминах локальных координат (6)-(8). В координатах Якоби получим представление

$$H_0 =-\frac{1}{x_\alpha^2}\partial_{x_\alpha}x_\alpha^2\partial_{x_\alpha} - \frac{1}{y_\alpha^2}\partial_{y_\alpha}y_\alpha^2\partial_{y_\alpha} - \left(\frac{1}{x_\alpha^2}+\frac{1}{y_\alpha^2}\right)\frac{1}{\sin\theta_\alpha}\ \partial_{\theta_\alpha}\sin\theta_\alpha\partial_{\theta_\alpha}. \qquad (14)$$

В сферических координатах (6) и (7) H_0 имеет вид

$$H_0 = -\rho^{-5}\partial_\rho\rho^5\partial_\rho + \rho^{-2}\ \square,$$

где оператор $\square$ действует по угловым переменным:

$$\square = -\frac{4}{\sin^2\chi_\alpha}\left\{\partial_{\chi_\alpha}\sin^2\chi_\alpha\partial_{\chi_\alpha} + \frac{1}{\sin\theta_\alpha}\ \partial_{\theta_\alpha}\sin\theta_\alpha\partial_{\theta_\alpha}\right\} =$$

$$= -\frac{4}{\sin 2\psi}\ \partial_\psi\ \sin 2\psi\partial_\psi - \frac{4}{\cos^2\psi}\ \partial_{\varphi_\alpha}^2. \qquad (15)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать $\square$ как оператор в пространстве $L_2,(\hat{M},d\hat{M})$ функций на единичной полусфере $\hat{M}$ в векторном пространстве (3),

$$\hat{M} = \{\hat{r}\in R_+^3\ :\ (\hat{r},\hat{r})_M = 1\};\qquad \hat{r} = r/\rho.$$

Мера $d\hat{M}$ на $\hat{M}$ задается угловой частью меры внутреннего пространства (12):

$$d\hat{m}(\hat{r}) = \sin^2\chi_\alpha\ \sin\theta_\alpha d\chi_\alpha \wedge d\theta_\alpha = \frac{1}{2}\ \sin 2\psi\ d\psi \wedge d\varphi_\alpha.$$

§ 2. Теорема сложения для собственных функций оператора

В этом разделе исследуется спектральный проектор оператора (15) в $L_2(\hat{M}, d\hat{M})$:

$$\mathcal{P}_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\lambda_n|=\varepsilon} (\square - z)^{-1} dz, \tag{16}$$

где $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – дискретный спектр $\square$. Для ядра этого проектора мы получим явные выражения, которые имеют смысл теоремы сложения для собственных функций оператора $\square$.

Собственные функции $\square$ были вычислены В. А. Фоком [2] и рассматривались затем в работах [3–8]. Известно, что спектр $\square$ состоит из точек $\lambda_n = 4n(n+2)$ $(n=0,1,\ldots\infty)$ и является вырожденым. Каждой точке λ_n соответствует слой Δ_n из $n+1$ собственных функций. Последние можно классифицировать собственными числами операторов

$$\hat{\ell}_{\theta_\alpha} = \frac{1}{\sin\theta_\alpha} \partial_{\theta_\alpha} \sin\theta_\alpha \partial_{\theta_\alpha} \quad \text{или} \quad \hat{\ell}_{\varphi_\alpha} = -\partial^2_{\varphi_\alpha},$$

которые коммутируют с $\square$. Обозначим через $\{Y_{n\ell}\}_{\ell=0}^{n}$ и $\{\mathcal{Y}_{n\mu}\}_{\mu=\frac{-n}{2}}^{\frac{n}{2}}$ общие собственные функции операторов $\square$, $\hat{\ell}_{\theta_\alpha}$ и $\square$, $\hat{\ell}_{\varphi_\alpha}$:

$$\square Y_{n\ell} = 4n(n+2) Y_{n\ell}, \qquad \square \mathcal{Y}_{n\mu} = 4n(n+2) \mathcal{Y}_{n\mu},$$

$$\hat{\ell}_{\theta_\alpha} Y_{n\ell} = \ell(\ell+1) Y_{n\ell}, \qquad \hat{\ell}_{\varphi_\alpha} \mathcal{Y}_{n\mu} = (2\mu)^2 \mathcal{Y}_{n\mu}.$$

Функции $Y_{n\ell}$ выражаются через полиномы Гегенбауэра и Лежандра:

$$Y_{n\ell}(\hat{r}) = \left[\frac{n+1}{\pi}\right]^{1/2} N_{n\ell} (\sin\chi_\alpha)^\ell C_{n-\ell}^{\ell+1} (\cos\chi_\alpha)\, P_\ell(\cos\theta_\alpha), \tag{17}$$

где $\ell = 0, 1, \ldots, n$,

$$N_{n\ell} = 2^\ell \ell! \left[\frac{(2\ell+1)(n-\ell)!}{(n+\ell+1)!}\right]^{1/2}.$$

Функции $\mathcal{Y}_{n\mu}$ суть функции Вигнера $(\mu = -n/2,\ -n/2+1, \ldots, n/2)$:

$$\mathcal{Y}_{n\mu}(\hat{r}) = \left[\frac{n+1}{\pi}\right]^{1/2} \exp(2i\mu\varphi_\alpha)\, d^{n/2}_{\mu\mu}(\cos 2\psi). \tag{18}$$

Оба набора $\{Y_{n\ell}\}$, $\{\mathcal{Y}_{n\mu}\}$ образуют альтернативные базисы в слое Δ_n, ортонормированные в стандартном скалярном произведении пространства $L_2(\hat{M}, d\hat{M})$. Они связаны унитарным преобразованием в Δ_n, которое вычислено в [8].

