Н. В. Бударина, Регулярные и повсеместные системы для совместных диофантовых приближений,
Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 4, 43–74

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.42, 511.72

РЕГУЛЯРНЫЕ И ПОВСЕМЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Н. В. Бударина (г. Хабаровск)

Аннотация

В работе теорема типа Хинчина для многочленов в случае расходимости обобщена на совместные приближения в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ и на приближения, включающие естественное ограничение на производные. Доказательство опирается на построение оптимальных регулярных систем, технику повсеместных систем и метод построения множеств близких сопряженных алгебраических чисел.

Abstract

In this paper the Khintchine type theorem for polynomials in the divergence case is generalised to simultaneous approximations in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ and to approximations which incorporate a natural restriction on derivatives. The proof builds upon the construction of the optimal regular systems, the ubiquity technique and the construction of a system of close conjugate algebraic numbers.

1 Введение

Несмотря на то, что теория меры была применена в теории диофантовых приближений Э. Борелем еще в конце 19-го века, многие считают началом отсчета метрической теории диофантовых приближений 1924 год. В этом году А.Я. Хинчин [21] доказал свою знаменитую теорему о приближении действительных чисел рациональными. Пусть $\mu_1(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Пусть $L_1(\Psi)$ – множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$|x - p/q| < \Psi(q)/q$$

имеет бесконечное число решений в $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Теорема 1 (А.Я. Хинчин). *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ функция такая, что $q\Psi(q)$ монотонно убывает. Тогда*

$$\mu_1 L_1(\Psi) = \begin{cases} 0 & \sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) < \infty, \\ \mu_1(I) & \sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) = \infty. \end{cases}$$

Условие монотонности функции $q\Psi(q)$ необязательно в случае сходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty}\Psi(r)$, однако оно является существенным для случая расходимости (см. [28]). Доказательство случая сходимости в теореме Хинчина достаточно простое и является следствием леммы Бореля-Кантелли, а случая расходимости – сложное. А.Я. Хинчин использовал для доказательства случая расходимости теорию цепных дробей. К настоящему времени ситуация во многом изменилась: были введены понятия регулярных систем и повсеместных систем. Понятие регулярной системы точек было введено в теорию диофантовых приближений А. Бейкером и В. Шмидтом [4], чтобы охарактеризовать равномерность распределения счетных подмножеств на прямой, в частности, множества алгебраических чисел фиксированной степени. Повсеместные системы были введены М. Додсоном, Ринне и Виккерсом [20] для изучения приближений рациональными гиперплоскостями. В [26] показано, что регулярные системы и повсеместные системы эквивалентны в случае приближений рациональными числами. Оказалось, что если удается доказать регулярность или повсеместность систем, то отсюда получаются оценки снизу для размерности Хаусдорфа диофантовых множеств [4], [20], [19], [16], [29], [24]. Дальнейшее развитие регулярные и повсеместне системы нашли в, так называемых, оптимальных регулярных системах [6], регулярных системах резонансных множеств [1] и локально повсеместных системах [11], введение которых позволяет доказывать аналоги теоремы Хинчина в случае расходимости (см. [5], [2], [10], [11], [12], [8], [25]).

Интересно, что в настоящее время есть задачи, в которых случай расходимости доказан, а случай сходимости нет. Например, это касается совместных приближений для системы неравенств:

$$\begin{array}{lcl}\|qx\| & < & \psi(q),\\ \|qf(x)\| & < & \psi(q)\end{array}$$

для трижды непрерывно дифференцируемой функции f на I, у которой $f''(x)\neq 0$ для почти всех $x\in I$. Случай расходимости доказан в [12], а случай сходимости доказан только в частных случаях (см. [14]).

В данной работе продемонстрируем применение оптимальных регулярных систем и локально повсеместных систем для доказательсва аналогов теоремы Хинчина в случае расходимости. Первый результат – это обобщение теоремы Хинчина на совместные приближения в пространствах действительных, комплексных и p-адических чисел, а второй – это теорема типа Хинчина для приближений нуля значениями многочленов и их первых производных.

Пусть k,l,m – натуральные числа, и $\mathbb{S}=\mathbb{R}^k\times\mathbb{C}^l\times\mathbb{Q}_p^m$ – произведение k-мерного евклидового, l-мерного комплексного и m-мерного p-адического пространств. Пусть $\mu_2(A_2)$ – мера Лебега измеримого множества $A_2\subset\mathbb{C}$; пусть $\mu_3(A_3)$ обозначает меру Хаара измеримого множества $A_3\subset\mathbb{Q}_p$. Используя эти определения, определим произведение мер μ на $\mathbb{R}^k\times\mathbb{C}^l\times\mathbb{Q}_p^m$, полагая $\mu(A)=\prod_{i=1}^{k}\mu_1(A_{1,i})\prod_{j=1}^{l}\mu_2(A_{2,j})\prod_{t=1}^{m}\mu_3(A_{3,t})$ для множества $A=$

$\prod_{i=1}^{k} A_{1,i} \times \prod_{j=1}^{l} A_{2,j} \times \prod_{t=1}^{m} A_{3,t}$, где $A_{1,i} \in \mathbb{R}$, $A_{2,j} \in \mathbb{C}$ и $A_{3,t} \in \mathbb{Q}_p$. Зафиксируем параллелепипед $T_0 = I^k \times K^l \times D^m$, где I – интервал в $\mathbb{R}$, K – диск в $\mathbb{C}$ и D – цилиндр в $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, где $\lambda_i > 0$ и $v_1 \geqslant \frac{-km}{k+2l+m}$, $v_2 \geqslant \frac{-lm}{k+2l+m}$, $v_3 \geqslant \frac{m(k+2l)}{k+2l+m}$.

Пусть

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0,\ a_j \in \mathbb{Z},$$

– целочисленный многочлен степени n и высоты $H = H(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$. Для заданного $n \in \mathbb{N}$, через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество целочисленных многочленов степени $\leqslant n$ и через $\mathcal{P}'_n$ – множество целочисленных многочленов степени n. Далее, пусть $L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi)$ обозначает множество точек $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in T_0$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_l)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, для которых система неравенств

$$\begin{array}{rcl} \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |P(x_i)| & \leqslant & H(P)^{-v_1/k} \Psi^{\lambda_1/k}(H(P)), \\ \max_{1 \leqslant j \leqslant l} |P(z_j)| & \leqslant & H(P)^{-v_2/l} \Psi^{\lambda_2/l}(H(P)), \\ \max_{1 \leqslant t \leqslant m} |P(w_t)|_p & \leqslant & H(P)^{-v_3/m} \Psi^{\lambda_3/m}(H(P)), \end{array} \tag{1}$$

где

$$\begin{array}{c} \frac{v_1}{k} = \frac{v_2}{l} = \frac{v_3}{m} - 1 = \frac{n}{k+2l+m} - 1, \\ \frac{\lambda_1}{k} = \frac{\lambda_2}{l} = \frac{\lambda_3}{m} = \frac{1}{k+2l+m}, \end{array} \tag{2}$$

выполняется для бесконечно числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция, и $n \geqslant k + 2l$. Тогда при расходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r)$ множество $L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi)$ имеет полную меру в T_0, т.е. $\mu(T_0 \setminus L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi)) = 0$.*

Одним из основных моментов доказательства теоремы 2 является построение оптимальной регулярной системы из наборов корней

$$(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(l)}, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)})$$

целочисленных многочленов P, т.е. $P(\alpha^{(i)}) = P(\beta^{(j)}) = P(\gamma^{(t)}) = 0$, где $\alpha^{(i)} \in \mathbb{R}$, $\beta^{(j)} \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\, \beta^{(j)}| > \frac{1}{2}\delta_1$, $\gamma^{(t)} \in \mathbb{Q}_p$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $1 \leqslant t \leqslant m$. В работе [9] дано определение оптимальной регулярной системы. Однако поскольку в работе речь идет о таких классических объектах математики как целочисленные многочлены и алгебраические числа, то дадим явную конструкцию оптимальной регулярной системы.

Обозначим через $\prod_+(\mathbf{a})$ произведение модулей ненулевых координат вектора $\mathbf{a}$. Пусть дана точка $\mathbf{u_0} = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,k}, z_{0,1}, \ldots, z_{0,l}, w_{0,1}, \ldots, w_{0,m}) \in \mathbb{S}$ и набор $\mathbf{r} = (r_{x_1}, \ldots, r_{x_k}, r_{z_1}, \ldots, r_{z_l}, r_{w_1}, \ldots, r_{w_m})$ положительных чисел, тогда множество

$$T(\mathbf{u_0}, \mathbf{r}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{S} :\ |x_i - x_{0,i}| \leqslant r_{x_i},\ \ |z_j - z_{0,j}| \leqslant r_{z_j},\ \ |w_t - w_{0,t}|_p \leqslant r_{w_t}\},$$

где $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $1 \leqslant t \leqslant m$, будем называть параллелепипедом в $\mathbb{S}$. Легко видеть, что $\mu(T(\mathbf{u_0}, \mathbf{r})) \asymp \prod_+(\mathbf{r})$.

Определение 1. *Пусть даны счетное множество $R \subset \mathbb{S}$, параллелепипед $T_0 \subset \mathbb{S}$, функция $h : R \to \mathbb{N}$, называемая высотой, и монотонно убывающие функции $d_{x_{i_1}}, d_{z_{i_2}}, d_{w_{i_3}} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $1 \leqslant i_1 \leqslant k$, $1 \leqslant i_2 \leqslant l$, $1 \leqslant i_3 \leqslant m$. Тройка $(R, h, \mathbf{d})$ будет называться регулярной системой точек в T_0, если существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для любого параллелепипеда $T \subset T_0$ найдется достаточно большое число $r_0 > 0$ такое, что для любого $r > r_0$ можно выбрать набор точек $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$ такой, что*

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \subset T, \ (1 \leqslant i \leqslant t), \tag{3}$$

$$h(\boldsymbol{\nu}_i) \leqslant r, \ (1 \leqslant i \leqslant t), \tag{4}$$

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \cap T(\boldsymbol{\nu}_j, \mathbf{d}(r)) = 0 \ (1 \leqslant i < j \leqslant t), \tag{5}$$

$$t \geqslant c_1 \frac{\mu(T)}{\prod_+(\mathbf{d}(r))}. \tag{6}$$

Определение 2. *Регулярную систему точек $(R, h, \mathbf{d})$ назовем оптимальной, если для любого параллелепипеда $T \subset T_0$ выполняется условие*

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\prod_+ (\mathbf{d}(r)) \#\{\boldsymbol{\nu} \in R \cap T : \, h(\boldsymbol{\nu}) \leqslant r\} \right) < \infty. \tag{7}$$

Пусть $R := \{\boldsymbol{\nu} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(l)} \gamma^{(1)}), \ldots, \gamma^{(m)}) \in T_0 : \exists P \in \mathcal{P}'_n,\ P(\alpha^{(i)}) = P(\beta^{(j)}) = P(\gamma^{(t)}) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l, 1 \leqslant t \leqslant m\}$. Тогда для $\boldsymbol{\nu} \in R$ величину $H(\boldsymbol{\nu}) := \min\{H(P) | \, P \in \mathcal{P}'_n,\ P(\alpha^{(i)}) = P(\beta^{(j)}) = P(\gamma^{(t)}) = 0\}$ будем рассматривать как высоту $\boldsymbol{\nu}$, а сам многочлен P будем называть *квазиминимальным.*

Доказательство теоремы 2 будет основано на следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть T_0 – ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$. Определим R как множество наборов $\boldsymbol{\nu}_P = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$, где $\bar{\alpha}$ – k-набор действительных, $\bar{\beta}$ – l-набор комплексных, $\bar{\gamma}$ – m-набор p-адических корней многочлена $P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i \in \mathbb{Z}[f]$. Пусть выполнены условия*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - k - 2l + 1, \quad w_1 \geqslant 0,\ w_2 \geqslant 0,\ \ w_3 \geqslant 1,$$

и пусть

$$d_x(r) = r^{-(w_1/k+1)},\ \ d_z(r) = r^{-(w_2/l+1)},\ \ d_w(r) = r^{-w_3/m},\ \ h(\boldsymbol{\nu}_P) = H(P).$$

Тогда $(R, h, \mathbf{d})$ – регулярная система в T_0.