Оператор (16) представляет собой проектор на слой Δ_n с ядром

$$\mathcal{P}_2(\hat{r},\hat{r}') = \sum_{\ell=0}^{n} Y_{n\ell}(\hat{r})\, Y_{n\ell}(\hat{r}') = \tag{19а}$$

$$= \sum_{\mu=-n/2}^{n/2} \mathcal{Y}_{n\mu}(\hat{r})\, \mathcal{Y}_{n\mu}(\hat{r}'). \tag{19б}$$

В представлении (19а) ядро $\mathcal{P}_n$ зависит от четырех углов $(\chi_\alpha, \theta_\alpha, \chi'_\alpha, \theta'_\alpha)$, а в (19б) - от трех переменных $(\psi, \psi', \varphi_\alpha - \varphi'_\alpha)$. Мы покажем, что в действительности это ядро является функцией только двух углов Ω_+ и Ω_-, которые определяются в терминах скалярного произведения (5):

$$\cos\Omega_+ = (\hat{r},\hat{r}'),\quad \cos\Omega_- = -(g(\pi)\hat{r},\hat{r}'),\qquad \Omega_\pm \in [0,\pi], \tag{20}$$

где $g(\pi)$ - преобразование поворота (10) на угол π. В локальных координатах (6), (7) на полусфере $\hat{M}$ эти углы задаются равенствами

$$\cos\Omega_\pm = \cos\chi_\alpha \cos\chi'_\alpha + \sin\chi_\alpha \sin\chi'_\alpha \cos(\theta_\alpha \mp \theta'_\alpha) =$$

$$= \pm\sin\psi\sin\psi' + \cos\psi\cos\psi' \cos(\varphi_\alpha - \varphi'_\alpha). \tag{21}$$

Отметим, что правые части последних равенств инвариантны относительно индекса α. Действительно, согласно (9), замена индекса $\alpha \longrightarrow \beta$ осуществляется действием абелевой группы вращений (10), $\hat{r} \longrightarrow g(\omega_{\alpha\beta})\hat{r}$. Скалярные произведения (20) при этом не меняются.

В терминах углов $\Omega_\pm$ для ядра $\mathcal{P}_n$ справедливы следующие два эквивалентных представления:

1) интегральное представление:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi\; C^1_n(\cos\tau(\xi)), \tag{22}$$

$$\cos\tau(\xi) = \tfrac{1}{2}(\cos\Omega_+ + \cos\Omega_-) + \tfrac{1}{2}(\cos\Omega_+ - \cos\Omega_-)\cos\xi;$$

2) разложение по однородным полиномам:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}') = \sum_{m=0}^{n} a_n(m)\, Q_m\!\left(\sin\frac{\Omega_+}{2},\ \sin\frac{\Omega_-}{2}\right) = \tag{23а}$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{n} a_n(m)\, Q_m\!\left(\cos\frac{\Omega_+}{2},\ \cos\frac{\Omega_-}{2}\right), \tag{23б}$$

где

$$a_n(m) = \frac{(n+1)^2(-n)_m(n+2)_m}{\pi(3/2)_m m!}, \tag{24}$$

$a_n(m)$ - символ Похгаммера; Q_m - однородные полиномы степени $2m$: $Q_m(\lambda a, \lambda b) =$

$=\lambda^{2m}Q_m(a,b)$. Они выражаются через полиномы Лежандра:

$$Q_m\ (a,b) = (ab)^m P_m\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right). \tag{25}$$

Соотношения (22) и (23) представляют собой различные формы записи теоремы сложения для собственных функций оператора $\square$. Докажем сперва формулу (22). Подставим в представление (19a) явные выражения (17) для функций $Y_{n\ell}$ и заменим возникающее при этом произведение полиномов Лежандра по формуле умножения [9]

$$P_\ell\ (\cos\,\theta_\alpha)P_\ell\ (\cos\,\theta'_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\xi\ P_\ell\ (\cos\,\theta_\alpha\ \cos\,\theta'_\alpha + \sin\,\theta_\alpha\ \sin\,\theta'_\alpha\ \cos\,\xi). \tag{26}$$

Получим представление, содержащее сумму произведений двух полиномов Гегенбауэра и одного полинома Лежандра. Эта сумма вычисляется с помощью теоремы сложения для полиномов Гегенбауэра [9, 10]:

$$\sum_{\ell=0}^{n} N^2_{n\ell}(\sin\,\chi\ \sin\,\chi')^\ell\ C^{\ell+1}_{n-\ell}\ (\cos\,\chi)C^{\ell+1}_{n-\ell}\ (\cos\,\chi')\ P_\ell(\cos\,\varphi) =$$

$$= C^1_n(\cos\,\chi\ \cos\,\chi' + \sin\,\chi\ \sin\,\chi'\ \cos\,\varphi). \tag{27}$$

В результате придем к следующему выражению для ядра $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\xi\ C^1_n(\cos\,\tau), \tag{28}$$

$$\cos\,\tau = \cos\,\chi_\alpha\ \cos\,\chi'_\alpha + \sin\,\chi_\alpha\ \sin\,\chi'_\alpha\ (\cos\,\theta_\alpha\ \cos\,\theta'_\alpha + \sin\,\theta_\alpha\ \sin\,\theta'_\alpha\ \cos\,\xi).$$

Нетрудно проверить, что аргументы подынтегральных функций в (28) и (22) совпадают, так что представление (22) доказано.

Разложения (23) вытекают из интегрального представления (22). Воспользуемся известным выражением для полиномов Гегенбауэра в терминах гипергеометрической функции ${}_2F_1$ [10]:

$$C^1_n\ (x) = (\pm 1)^n(n+1)\,{}_2F_1(-n,\ n+2;\ 3/2;\ \tfrac{1\mp x}{2}). \tag{29}$$

Здесь правая часть представляет собой полином степени n с коэффициентами, пропорциональными $a_n(m)$ из (24). Члены этого полинома при подстановке в (22) порождают интегралы

$$Q_m(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos\,\xi\right]^m d\xi, \tag{30}$$

где параметры a,b зависят от углов $\Omega_\pm$ и от выбора знака $(\pm)$ в (29). Для верхних знаков $a=\sin(\Omega_+/2)$, $b=\sin(\Omega_-/2)$, для нижних $a=\cos(\Omega_+/2)$, $b=\cos(\Omega_-/2)$. Заменой $a^2+b^2=2abz$, $a^2-b^2=2ab\sqrt{z^2-1}$ выражение (30) приводится к виду известного интегрального представления для полинома Лежандра $P_m(z)$. В результате придем к равенству (23).

В ряде частных случаев теорема сложения для собственных функций оператора □ заметно упрощается:

1) $\hat{r}'\in\partial M$ (∂M - граница (11) внутреннего пространства). В этом случае $\psi'=0$, так что углы $\Omega_\pm$ совпадают (см. (21)):

$$\cos\Omega_+ = \cos\Omega_- = \cos\Omega = \cos\psi\,\cos(\varphi_\alpha-\varphi'_\alpha). \tag{31}$$

Поэтому представление (22) принимает вид

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}')|_{\hat{r}'\in\partial M} = \frac{n+1}{\pi}\,C^1_n(\cos\Omega). \tag{32}$$

2) $\hat{r}'=\hat{r}$. При таких аргументах $\Omega_-=2\psi$, $\Omega_+=0$. В представление (23а) для ядра $\mathcal{P}_n$ входят полиномы $Q_m(0,\ \sin\psi)$, которые, согласно (25), определяются коэффициентом полиномов Лежандра при старшей степени:

$$Q_m(0,\ \sin\psi) = (\sin\psi)^{2m}Q_m(0,1) = (\sin\psi)^{2m}\,4^{-m}\binom{2m}{m}. \tag{33}$$

При подстановке этого равенства в (23а) возникает сумма, которую можно записать в терминах гипергеометрической функции ${}_3F_2$:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}) = \frac{(n+1)^2}{\pi}\,{}_3F_2(-n,\ n+2,\ 1/2;\ 1,\ 3/2;\ \sin^2\psi). \tag{34}$$

3) $\hat{r}'=g(\pi)\hat{r}$ ($g(\omega)$ определено в (10)). В такой ситуации $\Omega_+=\pi-2\psi$, $\Omega_-=\pi$. Поэтому представление (23б) для ядра $\mathcal{P}_n$ опять содержит полиномы $Q_m(0,\ \sin\psi)$. Соответствующая теорема сложения с точностью до знака совпадает с (34):

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},g(\pi)\hat{r}) = \frac{(-1)^n}{\pi}\,{}_3F_2(-n,\ n+2,\ 1/2;1,\ 3/2;\ \sin^2\psi). \tag{35}$$

4) $\hat{r}'=\hat{\ell}_3\equiv(0,0,1)$. Вектору $\hat{\ell}_3$ отвечает угол $\psi'=\pi/2$. Рассмотрим определение (19б) ядра $\mathcal{P}_n$ в терминах функций Вигнера (18). Поскольку $d^{n/2}_{\mu\mu}(-1)=0$ при $\mu\neq0$, а $d^k_{00}(-1)=P_k(0)$, получим равенства

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{\ell}_3) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1,\\ \dfrac{n+1}{\pi}(-1)^k\,P_k(\cos 2\psi), & n = 2k. \end{cases}$$

Частный случай (32) теоремы сложения был указан ранее в [8]. Отметим, что в работе [11] по этому поводу содержится неточность. Приведенная в ней формула (19), эквивалентная (32), также справедлива только при $\hat{r}'\in\partial M$ и неверна для произвольных аргументов собственных функций оператора $\square$.

Из теоремы сложения (22), (23) вытекает очевидное свойство инвариантности ядра $\mathcal{P}_n$ - оно не меняется при преобразованиях аргументов, сохраняющих углы $\Omega_\pm$. Используя это обстоятельство, можно получить еще ряд выражений для $\mathcal{P}_n$ в терминах углов

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\Omega_- + \Omega_+), \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\Omega_- - \Omega_+).$$

Возьмем, например, в качестве новых аргументов ядра вектора

$$\hat{q} = (\cos\tau_+,\ 0,\ \sin\tau_+), \qquad \hat{q}' = (\cos\tau_-,\ 0,\ \sin\tau_-). \tag{36}$$

Легко проверить, что углы $\Omega_\pm$ для пар векторов $\{\hat{r},\hat{r}'\}$ и $\{\hat{q},\hat{q}'\}$ совпадают, поэтому $\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}')=\mathcal{P}_n(\hat{q},\hat{q}')$. В гиперсферических координатах (6) векторам $\hat{q}$ и $\hat{q}'$ соответствуют углы $\chi_\alpha=\tau_+$, $\chi'_\alpha=\tau_-$, $\theta_\alpha=\theta'_\alpha=0$. Тем самым ядро $\mathcal{P}_n(\hat{q},\hat{q}')$ можно записать в виде разложения (19а) с соответствующей заменой аргументов. Используя в этом разложении равенства

$$P_{m+1}(0)=0,\quad P_{2m}(0) = (-1)^m\, 4^{-m}\binom{2m}{m},$$

придем к представлению

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{\pi}\sum_{m=0}^{[n/2]} N^2_{n2m}\, 4^{-2m}\binom{2m}{m}^2(\sin\tau_+\sin\tau_-)^{2m}\times$$

$$\times\, C^{2m+1}_{n-2m}(\cos\tau_+)\, C^{2m+1}_{n-2m}(\cos\tau_-).$$

Рассмотрим теперь выражение для $\mathcal{P}_n(\hat{q},\hat{q}')$ в координатах Dragt'а (19б), (18). Для векторов (36) эти координаты равны $\psi = \tau_+$, $\psi' = \tau_-$, $\varphi_\alpha=\varphi'_\alpha=0$. Поэтому из (19б) вытекает равенство

$$\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{\pi}\sum_{\mu=-n/2}^{n/2} d^{n/2}_{\mu\mu}(\cos 2\tau_+)\, d^{n/2}_{\mu\mu}(\cos 2\tau_-). \tag{37}$$