Замечание 1. *Заметим, что теорема 3 позволяет строить регулярные системы в пространстве S без дополнительных условий связи между вектором* $\mathbf{v}$ *и натуральными числами* k, l, m.

Для натурального числа $Q > 1$ определим класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathcal{P}_n,\ H(P) \leqslant Q\}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3 необходимо доказать следующий метрический результат.

Теорема 4. *Для каждого* $n \geqslant k + 2l$ *существуют постоянные* δ_0 *и* c_0, *зависящие только от* n *и* p *(и не зависящие от* Q*), обладающие следующим свойством. Для любого множества* $T \subset T_0$ *и для любых* w_1, w_2, w_3, *удовлетворяющих условиям*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - k - 2l + 1, \quad w_1, w_2 \geqslant 0,\ w_3 \geqslant 1,$$

существует измеримое множество $B_1(Q,T) \subset T$ *такое, что для каждой точки* $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in B_1(Q,T)$ *существует многочлен* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, *удовлетворяющий системе*

$$\begin{array}{lll} |P(x_i)| < c_0 Q^{-w_1/k}, & |P(z_j)| < c_0 Q^{-w_2/l}, & |P(w_t)|_p < c_0 Q^{-w_3/m}, \\ |P'(x_i)| \geqslant \delta_0 Q, & |P'(z_j)| \geqslant \delta_0 Q, & |P'(w_t)|_p \geqslant \delta_0, \\ 1 \leqslant i \leqslant k, & 1 \leqslant j \leqslant l, & 1 \leqslant t \leqslant m, \end{array} \tag{8}$$

и для $Q > Q_0$ *верна оцена меры*

$$\mu(B_1(Q,T)) \geqslant s\mu(T), \tag{9}$$

где $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < s < 1$.

Доказательство теоремы 2 проведем для случая $k = l = m = 1$, поскольку общий случай доказывается аналогично (см. [3]).

Изучение поведения производных многочленов (и вообще, линейных форм гладких функций) было крайне важно при доказательстве теорем типа Хинчина. Далее исследуем метрические свойства множества

$$\mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2) = \left\{ x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] : \begin{array}{l} |P(x)| < \Psi_1(H(P)) \\ |P'(x)| < \Psi_2(H(P)) \end{array} \text{ для бесконечного числа } P \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{10}$$

Опираясь на результаты Клейнбока и Маргулиса [22], в 2001 Берник, Клейнбок и Маргулис [17] нашли далеко идущее обобщение теоремы Спринджука (гипотезы Малера), включающее условие на производные. Этот результат доказан для линейных форм невырожденных семейств функций и в случае многочленов сводится к следующему утверждению.

Теорема 5. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2)) = 0, \tag{11}$$

где $\Psi_1(h) = h^{-w-\lambda}$ *и* $\Psi_2(h) = h^{1-\lambda}$ *для некоторого* $\lambda \geqslant 0$ *и* $w > n - 2\lambda$.

В той же работе Берник, Клейнбок и Маргулис поставили проблему о нахождении оптимальных условий для функций Ψ_1 и Ψ_2, опеспечивающих справедливость (11). Другими словами, они поставили проблему о доказательстве теоремы типа Хинчина для $\mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2)$.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые вспомогательные функции, которые определяются через Ψ_1 и Ψ_2 и отвечают различным "техническим" ограничениям на Ψ_1 и Ψ_2. На данный момент достаточно сказать, что эти вспомогательные функции естественно возникают в доказательстве. Эти функции

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(h) &= \min\{\Psi_1(h),\ \Psi_2^{-1}(h)h^{1-n}\}, \\ \psi(h) &= K^{-1}\bar{\Psi}_1(h)\Psi_2^{-1}(h), \\ \rho(h) &= K^2 h^{-n+1}\Psi_2^{-2}(h), \end{aligned}$$

где K – достаточно большая постоянная.

Следуя определению в [11], будем говорить, что функция f является 2-*регулярной*, если существует положительная постоянная $\lambda < 1$ такая, что $f(2^{t+1}) \leqslant \lambda f(2^t)$ для всех достаточно больших t. Также будем говорить, что функция f является *квази-монотонной*, если существуют постоянные z и c_1' такие, что $0 < z < 1 \leqslant c_1'$ и $f(zx) \leqslant c_1' f(x)$ для всех достаточно больших x.

Теорема 6. *Пусть функции* $\Psi_1, \Psi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *такие, что* $\Psi_1\Psi_2$ – *монотонно убывающая функция. Пусть* $n \geqslant 2$ – *целое число. Предположим, что* $Kh^{\frac{-n+2}{3}} \leqslant \Psi_2(h) < k_0 K h$ *и* ψ *или* ρ *является* 2-*регулярной функцией, где* k_0 – *положительная постоянная, зависящая только от* n. *Кроме того, предположим, что* ψ *является квази-монотонной функцией. Тогда*

$$\mu(\mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2)) = 1, \quad \text{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_1(h)\Psi_2(h) = \infty.$$

2 Вспомогательные утверждения к теореме 4

Зафиксируем $\delta_1 > 0$. Удалим из параллелепипеда T_0 множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялось неравенство $|\operatorname{Im} z| \geqslant \delta_1$. Используя лемму 1 при $j = n$, получаем, что $|z - \beta| < H(P)^{-\nu}$, где $\nu > 0$; поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $H(P) \to \infty$, то существует корень β такой, что $|\operatorname{Im}\beta| > \frac{1}{2}\delta_1$. В данном случае, существует также сопряженный корень $\bar{\beta}$ многочлена P такой, что $|\beta-\bar{\beta}|>\delta_1$, и для каждого действительного корня α многочлена P справедливы оценки $|\beta-\alpha|=|\bar{\beta}-\alpha|>\frac{1}{2}\delta_1$. Объединяя вышесказанное, получаем

$$|\operatorname{Im}\beta|>\frac{1}{2}\delta_1, \quad |\operatorname{Im}z|\geqslant\delta_1, \quad |\beta-\bar{\beta}|>\delta_1, \quad |\beta-\alpha|>\frac{1}{2}\delta_1. \tag{12}$$

Из условий теоремы 2 и (12) следует ограничение $\deg P\geqslant 3$.

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – корни многочлена $P\in\mathcal{P}_n(H)$ в $\mathbb{C}$ и $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ – корни в $\mathbb{Q}_p^*$, где $\mathbb{Q}_p^*$ – наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и все алгебраические числа. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, то в поле $\mathbb{Q}_p^*$ можно определить нормирование, продолжающее нормирование в $\mathbb{Q}_p$. Норму $r\in\mathbb{Q}_p^*$ обозначаем $|r|_p$.

Будем считать, что все координаты $\mathbf{u}$ являются трансцендентными числами, поскольку мера всех $\mathbf{u}\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, у которых хотя бы одна координата алгебраическое число, равна нулю. Будем предполагать, что многочлены P в системе (1) являются неприводимыми и удовлетворяют условиям:

$$|a_n|>c(n)H(P), \;\; |a_n|_p>p^{-n}. \tag{13}$$

Сведение произвольных многочленов к таким специальным многочленам приведено в [18].

Класс неприводимых многочленов P степени $\deg P\leqslant n$ и высоты $H(P)=H$, удовлетворяющих (13), обозначим через $P_n(H)$. Далее пусть $P_n=\bigcup_{H=1}^{\infty}P_n(H)$. Используя известные неравенства для оценок сверху модулей корней многочлена P и их p-адических норм (см. [27]), из (13) следует

$$|\alpha_i|\leqslant 2, \;\; |\gamma_i|_p<p^n, \;\; i=1,\ldots,n. \tag{14}$$

Для каждого корня α_i, γ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, многочлена $P\in P_n(H)$ определим множества:

$$\begin{aligned} S_2(\alpha_s) &= \{z\in\mathbb{C}: |z-\alpha_s|=\min_{1\leqslant j\leqslant n}|z-\alpha_j|\}, \\ S_1(\alpha_j) &= S_2(\alpha_j)\cap\mathbb{R}, \\ S_3(\gamma_k) &= \{w\in\mathbb{Q}_p: |w-\gamma_k|_p=\min_{1\leqslant j\leqslant n}|w-\gamma_j|_p\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $S_1(\alpha_j)$, $S_2(\alpha_s)$, $S_3(\gamma_k)$ для фиксированного набора j,s,k, и для упрощения обозначений будем полагать, что $j=1$, $\alpha_s=\beta_1$ и $k=1$, где множество корней $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ является перестановкой множества корней $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{array}{lclcl} |\alpha_1-\alpha_2| & \leqslant & |\alpha_1-\alpha_3| & \leqslant\ldots\leqslant & |\alpha_1-\alpha_n|, \\ |\beta_1-\beta_2| & \leqslant & |\beta_1-\beta_3| & \leqslant\ldots\leqslant & |\beta_1-\beta_n|, \\ |\gamma_1-\gamma_2|_p & \leqslant & |\gamma_1-\gamma_3|_p & \leqslant\ldots\leqslant & |\gamma_1-\gamma_n|_p. \end{array}$$

Для многочлена $P \in P_n(H)$ определим действительные числа ρ_{ij} $(i = 1,2,3)$ из соотношений

$$\begin{array}{rcl} |\alpha_1-\alpha_j| &=& H^{-\rho_{1j}}, \quad 2\leqslant j\leqslant n, \quad \rho_{12}\geqslant\rho_{13}...\geqslant\rho_{1n},\\ |\beta_1-\beta_j| &=& H^{-\rho_{2j}}, \quad 2\leqslant j\leqslant n, \quad \rho_{22}\geqslant\rho_{23}...\geqslant\rho_{2n},\\ |\gamma_1-\gamma_j|_p &=& H^{-\rho_{3j}}, \quad 2\leqslant j\leqslant n, \quad \rho_{32}\geqslant\rho_{33}...\geqslant\rho_{3n}. \end{array}$$

В силу того, что корни $|\alpha_j|$, $|\beta_s|$, $|\gamma_k|_p$ ограничены, получаем, что существует постоянная $\varepsilon_1 > 1$ такая, что $\rho_{ij} \geqslant -\frac{\varepsilon_1}{2}$ для $i = 1,2,3$ и $2 \leqslant j \leqslant n$. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon N^{-1}$ для достаточно большого N, и пусть $T' = [\varepsilon_1^{-1}]$. Определим целые числа k_j, l_j и m_j, $2 \leqslant j \leqslant n$, из неравенств

$$\begin{array}{c} \dfrac{k_j-1}{T'}\leqslant\rho_{1j}<\dfrac{k_j}{T'}, \qquad \dfrac{l_j-1}{T'}\leqslant\rho_{2j}<\dfrac{l_j}{T'}, \qquad \dfrac{m_j-1}{T'}\leqslant\rho_{3j}<\dfrac{m_j}{T'},\\ k_2\geqslant k_3\geqslant...\geqslant k_n\geqslant 0, \quad l_2\geqslant l_3\geqslant...\geqslant l_n\geqslant 0 \quad m_2\geqslant m_3\geqslant...\geqslant m_n\geqslant 0. \end{array}$$

Далее определим числа q_i, r_i и s_i

$$\begin{array}{rcl} q_i &=& \dfrac{k_{i+1}+\ldots+k_n}{T'}, \quad (1\leqslant i\leqslant n-1)\\ r_i &=& \dfrac{l_{i+1}+\ldots+l_n}{T'}, \quad (1\leqslant i\leqslant n-1)\\ s_i &=& \dfrac{m_{i+1}+\ldots+m_n}{T'}, \quad (1\leqslant i\leqslant n-1). \end{array} \tag{15}$$

С каждым многочленом $P \in \mathcal{P}_n(H)$ будем связывать три целочисленных вектора $\mathbf{q} = (k_2,\ldots,k_n)$, $\mathbf{r} = (l_2,\ldots,l_n)$ и $\mathbf{s} = (m_2,\ldots,m_n)$. Из (14) можно получить оценки снизу для k_j, l_j, и m_j, $2 \leqslant j \leqslant n$. Дискриминант неприводимых многочлнов есть целое число, отличное от нуля. С другой стороны, дискриминант выражается через произведение разностей корней. Это означает, что корни не могут быть слишком близкими и приводит к оценкам сверху для k_j, l_j, m_j, $2 \leqslant j \leqslant n$. Данные количественные оценки можно найти в [27]. Поэтому число таких векторов $(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ конечно (и зависит только от n, p и T'). Многочлены $P \in P_n(H)$ с одним и тем же набором векторов $(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ объединим в подмножество $P_n(H,\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$.