Введем далее еще одну пару векторов

$$\hat{q}_1 = (0,\ \cos\tau_+,\ \sin\tau_+),\quad \hat{q}_1 = (0,\ \cos\tau_-,\ \sin\tau_-). \tag{38}$$

Преобразование $\{\hat{r},\hat{r}'\}\longrightarrow\{\hat{q}_1,\hat{q}'_1\}$ также сохраняет углы $\Omega_\pm$. В гиперсферических координатах векторам (38) соответствуют углы $\chi_\alpha=\chi'_\alpha=\pi/2$, $\theta_\alpha=\tau_+$, $\theta'_\alpha=\tau_-$. Записав ядро $\mathcal{P}_n(\hat{q}_1,\hat{q}'_1)$ через эти углы в виде (19а) и используя соотношения

$$C^{\ell+1}_{2m+1}(0) = 0,\quad C^{\ell+1}_{2m}(0) = (-1)^m\binom{\ell+m}{m},$$

получим выражение

$$\mathcal{P}_{\mathrm{n}}(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{\pi} \sum_{\mathrm{m=0}}^{[\mathrm{n}/2]} N^2_{\mathrm{n\ n-2m}} \binom{n-m}{m}^2 P_{\mathrm{n-2m}}(\cos\tau_+) \times P_{\mathrm{n-2m}}(\cos\tau_-).$$

Представление (19б) для ядра $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}(\hat{q}_1,\hat{q}_1')$ приводит снова к равенству (37).

§ 3. Плоская волна

Мы называем плоской волной для системы трех частиц с нулевым полным орбитальным моментом ядро унитарного интегрального преобразования $\mathcal{F}$ в $L_2(M,dM)$,

$$(\mathcal{F}\Psi)(r) = \int_{\mathrm{M}} \mathcal{F}(r,q)\ \Psi(q)dM(q),$$

которое диагонализует оператор H_0:

$$(\mathcal{F}^* H_0 \mathcal{F})\ \Psi(q) = q^2\Psi(q),\ \ q^2 \equiv (q,q)_{\mathrm{M}}.$$

По определению функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет свободному уравнению Шредингера на внутреннем пространстве,

$$(H_0 - q^2)\ \mathcal{F}(\cdot,q) = 0.$$

Это уравнение описывает систему трех невзаимодействующих частиц с нулевым полным орбитальным моментом (длина вектора $q\in M$ определяет полную энергию системы, а направление $\hat{q}$ задает распределение энергии по частицам).

В этом разделе мы получим ряд явных представлений для плоской волны $\mathcal{F}$ и исследуем ее асимптотические свойства.

Одно из выражений для функции $\mathcal{F}$ нетрудно угадать, исходя из представления оператора H_0 в координатах Якоби (14). Угловая часть $(\sin\theta_\alpha)^{-1}\partial_{\theta_\alpha} \sin\theta_\alpha\partial_{\theta_\alpha}$ этого оператора диагонализуется в базисе полиномов Лежандра $P_\ell(\cos\theta_\alpha)$. При этом H_0 распадается на сумму одномерных операторов Шредингера на полуоси

$$h_0^{(\ell)} = -x^{-2}\partial_x\ x^2\partial_x + \ell(\ell+1)x^{-2}.$$

Хорошо известно, что диагональное представление для таких операторов задается сферическими функциями Бесселя $j_\ell(z)=(\pi/2z)^{1/2}J_{\ell+1/2}(z)$. Поэтому ядро $\mathcal{F}$ должно иметь вид линейной комбинации

$$\mathcal{F}(r,r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell j_\ell(x_\alpha x_\alpha') j_\ell(y_\alpha y_\alpha')\ P_\ell(\cos\theta_\alpha)\ P_\ell(\cos\theta_\alpha'). \tag{39}$$

Коэффициенты c_ℓ определяются условием унитарности преобразования (39) в $L_2(M,dM)$, которое фиксирует их модуль: $|c_\ell|=(2\ell+1)/\pi$. Аргументы чисел c_ℓ могут быть произвольны (разным $\arg c_\ell$ соответствуют унитарно эквивалентные ядра $\mathcal{F}$). Мы выберем их следующим образом: $c_\ell=(-1)^\ell|c_\ell|$. Тем самым плоская волна равна

$$\mathcal{F}(r,r') = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty}\ (-1)^\ell(2\ell+1)j_\ell(x_\alpha x_\alpha')\ j_\ell(y_\alpha y_\alpha')\times P_\ell(\cos\theta_\alpha)P_\ell(\cos\theta_\alpha'). \tag{40}$$

В этом представлении функция $\mathcal{F}$ зависит от четырех аргументов ($x_\alpha x'_\alpha$, $y_\alpha y'_\alpha$, $\cos\theta_\alpha$, $\cos\theta'_\alpha$). Мы покажем, что на самом деле плоская волна является функцией только двух переменных Z_+ и Z_-, которые выражаются через углы $\Omega_\pm$ из (20):

$$Z_\pm(r,r') = \lambda\cos\left(\frac{\Omega_\pm}{2}\right),\quad \lambda = \rho\rho'. \tag{41}$$

Это обстоятельство отражает следующее интегральное представление для $\mathcal{F}$, эквивалентное определению (40):

$$\mathcal{F}(r,r') = \frac{4}{\pi}\int_{Z_-}^{Z_+}\frac{\sin x\,dx}{(Z_+^2-x^2)^{1/2}(x^2-Z_-^2)^{1/2}}. \tag{42}$$

Параметры $Z_\pm$ будем называть эйконалами плоской волны $\mathcal{F}$.