В ходе доказательства теоремы будем оценивать значения многочленов, часто используя разложение в ряд Тейлора. Для получения оценок сверху для членов разложения в ряд Тейлора (и для других целей) будем использовать следующие две леммы (доказанные в [15] и [23]).

Лемма 1. *Пусть* $P \in P_n$.

Тогда

$$\begin{aligned}
|u-\alpha| &\leqslant 2^n|P(u)||P'(\alpha)|^{-1},\\
|w-\gamma_1|_p &\leqslant |P(w)|_p|P'(\gamma_1)|_p^{-1},\\
|u-\alpha| &\leqslant \min_{2\leqslant j\leqslant n}\left(2^{n-j}|P(u)||P'(\alpha)|^{-1}\prod_{k=2}^{j}|\alpha-\alpha_k|\right)^{\frac{1}{j}},\\
|w-\gamma_1|_p &\leqslant \min_{2\leqslant j\leqslant n}\left(|P(w)|_p|P'(\gamma_1)|_p^{-1}\prod_{k=2}^{j}|\gamma_1-\gamma_k|_p\right)^{\frac{1}{j}}
\end{aligned}$$

где $u=x$ *или* $u=z$ *и* $\alpha=\alpha_1$ *или* $\alpha=\beta_1$ *соответственно.*

Лемма 2. *Пусть* $P\in P_n(H,\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
|P^{(l)}(\alpha_1)| &< c(n)H^{1-q_l+(n-l)\varepsilon_1},\\
|P^{(l)}(\beta_1)| &< c(n)H^{1-r_l+(n-l)\varepsilon_1},\\
|P^{(l)}(\gamma_1)|_p &< c(n)H^{-s_l+(n-l)\varepsilon_1},
\end{aligned}$$

где $1\leqslant l\leqslant n-1$, *и*

$$|P'(\alpha_1)|>H^{1-q_1},\ \ |P'(\beta_1)|>H^{1-r_1},|P'(\gamma_1)|_p>H^{-s_1}. \tag{16}$$

Лемма 3. *Пусть* $z\in S(\beta_1)$. *Тогда*

$$|z-\beta_1|\leqslant n|P(z)||P'(z)|^{-1},P(z)\neq 0. \tag{17}$$

Доказательство. Найдем производную $P'(z)=(a_n(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_n))'$ многочлена P и оценим величину

$$|P'(z)||P(z)|^{-1}=\sum_{i=1}^{n}|z-\beta_i|^{-1}\leqslant n|z-\beta_1|^{-1},$$

откуда следует (17). □

Аналогично, в действительном и p-адическом случаях справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_1|\leqslant n|P(x)||P'(x)|^{-1} \quad \text{при} \quad x\in S(\alpha_1),P(x)\neq 0,\\
&|w-\gamma_1|_p\leqslant |P(w)|_p|P'(w)|_p^{-1} \quad \text{при} \quad w\in S(\gamma_1),P(w)\neq 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Лемма 4. *Если корни* α_i, $i=1,\ldots,n$, *многочлена* $P\in\mathcal{P}_n'$ *удовлетворяют условию* $|\alpha_i|<c$, $c>0$, *то* $|a_n|\gg H(P)$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что существует множество корней $\alpha_{i_1}\ldots,\alpha_{i_s}$, $s\geqslant 1$, $\alpha_{i_k}\neq\alpha_{i_l}$, многочлена $P=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}|\gg H(P)|a_n|^{-1}. \tag{19}$$

Пусть $H(P) = a_j$ для некоторого $0 \leqslant j \leqslant n$. Из равенства

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

выразим коэффициент a_j и получим

$$H(P) = (-1)^{n-j}a_n(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-j}+\dots+\alpha_{j+1}\alpha_{j+2}\dots\alpha_n). \tag{20}$$

Число слагаемых в (20) равно C_n^j. Если абсолютное значение каждой из сумм меньше чем $(C_n^j)^{-1}|a_n|^{-1}H(P)$, то получаем противоречие.

Во-вторых, поскольку корни многочлена P ограничены сверху, то в силу (14) и (19) имеем

$$1 \gg |\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_s}| \gg H(P)|a_n|^{-1}.$$

Следовательно, $|a_n| \gg H(P)$. $\Box$

3 Доказательство теоремы 4

Сначала покажем, используя принцип ящиков Дирихле, что при $c_0 = = c_0(n,p,T)$ для каждой точки $\mathbf{u}$ множества T существует ненулевой многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ удовлетворяющий (8.1). Затем докажем существование постоянной δ_0, что является главной трудностью при доказательстве теоремы.

Определим множество $B_2(Q,T)$ как множество точек $\mathbf{u} \in T$, для которых существует хотя бы один ненулевой многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяюший системе неравенств (8.1).

Предложение 2. *Для любого множества T в T_0 существует постоянная c_0, зависящая только от n, p и T такая, что для всех достаточно больших Q имеет место равенство $B_2(Q,T) = T$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{u} \in T$. Поскольку множество T ограничено, значения функций f^i и их производных на T ограничены (по абсолютной величине и p-адической норме соответственно) некоторой постоянной, зависящей только от T и n. Следовательно, для любого многочлена $P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i \in \mathcal{P}_n(Q)$ точка $M_P = (P(x), P(z), P(w))$ будет принадлежать множеству $T' = (\mathbf{0}, \mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}' = ((n+1)c_2Q, (c_2(n+1))^2Q^2, p^{-l})$, $c_2 > 0$ – постоянная зависящая от T.

Пусть $x \in [-c_2, c_2]$. Интервал $[-(n+1)c_2Q, (n+1)c_2Q]$ в $\mathbb{R}$ можно покрыть $[2(n+1)c_2Q/(c_0Q^{-w_1})]+1$ интервалами длины $c_0Q^{-w_1}$. Обозначим эти интервалы через l_{x,b_1}, тогда

$$1 \leqslant b_1 \leqslant [2(n+1)c_2Q/(c_0Q^{-w_1})] + 1 \leqslant 3c_0^{-1}(n+1)c_2Q^{1+w_1}$$

при Q достаточно большом.

Пусть $z \in C(0,c_2)$. Круг радиуса $(n+1)c_2Q$ в $\mathbb{C}$ содержится в квадрате $[-(n+1)c_2Q,(n+1)c_2Q]^2$ в $\mathbb{C}$. Каждую из сторон этого квадрата можно покрыть отрезками длины $c_0Q^{-w_2}2^{-1/2}$, при этом число отрезков на каждой из сторон не превосходит $[2(n+1)c_2Q(c_0Q^{-w_2}2^{-1/2})^{-1}]+1$. Разбиение каждой из сторон индуцирует покрытие всего квадрата квадратами, каждый из которых покрывается кругом диаметра $c_0Q^{-w_2}$. Обозначим эти круги через l_{z,b_2}, тогда число кругов b_2 не превосходит

$$([2(n+1)c_2Q(c_0Q^{-w_2}2^{-1/2})^{-1}]+1)^2 \leqslant 9(n+1)^2c_2^2c_0^{-2}Q^{2+2w_2}$$

при Q достаточно большом.

Далее построим покрытие цилиндра D радиуса c_2 в $\mathbb{Q}_p$ цилиндрами l_{w,b_3} радиуса $c_0Q^{-w_3}$. Каждое p-адическое число из данного цилиндра удовлетворяет условию $|w|_p \leqslant c_2 = p^{\log_p c_2}$, откуда $|w_p| \leqslant p^{l_0}$, где $l_0 = [\log_p c_2]$. Таким образом, $w = \sum_{j=-l_0}^{\infty} w^{(j)}p^j$, $w^{(j)} \in \{0,1,\dots,p-1\}$. В качестве цилиндров покрытия возьмем цилиндры радиуса $c_0Q^{-w_3}$ с центрами в точках $w' = \sum_{j=-l_0}^{m_0} w^{(j)}p^j$, $m_0 = [-\log_p(c_0Q^{-w_3})]$, $w^{(j)} \in \{0,1,\dots,p-1\}$. По построению для любой точки $w = \sum_{j=-l_0}^{\infty} w^{(j)}p^j \in D$ точка $w^{(j)} \in \{0,1,\dots,p-1\}$ будет удовлетворять $w - w' = \sum_{j=m_0+1}^{\infty} w^{(j)}p^j$ и $|w-w'|_p \leqslant p^{-(m_0+1)} < c_0Q^{-w_3}$. Таким образом, число цилиндров b_3 в этом покрытии равно

$$p^{l_0+m_0+1} < pc_2c_0^{-1}Q^{w_3}.$$

Следовательно, набор параллелепипедов $l_{x,b_1}\times l_{z,b_2}\times l_{w,b_3}$ образует покрытие T, число элементов в котором не более

$$27c_0^{-4}(n+1)^3pc_2^4Q^{3+w_1+2w_3+w_3} = 27c_0^{-4}(n+1)^3pc_2^4Q^{n+1}.$$

Положим $c_0 = (27(n+1)^3 2^{-(n+1)}pc_2^4)^{\frac{1}{4}}$. Поскольку число различных многочленов $\#P = (2Q+1)^{n+1}$, то найдется параллелепипед $l_{x,b_1}\times l_{z,b_2}\times l_{w,b_3}$, содержащий по крайней мере две точки: M_{P_1} и M_{P_2}. Легко видеть, что многочлен $P = P_1 - P_2$ удовлетворяет системе (8.1). $\square$

Для некоторых $0 < v_i' < 1$, $i = 1,2,3$, которые будут выбраны позднее, определим следующие множества:

$$\begin{aligned}
L_0(Q,T) \ &:= \{\mathbf{u} \in B_2(Q,T) : |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'} \ \text{разрешимы в } P \in \mathcal{P}_n(Q)\ \},\\
L_1(Q,T) \ &:= \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) : Q^{v_1'} < |P'(x)| < \delta_0 Q,\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'} \ \text{разрешимы в } P \in \mathcal{P}_n(Q)\ \},\\
L_2(Q,T) \ &:= \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) : |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad Q^{v_2'} < |P'(z)| < \delta_0 Q,\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'} \ \text{разрешимы в } P \in \mathcal{P}_n(Q)\ \},\\
L_3(Q,T) \ &:= \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) : |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ Q^{-v_3'} < |P'(w)|_p < \delta_0 \ \text{разрешимы в } P \in \mathcal{P}_n(Q)\ \}.
\end{aligned}$$

Рассматривая случаи линейности/нелинейности как в работе [18] следует, что $\mu(B_2(Q,T) \setminus L_0(Q,T)) \to 0$ при $Q \to \infty$, поэтому при достаточно большом Q мера множества может быть сделана меньше $(1-s)\mu(T)/2$. Поскольку $L_0(Q,T) \setminus B_1(Q,T) \subset \cup_{j=1}^{3} L_j(Q,T)$ и $B_2(Q,T) = T$, то при условии $\mu(L_j(Q,T)) < (1-s)\mu(T)/6$, $j = 1,2,3$, получим требуемый результат $\mu(B_1(Q,T)) \geqslant s\mu(T)$. Далее покажем, что $\mu(L_1(Q,T)) < (1-s)\mu(T)/6$, результат для оставшихся двух множеств доказывается аналогично.