Прежде чем доказывать равенство (42), поясним, почему мы называем функции $Z_\pm$ эйконалами. Дело в том, что они удовлетворяют уравнению эйконала на внутреннем пространстве M:

$$(dZ_\pm,\ dZ_\pm)_{T_r^*M} = (\rho')^2. \tag{43}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{T_r^*M}$ – скалярное произведение в кокасательном пространстве к многообразию M в точке r, порожденное метрикой (12), а $dZ_\pm$ – 1-форма градиента функций $Z_\pm(r,r')$ по первому аргументу.

Проверим равенство (43). Напомним, что, согласно (20), углы Ω_+ и $\pi-\Omega_-$ в определении эйконалов (41) суть полярные углы вектора r относительно осей $\hat q_+=\hat r'$ и $\hat q_-=g(\pi)\hat r'$. Обозначим $\Phi_\pm$ дополнительные к $\Omega_\pm$ сферические координаты вектора r и введем на M локальные координаты $(\xi^1_\pm,\xi^2_\pm,\xi^3_\pm)=\left(\frac{Z_\pm}{\rho'}\right)$, $u_\pm = \rho\sin\left(\frac{\Omega_\pm}{2}\right)$. $\Phi_\pm$). Вычислим метрику M в данных координатах. Заметим, что углы $\Omega_\pm$, $\Phi_\pm$ связаны с гиперсферическими углами $\chi_\alpha,\theta_\alpha$ из (6) преобразованием поворота в M, переводящим ось $\hat e_1=(1,0,0)$ в $\hat q_\pm$. Очевидно, что метрика (13) инвариантна относительно вращений в M. Поэтому в координатах $\xi^i_\pm$ она имеет тот же вид, что и в координатах Якоби (с заменой $x_\alpha\longrightarrow\xi^1_\pm$, $y_\alpha\longrightarrow\xi^2_\pm$, $\theta_\alpha\longrightarrow\Phi_\pm$):

$$dr^2 = (\rho')^{-2}dZ_\pm^2 + du_\pm^2 + \frac{Z_\pm^2\,u_\pm^2}{Z_\pm^2+\rho'^2u_\pm^2}\,d\Phi_\pm^2.$$

Записав на основе этого представления градиенты в $dZ_\pm$ в координатах $\xi^i_\pm$, получим равенство (43).

Докажем теперь интегральное представление (42). Заменим в сумме (40) произведение полиномов Лежандра по формуле умножения (26). Возникающий при этом ряд суммируется с помощью теоремы сложения для функций Бесселя [10]:

$$(xy)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+\nu)\,C^\nu_n(\cos\varphi)\,J_{\ell+\nu}(x)J_{\ell+\nu}(y) =$$

$$= (2Z)^{-\nu} J_\nu(z), \quad Z = (x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{1/2}, \tag{44}$$

в которой нужно положить $\nu = 1/2$ ($C_n^{1/2}(\cos\varphi) = P_\ell(\cos\varphi) = (-1)^\ell P_\ell(-\cos\varphi)$). В результате получим равенство

$$\mathcal{F}(r,r') = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\xi\,\frac{\sin Z(\xi)}{Z(\xi)}, \tag{45}$$

где

$$Z(\xi) = [(x_\alpha x'_\alpha)^2 + (y_\alpha y'_\alpha)^2 + 2x_\alpha x'_\alpha y_\alpha y'_\alpha \times (\cos\theta_\alpha \cos\theta'_\alpha + \sin\theta_\alpha \sin\theta'_\alpha \cos\xi)]^{1/2}.$$

Подставив в это выражение формулы (8) для координат Якоби, его можно привести к виду

$$Z(\xi) = \lambda\cos(\tau/2),$$

где $\lambda = \rho\rho'$,

$$\cos\tau(\xi) = \cos\chi_\alpha \cos\chi'_\alpha + \sin\chi_\alpha \sin\chi'_\alpha\,(\cos\theta_\alpha \cos\theta'_\alpha + \sin\theta_\alpha \sin\theta'_\alpha \times$$

$$\times \cos\xi) = \frac{1}{2}(\cos\Omega_+ + \cos\Omega_-) + \frac{1}{2}\cos\Omega_+ - \cos\Omega_-)\cos\xi.$$

Переходя в (45) к интегрированию по новой переменной $x = Z(\xi)$, придем к представлению (42).

Отметим, что интеграл (42) не выражается в виде конечной комбинации известных специальных функций. Тем самым плоская волна $\mathcal{F}$ представляет собой фактически новую специальную функцию двух переменных. Мы получим 3 формулы, описывающие наиболее важные свойства этой функции.

1) Разложение по собственным функциям оператора $\square$:

$$\mathcal{F}(r,r') = \frac{8}{\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+2}(\lambda)\,\mathcal{P}_n(r,r'), \tag{46}$$

где J_k - функции Бесселя, а $\mathcal{P}_n$ - ядро спектрального проектора (19) оператора $\square$. Это представление является аналогом известного разложения плоской волны в евклидовом пространстве по сферическим функциям.

2) Разложение в ряд по степеням $Z_\pm$:

$$\mathcal{F}(r,r') = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+1)!}\,Q_n(Z_+, Z_-). \tag{47}$$

Здесь Q_n - однородные полиномы (25) степени $2n$. Этот ряд сходится равномерно в любой компактной области пространства $\mathbb{C}\times\mathbb{C} = \{(Z_+, Z_-)\}$ и определяет аналитическое продолжение плоской волны на комплексные значения эйконалов. В то же время он задает асимптотическое разложение $\mathcal{F}$ при малых гиперрадиусах ($\lambda = \rho\rho' \longrightarrow 0$), поскольку

$$Q_n(Z_+,Z_-) = \lambda^{2n} Q_n\left(\cos\frac{\Omega_+}{2}, \cos\frac{\Omega_-}{2}\right).$$

3) Асимптотическое разложение при больших гиперрадиусах ($\lambda \longrightarrow \infty$):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-,$$

$$\mathcal{F}_\pm \underset{\lambda\longrightarrow\infty}{\sim} \frac{\sin(Z_\pm \mp \pi/4)}{[Z_\pm(Z_\pm^2 - Z_-^2)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n}^{(\pm)} Z_\pm^{-2n} \mp$$

$$\mp \frac{\cos(Z_\pm \mp \pi/4)}{[Z_\pm(Z_\pm^2 - Z_-^2)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n+1}^{(\pm)} Z_\pm^{-2n-1}. \tag{48}$$