Предложение 3. *Для любого множества $T \subset T_0$ существует достаточно большое число $Q_0 = Q_0(n,T)$ такое, что для всех $Q > Q_0$ верна оценка меры*

$$\mu(L_1(Q,T)) < \frac{1-s}{6}\mu(T).$$

Доказательство. Доказательство достаточно провести для многочленов $P \in P_n(Q)$.

Зафиксируем многочлен $P \in P_n(Q)$. Пусть α_1 – ближайший корень многочлена P к точке x, β_1 – ближайший корень P к z, и γ – ближайший корень P к w, где $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$. Покажем, что производные многочлена P в корнях и производные многочлена P в ближайших к корням точках f ($f = x, z, w$ соответственно) одного порядка. Разложим многочлен P' в ряд Тейлора в окрестности корней α_1 , β_1 и γ_1. Используя (18), (8.1) и определение множества $L_1(Q,T)$, получаем

$$\begin{array}{l} |x-\alpha_1| < \frac{n|P(x)|}{|P'(x)|} < nc_0 Q^{-w_1-v_1'}, \\ |z-\beta_1| < \frac{n|P(z)|}{|P'(z)|} < nc_0 Q^{-w_2-v_2'}, \\ |w-\gamma_1|_p < \frac{|P(w)|_p}{|P'(w)|_p} < c_0 Q^{-w_3+v_3'}. \end{array} \tag{21}$$

Оценивая каждый член из разложения

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^{i-1},$$

находим

$$|P''(\alpha_1)||x-\alpha_1| < c(n,T)c_0 Q^{1-w_1-v_1'} < \frac{Q^{v_1'}}{4},$$

$$|((j-1)!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^{j-1} < c(n,T)c_0^{j-1}((j-1)!)^{-1} Q^{1-(j-1)(w_1+v_1')} < \frac{Q^{v_1'}}{4(n-2)}$$

для $2v_1' > 1 - w_1$ (и $w_1 \geqslant -1$), $j = 3, \ldots, n$ и достаточно большого Q. Отсюда следует, что

$$\frac{Q^{v_1'}}{2} < \frac{|P'(x)|}{2} < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)| < 2\delta_0 Q. \tag{22}$$

В p-адическом случае, используя оценки $|P^{(j)}(\gamma_1)|_p < c'$ and $|(k!)^{-1}|_p \leqslant p^k$, находим

$$\begin{array}{rcl} |P''(\gamma_1)|_p |w-\gamma_1|_p & < & c' c_0 Q^{-w_3+v_3'} < Q^{-v_3'}, \\ |((j-1)!)^{-1} P^{(j)}(\gamma_1)|_p |w-\gamma_1|_p^{j-1} & < & c' c_0^{j-1} p^{j-1} Q^{(j-1)(-w_3+v_3')} < Q^{-v_3'}, \end{array}$$

для $2v_3' < w_3$ (и $w_3 \geqslant 0$), $j = 3, \ldots, n$ и достаточно большого Q. Заключаем, что $|P'(\gamma_1)|_p = |P'(w)|_p$. Таким образом, в комплексном (аналогично как и в действительном случае и используя (21)) и p-адическом случаях, для $2v_2' > 1 - w_2$ (и $w_2 \geqslant -1$), $2v_3' < w_3$ (и $w_3 \geqslant 0$), и достаточно большого Q получаем

$$\begin{aligned} &\tfrac{Q^{v_2'}}{2} < \tfrac{|P'(z)|}{2} < |P'(\beta_1)| < 2|P'(z)| \\ &Q^{-v_3'} < |P'(w)|_p = |P'(\gamma_1)|_p. \end{aligned} \tag{23}$$

Все решения $\mathbf{u}$ системы множества $L_1(Q,T)$, удовлетворяющие (22) и (23), принадлежат параллелепипеду

$$\sigma(P): \begin{array}{l} |x - \alpha_1| < 2nc_0 Q^{-w_1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| < 2nc_0 Q^{-w_2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p < c_0 Q^{-w_3} |P'(\gamma_1)|_p^{-1}. \end{array}$$

Для некоторой постоянной $\bar{c}_1 > 0$ (условия на которую будут наложены позднее) рассмотрим другой параллелепипед $\sigma_1(P)$, содержащий параллелепипед $\sigma(P)$:

$$\sigma_1(P): \begin{array}{l} |x - \alpha_1| < \bar{c}_1 Q^{u_1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| < \bar{c}_1 Q^{u_2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p < \bar{c}_1 Q^{-u_3} |P'(\gamma_1)|_p^{-1}. \end{array} \tag{24}$$

Параллелепипеды $\sigma_1(P)$ и $\sigma(P)$ корректно определены, если выполняются следующие условия:

$$v_1' > u_1 \geqslant -w_1, \quad v_2' > u_2 \geqslant -w_2, \quad v_3' < u_3 \leqslant w_3, \quad \bar{c}_1 > 2nc_0.$$

Разложим многочлен P в ряд Тейлора на $\sigma_1(P)$ в окрестности корней α_1 , β_1, γ_1 и оценим его значения сверху. Оценивая каждый член из разложения $P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{i=2}^{n} (i!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^i$, получим

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)||x - \alpha_1| \;&<\; \bar{c}_1 Q^{u_1}, \\ |(j!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)||x - \alpha_1|^j \;&<\; c(n,T)(j!)^{-1}(\bar{c}_1)^j 2^j Q^{1+j(u_1 - v_1')} < \frac{\bar{c}_1 Q^{u_1}}{n-1} \end{aligned}$$

для $u_1 < 2v_1' - 1$, $u_1 < v_1'$, $j = 2, \ldots, n$ и достаточно большого Q. Таким образом, находим на $\sigma_1(P)$:

$$|P(x)| < 2\bar{c}_1 Q^{u_1}. \tag{25}$$

В p-адическом случае, используя оценки $|P^{(j)}(\gamma_1)|_p < c'$ и $|(k!)^{-1}|_p \leqslant p^k$, получаем

$$\begin{aligned} |P'(\gamma_1)|_p |w - \gamma_1|_p \;&<\; \bar{c}_1 Q^{-u_3}, \\ |(j!)^{-1} P^{(j)}(\gamma_1)|_p |w - \gamma_1|_p^j \;&<\; c'(\bar{c}_1)^j p^j Q^{j(-u_3 + v_3')} < \bar{c}_1 Q^{-u_3}, \end{aligned}$$

для $u_3 > 2v_3'$, $v_3' < u_3$, $j = 2, \ldots, n$ и достаточно большого Q. Следовательно, имеем $|P'(w)|_p \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} |(j!)^{-1}P^{(j)}(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p^j < \bar{c}_1Q^{-u_3}$. Таким образом, в комплексном (по аналогии с действительным случаем) и p-адическом случаях для $u_2 < 2v_2' - 1$, $u_2 < v_2'$, $u_3 > 2v_3'$, $v_3' < u_3$, и достаточно большого Q находим

$$\begin{aligned} &|P(z)| < 2\bar{c}_1Q^{u_2}, \\ &|P(w)|_p < \bar{c}_1Q^{-u_3}. \end{aligned} \tag{26}$$

Дополнительно оценим $P'(x)$ на $\sigma_1(P)$. По формуле Лагранжа имеем равенство

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\theta_1)(x-\alpha_1),$$

где θ_1 – точка между x и α_1. Согласно (22), для $v_1' > u_1$ и достаточно большого Q находим

$$\begin{aligned} &|P'(\alpha_1)| < 2\delta_0Q, \\ &|P''(\theta_1)(x-\alpha_1)| < c(n,T)\bar{c}_1Q^{1+u_1-v_1'} < \delta_0Q. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$|P'(x)| < 3\delta_0Q, \quad x \in \sigma_1(P). \tag{27}$$

Выбор параметров

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = 1 \tag{28}$$

удовлетворяет всем условиям на u_j, $j = 1, 2, 3$. Принимая во внимание условия $1/2 < v_1', v_2' < 1$, $0 < v_3' < 1/2$, которые следуют из неравенств, связывающих величины v_j' и u_j, $j = 1, 2, 3$, выберем

$$v_1' = v_2' = 1/2 + 2\epsilon, \quad v_3' = 2\epsilon. \tag{29}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b} = (a_n, \ldots, a_5, a_4)$ и обозначим через $P_n^{\mathbf{b}}(Q)$ подкласс многочленов из $P_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}$. Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей Спринджука (см. [27]). Параллелепипед $\sigma_1(P)$ будем называть *существенным*, если для любого другого параллелепипеда $\sigma_1(\bar{P})$, $\bar{P} \in P_n^{\mathbf{b}}(Q)$ справедливо

$$\mu(\sigma_1(P,\bar{P})) = \mu(\sigma_1(P) \cap \sigma_1(\bar{P})) \leqslant \frac{1}{2}\mu(\sigma_1(P)). \tag{30}$$

В противном случае параллелепипед $\sigma_1(P)$ будем называть *несущественным.*

Сначала рассмотрим случай существенных параллелепипедов $\sigma_1(P)$. Из определения $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$ следует, что

$$\mu(\sigma(P)) < 2^3n^3c_0^4(\bar{c}_1)^{-4}Q^{-(w_1+2w_2+w_3)-(u_1+2u_2-u_3)}\mu(\sigma_1(P)). \tag{31}$$

В силу (30), (28) и последней оценки, имеем

$$\sum_{P\in P_n^{\mathbf{b}}(Q)} \mu(\sigma_1(P)) \leqslant 2^3\mu(T)$$

и

$$\sum_{P\in P_n^{\mathbf{b}}(Q)} \mu(\sigma(P)) < 2^6 n^3 c_0^4 (\bar{c}_1)^{-4} Q^{-n+3}\mu(T).$$

Просуммировав последнюю оценку по всем векторам $\mathbf{b}$, число которых $\#\mathbf{b} = (2Q+1)^{n-3}$, находим

$$\sum_{\mathbf{b}}\sum_{P\in P_n^{\mathbf{b}}(Q)} \mu(\sigma(P)) < 2^6 3^{n-3} n^3 c_0^4 (\bar{c}_1)^{-4}\mu(T).$$

Следовательно, мера множества точек, принадлежащих параллелепипам $\sigma(P)$, содержащихся в соответствующих существенных параллелепипедах, не превосходит $\frac{1-s}{12}\mu(T)$, если

$$\bar{c}_1 > (2^8 3^{n-2} n^3 c_0^4 (1-s)^{-1})^{1/4}. \tag{32}$$

Далее рассмотрим случай несущественных параллелепипедов и покажем, что объединение таких параллелепипедов имеет малую меру. На пересечении $\sigma_1(P,\bar{P})$ для многочленов P и $\bar{P}$ выполняются неравенства (25), (26) и (27), поэтому для многочлена $R(f) = \bar{P}(f) - P(f)$ имеем

$$R(f) = b_3^3 + b_2 f^2 + b_1 f + b_0, \quad |b_j| \leqslant 2Q,\ 0 \leqslant j \leqslant 3,$$

и справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|R(x)| < 4\bar{c}_1 Q^{u_1},\\ &|R(z)| < 4\bar{c}_1 Q^{u_2},\\ &|R(w)|_p < \bar{c}_1 Q^{-u_3},\\ &|R'(x)| < 6\delta_0 Q. \end{aligned} \tag{33}$$