Здесь коэффициенты $A_k^{(\pm)}$ зависят от углов $\Omega_\pm$ и выражаются через полиномы Лежандра:

$$A_k^{(\pm)} = (2/\pi)^{3/2}(\pm 1/2)^k \Gamma(k+1/2) \sum_{n=0}^{k} (2\zeta_\pm)^n P_n(\zeta_\pm) \times \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{(k-n)!},$$

где

$$\zeta_+ = \frac{\cos(\Omega_+/2)}{(\cos^2\frac{\Omega_+}{2} - \cos^2\frac{\Omega_-}{2})^{1/2}}, \quad \zeta_- = \frac{i\cos(\Omega_-/2)}{(\cos^2\frac{\Omega_+}{2} - \cos^2\frac{\Omega_-}{2})^{1/2}}.$$

Отметим, что разложение (48) для функции $\mathcal{F}_-$ теряет смысл в направлении $\hat{r}=g(\pi)\hat{r}'$, где $Z_-=0$. В этом случае

$$\mathcal{F}_-\Big|_{\hat{r}=g(\pi)\hat{r}'} = \frac{2}{Z_+} + O(Z_+^{-N}) \quad \forall N \geq 1, \tag{49}$$

а для $\mathcal{F}_+$ по-прежнему справедливо представление (49).

Асимптотика (48) также неверна, если один из векторов r, r' лежит на границе (11) внутреннего пространства ($Z_+=Z_-$). В такой ситуации плоская волна выражается в элементарных функциях. При $r'\in\partial M$ углы $\Omega_\pm$ совпадают (см. (21)), поэтому в (45) подынтегральная функция не зависит от ξ. В результате получим явное выражение

$$\mathcal{F}(r,r')\Big|_{r'\in\partial M} = \frac{\sin(\lambda\cos\frac{\Omega}{2})}{\pi\lambda\cos\frac{\Omega}{2}}, \tag{50}$$

где $\cos\Omega$ определен в (31).

В упомянутом выше случае $\hat{r}'=g(\pi)\hat{r}$ также можно получить довольно простое выражение для $\mathcal{F}$. Поскольку $Z_-=0$ при $\hat{r}'=g(\pi)\hat{r}$, то в представлении (47) полиномы Q_n равны

$$Q_n(Z_+,0) = Z_+^{2n} Q_n(0,1),$$

где числа $Q_n(0,1)$ определены в (33). Поэтому разложение (47) сводится к степенному ряду

$$\mathcal{F} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Z_+^2/4)^n}{(2n+1)(n!)^2},$$

который можно записать в терминах гипергеометрической функции ${}_1F_2$:

$$\mathcal{F}(r,r')\Big|_{\hat{r}'=g(\pi)\hat{r}} = 2\,{}_1F_2(1/2;\ 1,\ 3/2;\ -Z_+^2/4). \tag{51}$$

Приступим к доказательству представлений (46)-(48). Докажем сперва формулу (46). Выше мы получили для $\mathcal{F}$ интегральное представление (45). Разложим в нем функцию $\sin Z = \sin(\lambda \cos \tau/2)$ в ряд по полиномам Гегенбауэра, используя следующую теорему сложения для функций Бесселя [10]:

$$\sin(\lambda \cos \varphi) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n+1)\, J_{\nu+2n+1}(\lambda) C^{\nu}_{2n+1}(\cos \varphi),$$

в которой возьмем $\nu=1$, $\varphi=\tau/2$. В результате придем к равенству

$$\mathcal{F}(r,r') = \frac{8}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+2}(\lambda)\, I_n(\hat{r},\hat{r}'), \tag{52}$$

где

$$I_n(\hat{r},\hat{r}') = \frac{n+1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi\, \frac{C^1_{2n+1}(\cos \frac{\tau}{2})}{\cos \frac{\tau}{2}}.$$

Этот интеграл совпадает с выражением (22) для ядра спектрального проектора $\mathcal{P}_n$, так как полиномы Гегенбауэра удовлетворяют тождеству

$$\frac{C^1_{2n+1}(\cos \frac{\tau}{2})}{\cos \frac{\tau}{2}} = \frac{\sin(2n+2)\frac{\tau}{2}}{\cos \frac{\tau}{2} \sin \frac{\tau}{2}} = 2\, C^1_n(\cos \tau).$$

Следовательно, ряд (52) совпадает с (46).

Получим теперь разложение (47). Рассмотрим интегральное представление (42). Разложим в нем $\sin x$ в ряд Тейлора,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

При этом интеграл (42) распадается на сумму интегралов

$$\mathcal{Q}_n(Z_+,Z_-) = \frac{4}{\pi} \int_{Z_-}^{Z_+} \frac{x^{2n+1}\, dx}{(Z_+^2 - x^2)^{1/2}(x^2 - Z_-^2)^{1/2}},$$

которые приводятся к виду (30) подстановкой

$$x^2 = \frac{1}{2}(Z_+^2 + Z_-^2) - \frac{1}{2}(Z_+^2 - Z_-^2)\cos \xi,$$

так что $\tilde{Q}(a,b)=2Q_n(a,b)$. В результате придем к представлению (47).