Обозначим через μ_1, μ_2, μ_3 корни многочлена R, $\deg R_1 = 3$. Многочлен R имеет действительный и два комплексно сопряженных корня поскольку неравенство (33.1) справедливо, если x близко к μ_1 и неравенство (33.2) справедливо, если z близко к μ_2 или к его сопряженному корню μ_3. Согласно (12), имеем

$$|\mu_1 - \mu_2| > \delta_1, \quad |\mu_3 - \mu_2| > 2\delta_1.$$

По лемме 4, получаем

$$|R'(\mu_1)| = |b_3||\mu_1-\mu_2||\mu_1-\mu_3| > \delta_1^2|b_3| > c_2\delta_1^2 H(R). \tag{34}$$

Аналогично получим, что $|R'(\mu_2)| > c_3\delta_1^2 H(R)$. Далее покажем, что

$$H(R) < 8\delta_0\delta_1^{-2}c_2^{-1}Q \tag{35}$$

для $u_1 < 1$. В случае, когда $H(R) \ll Q^{2u_1-1}$, получаем $H(R) < 8\delta_0\delta_1^{-2}c_2^{-1}Q$ для $u_1 < 1$. Если $H(R) \gg Q^{2u_1-1}$, то сначала докажем, что $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$. Используя оценку

$$|x-\mu_1| < 6|R(x)||R'(\mu_1)|^{-1} < 24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1},$$

и разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} R'(x) &= R'(\mu_1) + R''(\mu_1)(x-\mu_1) + R'''(\mu_1)(x-\mu_1)^2, \\ |R'(x)| &< 6\delta_0 Q, \\ |R''(\mu_1)(x-\mu_1)| &< c(n,T)H(R)24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1} < \\ &< \delta_0 Q \quad \text{для} \quad u_1 < 1, \\ |R'''(\mu_1)(x-\mu_1)^2| &< c(n,T)H(R)(24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1})^2 < \\ &< \delta_0 Q \quad \text{для} \quad H(R) \gg Q^{2u_1-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$ для $u_1 < 1$ и $H(R) \gg Q^{2u_1-1}$. Поскольку $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$, то из (34) получаем, что $H(R) < 8\delta_0\delta_1^{-2}c_2^{-1}Q$.

Оценим меру тех $\mathbf{u}$, для которых выполняется система неравенств (33) при условии (35). Получим

$$\begin{aligned} &|x-\mu_1| < 24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1}, \\ &|z-\mu_2| < 24\bar{c}_1 c_3^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_2}H(R)^{-1}, \\ &|w-\gamma_1(R)|_p < \bar{c}_1 c_4 Q^{-u_3}. \end{aligned} \tag{36}$$

Система неравенств (36) приводит к оценке меры $\mathbf{u}$, попадающих в несущественные области

$$2^9 3^3(\bar{c}_1)^4 c_4 c_2^{-1}c_3^{-2}\delta_1^{-6}Q^{-1}H(R)^{-3}.$$

Просуммируем последнее по всем четырем коэффициентам и, учтя условие (35), получим оценку меры $(1-s)\mu(T)/12$ при условии

$$\delta_0 < 2^{-14}3^{-8}(1-s)(\bar{c}_1)^{-4}c_4^{-1}c_2^2c_3^2\delta_1^8.$$

□

4 Доказательство теоремы 3

Зафиксируем произвольный параллелепипед T в T_0. Пусть Q – достаточно большое число. Согласно теореме 4 существует множество $B_1(Q,T) \subset T$, удовлетворяющее условию $\mu(B_1(Q,T)) \geqslant s\mu(T)$. Пусть $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$. Покажем, что существует точка $(\alpha,\beta,\gamma) \in R$ из корней многочлена P, хорошо приближающая точку (x,z,w), где $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ – решение системы (8.1) для данной точки (x,z,w). Рассмотрим приближения по каждой координате отдельно.

Пусть $y \in \mathbb{R}$ так, что $|y-x| = nc_0\delta_0^{-1}Q^{-w_1-1}$. Далее, по формуле Тейлора имеем

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y-x)^i.$$

Используя неравенство $|P^{(i)}(x)| < c(n,T)Q$, убеждаемся, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| < c(n,T)Q(nc_0\delta_0^{-1}Q^{-w_1-1})^i < c_0Q^{-w_1} \quad \text{для } i \geqslant 2 \quad \text{и} \quad w_1 > -1\,.$$

Кроме того, согласно (8.1), имеем $|P(x)| < c_0 Q^{-w_1}$. Таким образом,

$$\sum_{i\neq 1} \left|\tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| < c_0 Q^{-w_1} \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} < 3c_0 Q^{-w_1}. \tag{37}$$

С другой стороны,

$$|P'(x)(y-x)| \overset{(8.2)}{\geqslant} \delta_0 Q n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1} = n c_0 Q^{-w_1}. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что $P(y)$ имеет разные знаки в точках

$$y = x \pm n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}$$

при условии, что $n \geqslant 3$. В силу непрерывности P, существует корень α_1 многочлена P на отрезке $|y-x| \leqslant n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}$, поэтому справедливо неравенство

$$|x - \alpha_1| < n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}. \tag{39}$$

Обозначим через $\beta_1, \ldots, \beta_n$ комплексные корни многочлена P, занумерованные таким образом, что β_1 – ближайший к z комплексный корень P. Поскольку

$$\frac{|P'(z)|}{|P(z)|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z-\beta_j|} \leqslant \frac{n}{|z-\beta_1|},$$

то используя (8), получаем

$$|z - \beta_1| \leqslant \frac{n|P(z)|}{|P'(z)|} < n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_2-1}. \tag{40}$$

Поскольку $|Im\, z| \geqslant \delta_1$, то при достаточно большом Q получаем $|Im\, \beta_1| > \delta_1/2$.

Лемма 5 (Гензель). *Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\xi = \xi_0 \in \mathbb{Z}_p$ и $|P(\xi)|_p < |P'(\xi)|_p^2$. Тогда при $n \to \infty$ последовательность $\xi_{n+1} = \xi_n - P(\xi_n)P'(\xi_n)^{-1}$ сходится к корню $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ многочлена P и $|\alpha - \xi|_p < |P(\xi)|_p |P'(\xi)|_p^{-2} < 1$.*

В p-адическом случае, используя лемму Гензеля и (8), получаем, что существует корень $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ многочлена P, удовлетворяющий условию

$$|w - \gamma|_p < c_0 \delta_0^{-2} Q^{-w_3}. \tag{41}$$

Далее, положим $r = Q$. Из неравенств (39), (40) и (41) вытекает, что для любой точки $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$ найдется точка $\boldsymbol{\nu} = (\alpha,\beta,\gamma) \in R$ такая, что $h(\boldsymbol{\nu}) \leqslant r$ и

$$(x,z,w) \in T(\boldsymbol{\nu}, c_5 \mathbf{d}(r)),$$

где $c_5 = \max\{nc_0\delta_0^{-1}, c_0\delta_0^{-2}\}$. Далее выберем максимальный набор $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$, удовлетворяющий (3)–(5). По построению и поскольку этот набор максимален, получаем

$$B_1(Q,T) \subset \cup_{i=1}^{t} T(\boldsymbol{\nu}, (c_5+1)\mathbf{d}(r)).$$

Используя (9), находим

$$s\mu(T) \leqslant \mu(B_1(Q,T)) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \mu(T(\boldsymbol{\nu}_i, (c_5+1)\mathbf{d}(r))) \leqslant 2^3(c_5+1)^4 t \prod_{+}(\mathbf{d}(r)),$$

откуда следует, что

$$t \geqslant 2^{-3}(c_5+1)^{-4} s\mu(T) / \prod_{+}(\mathbf{d}(r)) = 2^{-3}(c_5+1)^{-4} sQ^{n+1}\mu(T).$$

Следовательно, $(R, h, \mathbf{d})$ – регулярная система в T_0.

Далее покажем, что регулярная система в теореме 3 является оптимальной. Зафиксируем конечный параллелепипед T. Поскольку каждый многочлен из $\mathcal{P}_n$ имеет не более n корней, и поскольку число многочленов во множестве $\mathcal{P}_n(Q)$ не превосходит $(2Q+1)^{n+1}$, то число точек $\boldsymbol{\nu}$ в T не превосходит $n^3(2Q+1)^{n+1}\mu(T)$. Тогда $\#\{\boldsymbol{\nu} \in R \cap T : h(\boldsymbol{\nu}) \leqslant r\} \ll Q^{n+1}$; следовательно, условие (7) выполнено и исследуемая регулярная система является оптимальной. $\square$

5 Доказательство теоремы 2

Для каждой точки $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in R$ определим параллелепипед

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi)) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{S} : \begin{array}{lcl} |x-\alpha| & \leqslant & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\Psi^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})), \\ |z-\beta| & \leqslant & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\Psi^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})), \\ |w-\gamma|_p & \leqslant & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})) \end{array} \right\}.$$

Обозначим через $\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ множество точек $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$, принадлежащих бесконечному числу параллелепипедов $\mathbb{P}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi))$.

Сначала покажем, что множество $\hat{L}_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi)$ имеет полную меру в T_0. Следующие четыре леммы будут использоваться при доказательстве теоремы. Первые две леммы являются обобщениями лемм, доказанных в [5] и [28] соответственно, на пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, и доказываются аналогично.

Лемма 6. *Пусть дано измеримое множество $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ и открытое множество $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Если существует положительная постоянная $\eta < 1$ такая, что для любого параллелепипеда $B \subset U$ выполнено $\mu(A \bigcap B) > \eta\mu(B)$, то множество A имеет полную меру в U, т.е. $\mu(U \setminus A) = 0$.*

Лемма 7. *Пусть дано множество Ω, на котором задана σ–аддитивная конечная мера μ, и пусть дана последовательность E_i измеримых подмножеств Ω. Пусть множество E состоит из точек $w \in \Omega$, которые попадают в бесконечное число множеств E_i. Тогда, если $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \infty$, то*

$$\mu(E) \geqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{(\sum_{i=1}^{N} \mu(E_i))^2}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu(E_i \bigcap E_j)}. \tag{42}$$

Лемма 8. *Пусть функция Ψ удовлетворяет условиям теоремы 2, и определим функцию $\bar{\Psi}(h) = \min\{ch^{-1}, \Psi(h)\}$, где $c > 0$ – постоянная. Тогда $\bar{\Psi}$ – невозрастающая функция, и ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \bar{\Psi}(h)$ расходится.*

Доказательство. Монотонность функции $\bar{\Psi}$ вытекает из следующего неравенства $\min\{ch_i^{-1}, \Psi(h_i)\} \geqslant \min\{ch_{i+1}^{-1}, \Psi(h_{i+1})\}$ для $h_i < h_{i+1}$. Предположим, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \bar{\Psi}(h)$ сходится, тогда в силу монотонности функции $\bar{\Psi}$, имеем

$$r\bar{\Psi}(r) \ll \sum_{r/2 \leqslant h < r}^{\infty} \bar{\Psi}(h) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Откуда следует, что $r\bar{\Psi}(r) = \min\{c, r\Psi(r)\} \to 0$ при $r \to \infty$. Последнее возможно, если $r\Psi(r) \to 0$ при $r \to \infty$, откуда следует, что $\bar{\Psi}(r) = \Psi(r)$ для всех достаточно больших r. Следовательно, получаем, что и ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ сходится, что противоречит условию леммы. □

Доказательство следующей леммы можно найти в [5].

Лемма 9. *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция. Тогда ряды $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \Psi(2^k)$ сходятся или расходятся одновременно.*

Согласно лемме 8, без ограничения общности можем полагать, что для всех $h > 0$ выполнено неравенство:

$$\Psi(h) \leqslant h^{-1}/2. \tag{43}$$

Зафиксируем произвольный параллелепипед $T \subset T_0$, и пусть $Q = 2^l$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Все неравенсва, используемые при построении регулярной системы, перепишем в терминах 2^l. Следовательно, существуют положительные постоянные $l_0 = l_0(n, T)$ и $c_1 = c_1(n, T_0)$ такие, что для любого целого $l \geqslant l_0$ существует множество точек

$$A_l(T) = \{\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_{t_l}\} \in R \cap T,$$

такое, что

$$h(\boldsymbol{\nu}_i) \leqslant 2^l \tag{44}$$

для всех $\boldsymbol{\nu}_i \in A_l(T)$. Параллелепипеды

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(l)) := \left\{ \mathbf{u} \in T : \begin{array}{lcl} |x - \alpha^{(i)}| & \leqslant & 2^{-(w_1+1)l}, \\ |y - \beta^{(i)}| & \leqslant & 2^{-(w_2+1)l}, \\ |z - \gamma^{(i)}|_p & \leqslant & 2^{-w_3 l} \end{array} \right\} \tag{45}$$

не пересекаются ни при каких $\boldsymbol{\nu}_i \neq \boldsymbol{\nu}_j$, поэтому

$$c_1 2^{(n+1)l}\mu(T) \leqslant t_l \leqslant 2^{(n+1)l}\mu(T). \tag{46}$$

Для каждого натурального числа $l \geqslant l_0$ и $m \in \{1, ..., t_l\}$ определим параллелепипеды

$$E_l^{(m)} := \left\{ \mathbf{u} \in T : \begin{array}{lcl} |x - \alpha^{(m)}| & \leqslant & 2^{-(v_1+1)l}\Psi^{\lambda_1}(2^l), \\ |z - \beta^{(m)}| & \leqslant & 2^{-(v_2+1)l}\Psi^{\lambda_2}(2^l), \\ |w - \gamma^{(m)}|_p & \leqslant & 2^{-v_3 l}\Psi^{\lambda_3}(2^l) \end{array} \right\}, \tag{47}$$

и пусть

$$E_l = \bigcup_{m=1}^{t_l} E_l^{(m)}. \tag{48}$$

Согласно (47), имеем

$$\mu(E_l^{(m)}) = 2^3 2^{-ln}\Psi(2^l). \tag{49}$$

Рассмотрим множество $E(T) = \cap_{N=l_0}^{\infty} \cup_{l=N}^{\infty} E_l$. Условие монотонности функции Ψ вместе с условием (44) означают, что $E_l^{(m)} \subset \mathbb{P}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi))$. Поскольку $\mu(E_l^{(m)}) \to 0$ при $l \to \infty$ и поскольку $A_l(T) \subset T$, то получаем

$$E(T) \subset \left(\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi) \cup R\right) \cap T.$$

В силу того, что R счетно, и следовательно, имеет нулевую меру, имеем

$$\mu(\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi) \cap T) \geqslant \mu(E(T)). \tag{50}$$

Из (43) и (45) следует, что

$$E_l^{(i)} \bigcap E_l^{(j)} = 0$$

для $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant t_l$. Следовательно, находим $\mu(E_l) = \sum_{i=1}^{t_l} \mu(E_l^{(i)})$. Далее, используя (46) и (47), получаем

$$2^3 2^l c_1 \Psi(2^l)\mu(T) \leqslant \mu(E_l) \leqslant 2^3 2^l \Psi(2^l)\mu(T). \tag{51}$$

Определим последовательность $\phi_l = 2^l\Psi(2^l)$, тогда последнее неравенство примет вид

$$2^3 c_1 \phi_l \mu(T) \leqslant \mu(E_l) \leqslant 2^3 \phi_l \mu(T). \tag{52}$$

Поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ расходится, то применяя лемму 9, находим

$$\sum_{l=0}^{\infty} \phi_l = \infty. \tag{53}$$

Из (52) и (53) следует, что $\sum_{l=l_0}^{\infty} \mu(E_l) = \infty$. Поскольку множество T ограничено и все множества E_l содержатся в T, то применим лемму 7 к последовательности E_l. Далее получим оценки для числителя и знаменателя в (42).

При $L > l_0$ неравенство (52) означает, что

$$\sum_{l=l_0}^{L} \mu(E_l) \geqslant 2^3 c_1 \mu(T) \sum_{l=l_0}^{L} \phi_l. \tag{54}$$

Далее оценим меру множества $E_l \cap E_q$. Пусть $l_0 \leqslant l < q \leqslant L$, где $L > l_0$. Из (48) вытекает равенство

$$E_q \cap E_l^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{t_q} E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)}. \tag{55}$$

Для заданных $\mathbf{v}$ и λ в теореме 2 построим регулярную систему, где $w_i = v_i + \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Используя (49), получаем $\mu(E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)}) \leqslant 2^3 \Psi(2^q) 2^{-nq}$. Следовательно, имеем

$$\mu(E_q \cap E_l^{(i)}) \leqslant 2^3 \Psi(2^q) 2^{-nq} n_0(q, l, i), \tag{56}$$

где $n_0(q, l, i)$ – число различных индексов j таких, что $E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)} \neq 0$. Легко проверить, что

$$\begin{gathered} n_0(q,l,i) \leqslant \left(2 + 2^{-(v_1+1)l} \cdot \Psi^{\lambda_1}(2^l) \cdot 2^{(w_1+1)q}\right) \cdot \\ \cdot \left(2 + 2^{-(v_2+1)l} \cdot \Psi^{\lambda_2}(2^l) \cdot 2^{(w_2+1)q}\right)^2 \cdot \left(2 + 2^{-v_3 l} \cdot \Psi^{\lambda_3}(2^l) \cdot 2^{w_3 q}\right). \end{gathered}$$

Пусть $v_1 = v_2 = \frac{n-4}{4}$, $v_3 = \frac{n}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$. Тогда получаем, что число $n_0(q, l, i)$ не превосходит

$$(2 + 2^{-\frac{nl}{4}} \Psi^{\frac{1}{4}}(2^l) 2^{\frac{(n+1)q}{4}})^4. \tag{57}$$

Воспользовавшись неравенством

$$(a+b)^s \leqslant \max\{2^{s-1}, 1\}(a^s + b^s), \quad a, b \geqslant 0, \quad s > 0,$$

получим

$$n_0(q, l, i) \leqslant 2^7 + 2^{3-nl+(n+1)q} \Psi(2^l). \tag{58}$$

Из (56) и (58) вытекает, что

$$\mu(E_q \cap E_l^{(i)}) \leqslant 2^3 \Psi(2^q) 2^{-nq} (2^7 + 2^{3-nl+(n+1)q} \Psi(2^l)). \tag{59}$$

Поскольку число различных множеств $E_l^{(i)}$ не превосходит t_l, то находим

$$\mu(E_q \cap E_l) \leqslant t_l \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant t_l} \mu(E_q \cap E_l^{(i)}).$$

Используя (46), (59) и последнее неравенство, оценка для меры пересечения при любых различных q, l таких, что $l_0 \leqslant q, l \leqslant L$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mu(E_q \cap E_l) &\leqslant 2^{(n+1)l} \mu(T) 2^3 \Psi(2^q) 2^{-nq} (2^7 + 2^3 2^{-nl} \Psi(2^l) 2^{(n+1)q}) \\ &= (2^{10} 2^{(n+1)(l-q)} \phi_q + 2^6 \phi_l \phi_q) \mu(T). \end{aligned} \tag{60}$$

Из условия (53) следует, что найдется достаточно большое число L' такое, что для всех натуральных чисел $L > L'$, справедливо неравенство

$$\sum_{l=l_0}^{L} \phi_l > 1. \tag{61}$$

Пусть $L > L'$. Применяя (52), (60) и (61), находим

$$\begin{aligned}
\sum_{q=l_0}^{L}\sum_{l=l_0}^{L}\mu(E_q\cap E_l) &\leqslant 2^6\mu(\mathbb{P})\sum_{q=l_0}^{L}\sum_{l=l_0}^{L}\phi_l\phi_q + 2^{10}\mu(T)\sum_{q=l_0}^{L}\sum_{l=l_0}^{L}2^{-(n+1)(q-l)}\phi_q\\
&\leqslant 2^6\mu(T)\sum_{q=l_0}^{L}\phi_q\sum_{l=l_0}^{L}\phi_l + 2^{10}\mu(T)\sum_{q=l_0}^{L}\phi_q\sum_{l=1}^{\infty}2^{-(n+1)(q-l)}\\
&= 2^6\mu(T)\left(\sum_{l=l_0}^{L}\phi_l\right)^2 + 2^{10}2^{-(n+1)}/(1-2^{-(n+1)})\mu(T)\sum_{q=l_0}^{L}\phi_q\\
&\ll \mu(T)\left(\sum_{l=l_0}^{L}\phi_l\right)^2,
\end{aligned}$$

где неявная постоянная не зависит ни от T, ни от L. Комбинируя последнюю оценку вместе с (54), получаем

$$\frac{\left(\sum\limits_{l=l_0}^{L}\mu(E_l)\right)^2}{\sum\limits_{q=l_0}^{L}\sum\limits_{l=l_0}^{L}\mu(E_q\bigcap E_l)} \gg \mu(T)$$

при $L > L'$.

По лемме 7, мера множества $E(T)$, состоящего из точек $\mathbf{u}$, принадлежащих бесконечному числу множеств E_l, по крайней мере $\frac{2^6K_1^2}{c_6}\mu(T)$. Согласно (50), имеем $\mu(\hat{L}_n(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\Psi)\cap T) \geqslant \frac{2^6K_1^2}{c_6}\mu(T)$ для любого параллелепипеда $T\subset T_0$. Согласно лемме 6, множество $\hat{L}_n(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\Psi)$ имеет полную меру в T_0.

Далее покажем, что множество $L_n(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\Psi)$ имеет полную меру в T_0. Для $d>1$ определим функцию $\tilde{\Psi}(h)=\Psi(h)/d$. Тогда функция $\tilde{\Psi}(h)$ также монотонно убывает и ряд $\sum_{h=1}^{\infty}\tilde{\Psi}(h)$ расходится. Согласно доказанному выше, множество $\hat{L}_n(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\tilde{\Psi})$ имеет полную меру в T_0. Для $\boldsymbol{\nu}=(\alpha,\beta,\gamma)\in R$ определим параллелепипед $\sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$ как множество точек $\mathbf{u}\in T_0$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha| < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})),\\
&|z-\beta| < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})),\\
&|w-\gamma|_p < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\tilde{\Psi}^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})).
\end{aligned}$$

Тогда выполняется равенство

$$\hat{L}_n(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\tilde{\Psi})\cap T_0 = \cap_{k=1}^{\infty}\cup_{\boldsymbol{\nu}\in R:\,H(\boldsymbol{\nu})>k}\,\sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu}).$$

Далее, пусть $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in R$ и $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$. Рассмотрим квазиминимальный многочлен $P_{\boldsymbol{\nu}}$ для $\boldsymbol{\nu}$; его можно представить в виде

$$P_{\boldsymbol{\nu}}(f) = (f - s)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} (f - s)^{k-1},$$

где $f = \{x, z, w\}$ и $s = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ соответственно. Поскольку $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$ и $\mathbf{u} \in T_0$, то справедлива система неравенств

$$\begin{aligned} &|P_{\boldsymbol{\nu}}(x)| < CH(\boldsymbol{\nu})|x - \alpha|, \\ &|P_{\boldsymbol{\nu}}(z)| < CH(\boldsymbol{\nu})|z - \beta|, \\ &|P_{\boldsymbol{\nu}}(w)|_p < C|w - \gamma|_p, \end{aligned}$$