Докажем, наконец, асимптотическое разложение (48). Рассмотрим опять интегральное представление (42). Пусть $Z_{\pm}=\lambda a_{\pm}$, где $\lambda\to+\infty$, а параметры $a_{\pm}$ ограниченны, $0<\varepsilon\le a_{\pm}<\infty$ (в нашем случае $a_{\pm}=\cos(\Omega_{\pm}/2)$). Сделаем в (42) масштабное преобразование $x=\lambda u$:

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\pi\lambda}\int_{a_-}^{a_+}\frac{\sin\lambda u\, du}{(a_+^2-u^2)^{1/2}\,(u^2-a_-^2)^{1/2}}\,. \tag{53}$$

Асимптотика этого интеграла при $\lambda\to\infty$ определяется вкладом граничных точек $u=a_{\pm}$, в которых подынтегральная функция имеет корневые особенности. Чтобы разделить вклад этих точек, введем соответствующее разбиение единицы $\varphi_+(u)+\varphi_-(u)=1$ отрезка (a_-,a_+) $(\varphi_{\pm}(a_{\pm})=1,\ \varphi_{\pm}(a_{\mp})=0)$ и представим интеграл (53) в виде суммы

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-,$$

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{4}{\pi\lambda}\int_{a_-}^{a_+}\frac{\varphi_{\pm}(u)\sin\lambda u\, du}{(a_+^2-u^2)^{1/2}\,(u^2-a_-^2)^{1/2}}\,.$$

Выделим далее явно корневые особенности подынтегральной функции путем сдвига $u\to a_{\pm}\mp t$:

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{4}{\pi\lambda}\int_0^{\delta} t^{-1/2}\sin(\lambda a_{\pm}\mp t)\ f_{\pm}(t)\tilde{\varphi}_{\pm}(t)dt, \tag{54}$$

где $\delta=a_{\pm}-a_-$, $\tilde{\varphi}_{\pm}$ порождаются разбиением единицы $\varphi_{\pm}$, а функции $f_{\pm}$ равны

$$f_{\pm}(t) = [2a_{\pm}\mp t]^{-1/2}\ [\sigma^2-2a_{\pm}t\pm t^2]^{-1/2}, \tag{55}$$

$$\sigma = \sqrt{a_+^2-a_-^2}\,.$$

Теперь к интегралам (54) можно применить известную лемму Эрдейи [12], которая дает асимптотическое разложение функций $\mathcal{F}_{\pm}$ при $\lambda\to\infty$:

$$\mathcal{F}_{\pm} \underset{\lambda\longrightarrow}{\sim} \frac{4}{\pi\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\sin(\lambda a_{\pm}-\pi/4-\pi k/2)\ \lambda^{-k-1/2}\times\Gamma(k+1/2)f_k^{(\pm)}, \tag{56}$$

где $f_k^{(\pm)}$ - коэффициенты ряда Тейлора для функций $f_{\pm}(t)$ при $t=0$,

$$f_{\pm}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(\pm)}t^k.$$

Таким образом, чтобы завершить построение асимптотики плоской волны, нам осталось вычислить коэффициенты $f_k^{(\pm)}$. С этой целью разложим в ряд Тейлора оба сомножителя в (55):

$$[2a_{\pm}\mp t]^{-1/2} = (2a_{\pm})^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \left(\pm \frac{t}{2a_{\pm}}\right)^{s},$$

$$[\sigma^2 - 2a_{\pm} \pm t^2]^{-1/2} = \sigma^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\zeta_{\pm}) \left(\pm \frac{t\zeta_{\pm}}{a_{\pm}}\right)^{\ell}, \qquad (57)$$

где $\zeta_{+}=a_{+}/\sigma$, $\zeta_{-}=ia_{-}/\sigma$ (последнее разложение представляет собой производящее соотношение для полиномов Лежандра [10]). Перемножим ряды (57) и выразим двойные факториалы через гамма-функции. В результате получим явные выражения для коэффициентов $f_k^{(\pm)}$:

$$f_k^{(\pm)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a_{\pm}}} (\pm 2a_{\pm})^{-k} \sum_{n=0}^{k} (2\zeta_{\pm})^{n} P_n(\zeta_{\pm}) \times \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{(k-n)!}.$$

Подставим эту формулу в (56) и вспомним определение параметров σ и $a_{\pm}$: $\lambda a_{\pm}=Z_{\pm}$, $\lambda\sigma=\sqrt{Z_{+}^2-Z_{-}^2}$. После тривиальных преобразований придем к представлению (48).

Случай $a_{-}=0$ требует специального рассмотрения. При $a_{-}=0$ подынтегральная функция в (53) не имеет сингулярности на нижнем пределе:

$$\mathcal{F}_{-} = \frac{4}{\pi\lambda} \int_0^{\delta} \varphi_{-}(u) \frac{\sin \lambda u}{u} (a_{+}^2 - u^2)^{-1/2} du.$$

Разложим $(a_{+}^2 - u^2)^{-1/2}$ в ряд Тейлора при $u=0$. Первый член этого ряда порождает интеграл

$$\int_0^{\delta} \varphi_{-}(u) \frac{\sin \lambda u}{u} du \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-N}) \quad \forall N\geq 1,$$

а вклад всех остальных членов разложения убывает быстрее любой степени λ^{-N} (в этом легко убедиться, интегрируя по частям). Поэтому в данном случае асимптотика $\mathcal{F}_{-}$ имеет вид (49).

§ 4. Новые теоремы сложения для специальных функций

В предыдущих разделах мы получили ряд явных выражений для функций $\mathcal{P}_n(\hat{r},\hat{r}')$ и $\mathcal{F}(r,r')$ при определенных значениях аргументов. Эти соотношения можно трактовать как теоремы сложения для специальных функций, входящих в определения ядер $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{F}$. Формулы (32) и (50) приводят к хорошо известным теоремам сложения. Так, записав в равенстве (32) ядро в виде (19а) и учитывая, что при $\hat{r}'\in\partial M$ $\theta'_{\alpha}=0$ или π, получим теорему сложения для полиномов Гегенбауэра (27). С другой стороны, ядро $\mathcal{P}_n$ определяется также через функции Вигнера (19б), причем $\psi'=0$ при $\hat{r}'\in\partial M$. Поскольку

$d^{n/2}_{\mu\mu}(1)=1$, равенство (32) дает известную формулу [9] для характеров неприводимых представлений группы $SU(2)$:

$$\sum_{\mu=-j}^{j} \exp\,(2i\mu\varphi)d^{j}_{\mu\mu}(\cos\,2\psi) = C^{1}_{n}(\cos\,\psi\,\cos\,\varphi);\qquad j=0,1/2,1,\ldots$$

Соотношения (50) и (40) для плоской волны эквивалентны теореме сложения для функций Бесселя (44) с $\nu=1/2$.