где $C = C(T_0) > 1$. Положим $d^{\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\lambda_i} = C$. Тогда, для каждого $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in R$ такого, что $\sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu}) \neq 0$, для любого $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$ верно

$$\begin{array}{llll} |P_{\boldsymbol{\nu}}(x)| & < & CH(\boldsymbol{\nu})H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})), \\ |P_{\boldsymbol{\nu}}(z)| & < & CH(\boldsymbol{\nu})H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})), \\ |P_{\boldsymbol{\nu}}(w)|_p & < & CH(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\tilde{\Psi}^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})). \end{array}$$

Поэтому, если $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$, то $P_{\boldsymbol{\nu}}$ является решением системы неравенств (1). Следовательно, если $\mathbf{u} \in \hat{L}_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\Psi}) \cap T_0$, т.е. принадлежит бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$, то система неравенств (1) имеет бесконечное число решений, что означает $\mathbf{u} \in L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi) \cap T_0$. Тогда, верно включение

$$\hat{L}_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\Psi}) \cap T_0 \subset L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi) \cap T_0,$$

откуда следует, что множество $L_n(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \Psi)$ имеет полную меру в T_0. Теорема 2 доказана. □

6 Доказательство теоремы 6

В основе доказательства теоремы 6 лежит два метода: метод повсеместных систем [11] и построение множеств близких сопряженных алгебраических чисел [13]. Конструкция в [13] видоизменена, чтобы соответствовать нашей задаче. На протяжении всей работы мы имеем дело с алгебраическими числами в $\mathbb{C}$. Пусть $n \geqslant 2$. Напомним, что комплексные алгебраические числа называются *сопряженными* (над $\mathbb{Q}$), если они являются корнями одного и того же неприводимого (над $\mathbb{Q}$) многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Здесь и далее, через $H(\alpha)$ обозначим высоту алгебраического числа α, определяемую как высоту минимального многочлена для α над $\mathbb{Z}$.

Мы начнем доказательство с формулировки важного вспомогательного утверждения, установленного в лемме 4 в [13]. В дальнейшем, числа $\xi_0, \ldots, \xi_n \in$

$\in \mathbb{R}^+$ будут удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\xi_i \ll 1 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ &\xi_i \gg 1 \quad \text{для } m \leqslant i \leqslant n, \\ &\xi_0 < \varepsilon, \qquad \xi_n > \varepsilon^{-1} \end{aligned} \tag{62}$$

для некоторого $0 < m \leqslant n$ и $\varepsilon > 0$, где подразумеваемые постоянные зависят только от n. Предположим также, что

$$\prod_{i=0}^{n} \xi_i = 1. \tag{63}$$

Лемма 10. *Для каждого $n \geqslant 2$ существуют положительные постоянные θ_0 и τ_0, зависящие только от n и удовлетворяющие следующему свойству. Для любого интервала $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ существует достаточно малое число $\varepsilon = \varepsilon(n, J) > 0$ такое, что для любого набора чисел $\xi_0, \dots, \xi_n$, удовлетворяющих* (62) *и* (63), *существует измеримое множество $G_J \subset J$ меры*

$$\mu(G_J) \geqslant \frac{3}{4}|J| \tag{64}$$

такое, что для каждой точки $x \in G_J$ существует $n+1$ линейно независимых примитивных неприводимых многочленов $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени n таких, что

$$\theta_0 \xi_i \leqslant |P^{(i)}(x)| \leqslant \tau_0 \xi_i \qquad \text{для всех } i = 0, \dots, n. \tag{65}$$

Далее, пусть $0 < \nu < 1$, $Q > 1$, и через $\mathcal{A}_{n,\nu}(Q)$ обозначим множество алгебраических чисел $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ степени n и высоты $H(\alpha_1)$, удовлетворяющей условию

$$\nu Q \leqslant H(\alpha_1) \leqslant \nu^{-1} Q, \tag{66}$$

таких, что

$$\nu \leqslant \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{Q^{-1}\Psi_2(Q)} \leqslant \nu^{-1} \quad \text{для некоторого } \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ сопряженного к } \alpha_1. \tag{67}$$

Следующая лемма обобщает [13, теорема 2] и является существенным шагом при доказательстве теоремы.

Лемма 11. *Пусть $n \geqslant 2$ – целое число, и пусть $\Psi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенствам $Q^{\frac{-n+2}{3}} \leqslant \Psi_2(Q) < k_0 Q$ для всех $Q \in \mathbb{N}$ и некоторой постоянной $k_0 > 0$. Тогда существует постоянная $\nu > 0$, зависящая только от n, такая, что для любого интервала $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и для всех достаточно больших Q справедливо неравенство*

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha_1 \in \mathcal{A}_{n,\nu}(Q)} B(\alpha_1, Q^{-n+1}/\Psi_2^2(Q)) \cap J \right) \geqslant \frac{3}{4}|J|. \tag{68}$$

Доказательство. Доказательство проводится по аналогичной схеме как и в [13, Теорема 2]. Пусть постоянные θ_0 и τ_0 те же, что и в лемме 10. Определим следующие параметры:

$$\xi_0 = \eta Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q), \quad \xi_1 = \eta^{-n}\Psi_2(Q), \quad \xi_i = \eta Q \quad (2 \leqslant i \leqslant n), \tag{69}$$

где $0 < \eta < 1$ – достаточно малый фиксированный параметр, зависящий только от n, и который будет определен позднее. Зафиксируем интервал $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, и пусть постоянная $\varepsilon = \varepsilon(n, J)$ выбрана так же, как в лемме 10. Тогда, (62) выполняется для $m \in \{1, 2\}$ и для достаточно большого Q. Из (69) следует справедливость тождества (63). Пусть G_J – множество, описанное в лемме 10, и $x \in G_J$. Тогда, согласно лемме 10, существует примитивный неприводимый многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени n, удовлетворяющий (65).

Поиск α_1. Пусть $y \in \mathbb{R}$ такой, что $|y-x| = Q^{-n+1}\Psi_2^{-2}(Q)$. Используя факт, что $\Psi_2(Q) \geqslant Q^{\frac{-n+2}{3}}$, получим $|y-x| < 1$. Далее, по формуле Тейлора имеем

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i. \tag{70}$$

Используя неравенства $|x-y| < 1$, $\Psi_2(Q) \geqslant Q^{\frac{-n+2}{3}}$, (65) и (69), убеждаемся, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| \leqslant \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q) \qquad \text{для } i \geqslant 2\,. \tag{71}$$

Кроме того, согласно (65) и (69), имеем $|P(x)| \leqslant \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q)$. Таким образом,

$$\sum_{i\neq 1} \left|\tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| \leqslant \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q) \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} < 3\eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q). \tag{72}$$

С другой стороны,

$$|P'(x)(y-x)| \overset{(65)\&(69)}{\geqslant} \theta_0\eta^{-n}\Psi_2(Q)Q^{-n+1}\Psi_2^{-2}(Q) \geqslant \theta_0\eta^{-1}Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q). \tag{73}$$

Из (72) и (73) следует, что $P(y)$ имеет разные знаки в концах отрезка $|y - x| \leqslant Q^{-n+1}\Psi_2^{-2}(Q)$ при условии, что $\eta \leqslant \frac{1}{2}\theta_0^{1/2}\tau_0^{-1/2}$. В силу непрерывности P, существует корень α_1 многочлена P в этом интервале, т.е.

$$|x - \alpha_1| < Q^{-n+1}\Psi_2^{-2}(Q)\,. \tag{74}$$

Поиск α_2. Пусть $y_\rho = x + \rho Q^{-1}\Psi_2(Q)$, где $2 \leqslant |\rho| < Q^{1/2}\Psi_2^{-1/2}(Q)$. Следует наложить условие

$$\Psi_2(Q) < Q/4, \tag{75}$$

которое обеспечивает существование ρ. Снова воспользуемся (70), на этот раз взяв $y = y_\rho$. Используя неравенства $|x-y| < 1$, $|\rho| < Q^{1/2}\Psi_2^{-1/2}(Q)$, (65), и (69) получаем, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y_\rho - x)^i\right| < \eta|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_2^2(Q) \qquad \text{для } i \geqslant 3\,. \tag{76}$$

Согласно (65), (69) и фактам, что $\Psi_2(Q) \geqslant Q^{\frac{-n+2}{3}}$ и $|\rho| \geqslant 2$, имеем

$$|P(x)| \leqslant \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_2^{-1}(Q) \leqslant |\rho|\eta\tau_0 Q^{-1}\Psi_2^2(Q)$$

и

$$|P'(x)(y_\rho - x)| \leqslant \eta^{-n}\tau_0\Psi_2(Q)|\rho|Q^{-1}\Psi_2(Q) = \eta^{-n}\tau_0|\rho|Q^{-1}\Psi_2^2(Q).$$

Последние две оценки вместе с (76) дают следующее

$$\sum_{i\neq 2}\left|\tfrac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y_\rho - x)^i\right| \leqslant \eta^{-n}|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_2^2(Q)\sum_{i=0}^{n}\tfrac{1}{i!} < 3\eta^{-n}|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_2^2(Q). \tag{77}$$

С другой стороны,

$$|\tfrac{1}{2!}P''(x)(y_\rho - x)^2| \overset{(65)\&(69)}{\geqslant} \frac{1}{2}\theta_0\eta Q|\rho|^2 Q^{-2}\Psi_2^2(Q) = \frac{1}{2}\theta_0\eta\rho^2 Q^{-1}\Psi_2^2(Q). \tag{78}$$

Из (77) и (78) следует, что $P(y)$ имеет один и тот же знак в точках $y_{\pm\rho_0}$ (тот же, что $P''(x)$), где $\rho_0 = 7\tau_0\eta^{-n-1}\theta_0^{-1}$. Очевидно, что ρ_0 должен удовлетворять неравенству $\rho_0 < Q^{1/2}\Psi_2^{-1/2}(Q)$. Это накладывает еще одно условие на Ψ_2. Вместе с оценкой (75) это дает

$$\Psi_2(Q) < k_0 Q, \qquad \text{где } k_0 = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{\rho_0^2}\right\}.$$

С другой стороны, рассуждая так же как в процедуре “Поиск α_1”, легко убедиться, что $P(y_2)$ и $P(y_{-2})$ имеют разные знаки. Таким образом, $P(y)$ меняет знак на одном из отрезков

$$[-\rho_0 Q^{-1}\Psi_2(Q), -2Q^{-1}\Psi_2(Q)] \qquad \text{или} \qquad [2Q^{-1}\Psi_2(Q), \rho_0 Q^{-1}\Psi_2(Q)].$$

В силу непрерывности P, существует корень α_2 многочлена P на этом отрезке, т.е.

$$2Q^{-1}\Psi_2(Q) \leqslant |x - \alpha_2| < \rho_0 Q^{-1}\Psi_2(Q)\,. \tag{79}$$

Объединяя (74) и (79), получаем $Q^{-1}\Psi_2(Q) \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant (\rho_0+1)Q^{-1}\Psi_2(Q)$, установив тем самым (67).

Оценка высоты. Используя (65), (69) и факт, что $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, получаем

$$|a_n| = |\tfrac{1}{n!}P^{(n)}(x)| \asymp Q,$$
$$|a_{n-1}| = |\tfrac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(x) - na_n x| \ll Q,$$
$$|a_k| = |\tfrac{1}{k!}P^{(k)}(x) - \textstyle\sum_{i=k+1}^{n}\tfrac{i!}{k!(i-k)!}a_i x^{i-k}| \ll Q, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2.$$

Следовательно, $H(\alpha_1) \asymp Q$. Это доказывает (66) и завершает доказательство леммы 11. $\square$

Замечание 2. Из хорошо известного свойства, что $|\alpha_i| \ll H(\alpha_i)/|a_n|$ (см. [27]), и факта, что $|a_n| \asymp Q$, следует, что любой корень α_i сопряженный к α_1 ограничен постоянной, зависящей только от n.