Выражения (34) для ядер $\mathcal{P}_{n}$ и (51) для плоской волны $\mathcal{F}$ приводят к новым теоремам сложения, которые отсутствуют в справочной литературе.

Рассмотрим формулу (34) для ядра $\mathcal{P}_{n}(\hat{r},\hat{r})$. Запишем левую часть (34) в виде (19а). Поскольку по определению (6), (7) углы χ_{α}, θ_{α} и ψ связаны равенством $\sin\,\psi = \sin\,\chi_{\alpha}\,\sin\,\theta_{\alpha}$, получим новую теорему сложения для полиномов Гегенбауэра:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} N^{2}_{n\ell}\,(\sin\,\chi)^{2\ell}[C^{\ell+1}_{n-\ell}\,(\cos\,\chi)]^{2}\,P^{2}_{\ell}\,(\cos\,\theta) =$$

$$= (n+1)\,{}_{3}F_{2}(-n,\ n+2,\ 1/2;\ 1,\ 3/2;\ \sin^{2}\chi\,\sin^{2}\theta). \tag{58}$$

Используя в (34) другое определение (19б) ядра $\mathcal{P}_{n}$, придем к новой теореме сложения для функций Вигнера:

$$\sum_{\mu=-j}^{j} [d^{j}_{\mu\mu}(\cos\,2\psi)]^{2} = (2j+1)\,{}_{3}F_{2}(-2j,\ 2j+2,\ 1/2;\ 1,\ 3/2;\ \sin^{2}\psi),$$

$$j = 0,\ 1/2,\ 1,\ \ldots \tag{59}$$

Выражение (35) для ядра $\mathcal{P}_{n}(\hat{r},\ g(\pi)\hat{r})$ снова приводит к теоремам сложения (58) и (59), так как сферические координаты векторов $\hat{r}'= g(\pi)\hat{r}$ и $\hat{r}$ связаны следующим образом:

$$\chi'_{\alpha} = \pi - \chi_{\alpha},\qquad \theta'_{\alpha} = \pi - \theta_{\alpha},$$

$$\psi' = \psi,\qquad \varphi'_{\alpha} = \varphi_{\alpha} + \pi. \tag{60}$$

Рассмотрим теперь формулу (51) для функции $\mathcal{F}(r,r')$ при $\hat{r}'= g(\pi)\hat{r}$. Запишем левую часть (51) в виде суммы (40). Поскольку при таких аргументах плоской волны в силу (60) выполняются равенства $x_{\alpha}x'_{\alpha}=y_{\alpha}y'_{\alpha}=\frac{1}{2}\lambda\,\sin\,\chi_{\alpha}$, получим новую теорему сложения для функций Бесселя:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)j^{2}_{\ell}(z)\,P^{2}_{\ell}(\cos\,\theta) = 2\pi\,{}_{1}F_{2}(1/2;\ 1,\ 3/2;\ -z^{2}\,\sin^{2}\theta).$$

Комбинация представлений (46), (51) и (35) дает еще одну теорему сложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2}\,J_{2n+2}(x)\,{}_{3}F_{2}(-n,\ n+2,\ 1/2;\ 1,\ 3/2;\ y) =$$

$$\frac{\pi x^2}{4}\ {}_1F_2\left(1/2;\ 1,\ 3/2;\ -\frac{x^2y}{4}\right).$$

Это равенство является частным случаем известного соотношения для рядов, содержащих функции Бесселя $J_{2n+\nu}(x)$ и гипергеометрические функции ${}_{p+2}F_q(-n,\ n+\nu,\ (a_p);\ (b_q);\ y)$ (см. [13], с. 421, ф. 3).

Список литературы

[1] Inai T. A geometric setting for internal motions of the quantum three-body system // J. Math. Phys. 1987. Vol.28. P.1315-1326.

[2] Fock V. On the Schrödinger equation of the helium atom I and II // K. Nor Vidensk. Selsk. For. 1958. Vol.31. P.138-152.

[3] Smith F.T. Generalized angular momentum in many-body collisions // Phys. Rev, 1960. Vol.120. P.1058-1069.

[4] Dragt A.J. Classification of three-particle states according to SU_3 // J. Math. Phys. 1965. Vol.6. P.533-553.

[5] Симонов Ю.А. Задача трех тел. Полная система угловых функций // Ядерная физика. 1966. Т.3. С.630-633; Бадалян А.М., Симонов Ю.А. Задача трех тел. Уравнение для парциальных волн // Ядерная физика. 1966. Т.3. С.1032-1047.

[6] Whitten R.C., Smith F.T. Symmetric representation for three-body problems. II. Motion in Space // J.Math. Phys. 1968. Vol.9. 1103-1113.

[7] Смородинский Я.А., Эфрос В.Д. Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник // Ядерная физика. 1973. Т.17. С.210-224.

[8] Klar H. Use of alternative hyperspherical coordinates for three-body systems // J.Math. Phys. 1985. Vol.26. P.1621-1625.

[9] Abbot P.C., Maslen E.N. Coordinate systems and analytic expansions for three-body atomic wavefunctions: I. Partial summation for the Fock expansion in hyperspherical coordinates // Phys. 1987. Vol.A20. P.2043-2075.

[10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1,2. М.: Наука, 1973. 295 с.

[11] Abbott P.C., Maslen E.N. // J. Phys. 1987. Vol.A20. P.2043-2075.

[12] Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

[13] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 798 с.

Ленинградский государственный университет
199034, Ленинград, Университетская наб., 7/9

Поступило 10 сентября 1989 г.