Далее будем использовать технику повсеместных систем, которую сейчас опишем в упрощенной форме (см. [11] для более подробной информации и [7] для определения регулярных систем, тесно связанных с повсеместными системами). Пусть I – интервал в $\mathbb{R}$ и $\mathcal{R} := (r_\alpha)_{\alpha\in J}$ – множество точек $r_\alpha \in I$, занумерованных элементами счетного множества $\mathcal{J}$. Пусть функция $\beta : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^+ : \alpha \mapsto \beta_\alpha$ задана на $\mathcal{J}$ и определяет 'вес' β_α точек r_α. Для $t \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{J}(t) := \{\alpha \in \mathcal{J} : \beta_\alpha \leqslant 2^t\}$, и будем всегда полагать, что множество $\mathcal{J}(t)$ конечно.

Функцию $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условию $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$, назовем *повсеместной функцией*. Система $(\mathcal{R};\beta)$ называется *локально повсеместной в I относительно ρ*, если существует абсолютная постоянная $m_0 > 0$ такая, что для любого интервала $J \subset I$ справедливо неравенство

$$\liminf_{t\to\infty}\ \mu\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}(t)} B\big(r_\alpha,\rho(2^t)\big)\cap J\Big)\ \geqslant\ m_0\,|J|\,. \tag{80}$$

Для функции $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ определим множество

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)\ :=\ \{x \in I : |x - r_\alpha| < \psi(\beta_\alpha)\ \text{ для бесконечного числа } \alpha \in \mathcal{J}\}\,.$$

Переформулируем теорему 1 из [11] в следующем виде.

Лемма 12. *Пусть $(\mathcal{R},\beta)$ –локально повсеместная система в J_0 относительно ρ. Пусть функция ψ или функция ρ является 2-регулярной. Тогда $\mu(\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)) = |J_0|$, если $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)} = \infty$.*

Рассмотрим функцию $\Psi_3(h) = \bar{\Psi}_1(h)\Psi_2(h)$, которая является невозрастающей. Монотонность функции Ψ_3 следует из неравенства

$$\min\{\Psi_1(h_1)\Psi_2(h_1); h_1^{1-n}\} \geqslant \min\{\Psi_1(h_2)\Psi_2(h_2); h_2^{1-n}\}$$

для всех $h_2 \geqslant h_1$ и факта, что $\Psi_1\Psi_2$ – убывающая функция.

Далее покажем, что ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_3(h) \tag{81}$$

расходится. Предположим, что ряд (81) сходится. Тогда, в силу монотонности функции Ψ_3, имеем

$$l^{n-1}\Psi_3(l) \ll \sum_{l/2\leqslant h<l} h^{n-2}\Psi_3(h) \to 0 \text{ as } l \to \infty.$$

Отсюда следует, что $l^{n-1}\Psi_3(l) = \min\{l^{n-1}\Psi_1(l)\Psi_2(l); 1\} \to 0$ при $l \to \infty$. Это возможно только тогда, когда $l^{n-1}\Psi_1(l)\Psi_2(l) \to 0$ при $l \to \infty$. Откуда следует, что $\Psi_3(l) = \Psi_1(l)\Psi_2(l)$ для всех достаточно больших l. Таким образом, ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_1(h)\Psi_2(h)$ сходится, что противоречит тому, что этот ряд расходится.

Используя монотонность Ψ_3, получим следующее двойное неравенство

$$2^{(t+1)(n-1)}\Psi_3(2^{t+1}) \ll \sum_{2^t \leqslant h < 2^{t+1}} h^{n-2}\Psi_3(h) \ll 2^{t(n-1)}\Psi_3(2^t).$$

Суммирование по всем $t \in \mathbb{N}$ приводит к тому, что ряды

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_3(h) \text{ и } \sum_{t=0}^{\infty} 2^{t(n-1)}\Psi_3(2^t) \tag{82}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Повсеместная система. Определим функции $\bar{\bar{\Psi}}_1(q) := \frac{\bar{\Psi}_1(q)}{K^2}$ и $\bar{\Psi}_2(q) := \frac{\Psi_2(q)}{K}$, где $q^{\frac{-n+2}{3}} \leqslant \bar{\Psi}_2(q) < k_0 q$ и $K = (3\nu^{-1})^{n-1}c_1' n$ (см. ниже).

Пусть $n \geqslant 2$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество алгебраических чисел $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ степени n таких, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \nu^{-1}H(\alpha_1)^{-1}\bar{\Psi}_2(H(\alpha_1)) \text{ для некоторого } \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ сопряженного к } \alpha_1 \tag{83}$$

и

$$|\alpha_i| \ll \nu^{-1} \text{ для любого } \alpha_i \in \mathbb{C}, \text{ сопряженного к } \alpha_1, \tag{84}$$

где подразумеваемые постоянные в символе Виноградова зависят только от n. Отождествим множество $\mathcal{J}$ с $\mathcal{R}$, т.е. формально $r_\alpha = \alpha$. Далее, пусть $\beta_\alpha = \nu H(\alpha)$ и $\rho(q) = q^{-n+1}/\bar{\Psi}_2^2(q)$. Тогда, согласно лемме 11 и замечания 2, существует постоянная ν такая, что система $(\mathcal{R}, \beta)$ является локально повсеместной в $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ относительно вышеприведенной функции ρ. Пусть $\psi(q) = \bar{\bar{\Psi}}_1(q)/\bar{\Psi}_2(q)$. Если ψ или ρ является 2-регулярной функцией, то воспользуемся леммой 12. Тогда $\frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)} = \bar{\bar{\Psi}}_1(2^t)\bar{\Psi}_2(2^t)2^{t(n-1)} = K^{-3}\Psi_3(2^t)2^{t(n-1)}$ и, следовательно, согласно (82), ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)}$ расходится.

Далее покажем, что

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi) \subset \mathcal{P}_n(\tau_0\bar{\bar{\Psi}}_1, \tau_0 n\bar{\Psi}_2) \subset \mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_1, \Psi_2) \subseteq \mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2). \tag{85}$$

Во-первых, покажем, что $\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi) \subset \mathcal{P}_n(\tau_0\bar{\bar{\Psi}}_1, \tau_0 n\bar{\Psi}_2)$. По определению, для каждой точки $x \in \Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)$ существует бесконечно много действительных алгебраических чисел α_1 степени n, удовлетворяющих (83), (84) и

$$|x - \alpha_1| < \bar{\bar{\Psi}}_1(\nu H(\alpha_1))/\bar{\Psi}_2(\nu H(\alpha_1)). \tag{86}$$

Пусть ψ – квази-монотонная функция, тогда $\psi(\nu q) \leqslant c_1'\psi(q)$ для некоторых $c_1' \geqslant 1$ и ν, $0 < \nu < 1$.

Пусть P – минимальный многочлен для α_1, тогда $P(x) = a_n(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$. Используя (83), (84) и (86), находим

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_1| < c_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)/\bar{\Psi}_2(H),\\
&|x-\alpha_2| \leqslant |x-\alpha_1| + |\alpha_1-\alpha_2| < c_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)/\bar{\Psi}_2(H) + \nu^{-1}H^{-1}\bar{\Psi}_2(H),\\
&|x-\alpha_k| \leqslant |x-\alpha_1| + |\alpha_1-\alpha_2| + |\alpha_2| + |\alpha_k| < c_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)/\bar{\Psi}_2(H) +\\
&\qquad + \ \nu^{-1}H^{-1}\bar{\Psi}_2(H) + 2\nu^{-1} \ \text{ для } 3 \leqslant k \leqslant n. \qquad (87)
\end{aligned}$$

Используя оценки $\bar{\Psi}_2^2(H) \geqslant K^3H\bar{\bar{\Psi}}_1(H)$, $\bar{\Psi}_2(H) < k_0H$ и факт, что $|a_n| \leqslant H(P)$, получаем

$$|P(x)| < Hc_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)\bar{\Psi}_2^{-1}(H)2\nu^{-1}H^{-1}\bar{\Psi}_2(H)(3\nu^{-1})^{n-2} = \tau_0\bar{\bar{\Psi}}_1(H),$$

где $\tau_0 = 2\cdot 3^{n-2}c_1'\nu^{1-n}$.

Кроме того,

$$P'(x) = a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}{(x-\alpha_i)}. \qquad (88)$$

Используя (87), оценим каждое слагаемое в (88):

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_2|\cdots|x-\alpha_n| < 2\cdot 3^{n-2}\nu^{1-n}H^{-1}\bar{\Psi}_2(H),\\
&|x-\alpha_1||x-\alpha_3|\cdots|x-\alpha_n| < c_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)/\bar{\Psi}_2(H)(3\nu^{-1})^{n-2},\\
&\frac{|x-\alpha_1|\dots|x-\alpha_n|}{|x-\alpha_i|} < 2\cdot 3^{n-3}\nu^{2-n}c_1'\bar{\bar{\Psi}}_1(H)H^{-1} \ \text{ для } 3 \leqslant i \leqslant n.
\end{aligned}$$

Снова, используя предыдущие неравенства, оценки $\bar{\Psi}_2^2(H) \geqslant K^3H\bar{\bar{\Psi}}_1(H)$, $\bar{\bar{\Psi}}_1(H) \leqslant \bar{\Psi}_2(H)$, $\bar{\Psi}_2(H) < k_0H$, и факт, что $|a_n| \leqslant H(P)$, получаем, что $|P'(x)| < \tau_0 n\bar{\Psi}_2(H)$.

Во-вторых, покажем, что $\mathcal{P}_n(\tau_0\bar{\bar{\Psi}}_1, \tau_0 n\bar{\Psi}_2) \subset \mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_1, \Psi_2)$. Используя факт, что $\bar{\Psi}_2(q) = K^{-1}\Psi_2(q)$, получаем

$$|P'(x)| < \tau_0 n\bar{\Psi}_2(H) = \tau_0 nK^{-1}\Psi_2(H) < \Psi_2(H) \quad \text{для} \ \ K > \tau_0 n.$$

Аналогично получим, что

$$|P(x)| < \bar{\Psi}_1(H) \quad \text{для} \ \ K > \tau_0^{1/2}.$$

В-третьих, по определению имеем $\mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_1, \Psi_2) \subseteq \mathcal{P}_n(\Psi_1, \Psi_2)$. Таким образом, (85) доказано, и доказательство теоремы 6 завершено. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В.В. Бересневич, Регулярные системы и линейные диофантовы приближения на многообразиях // Доклады Национальной Академии Наук Беларуси **44**(5) (2000) 37–39.

[2] В.В. Бересневич, Э.И. Ковалевская, О диофантовых приближениях зависимых величин в p-адическом случае // Мат. заметки **73**(1) (2003) 22–37.

[3] Н.В. Бударина, Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ // Чебышевский сб. **12**(1) (2011) 17–50.

[4] A. Baker and W.M. Schmidt, Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. Lond. Math. Soc. **21** (1970) 1–11.

[5] V. Beresnevich, On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. **90** (1999) 97 - 112.

[6] V.V. Beresnevich, Application of the consept of regular systems in the Metric theory of numbers // Vestsi Nats. Acad. Navuk Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk **1** (2000) 35–39.

[7] V. Beresnevich, V. I. Bernik, M. M. Dodson, Regular systems, ubiquity and Diophantine approximation // A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 260–279.

[8] V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, D. Y. Kleinbock and G. A. Margulis, Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. **2** (2002) 203–225.

[9] V. Beresnevich, On construction of regular system of points with real, complex and p-adic algebraic coordinates // Vesti NAN of Belarus. Ser. fiz-mat. Nauk, **1** (2003) 22 - 27.

[10] V. Beresnevich, V. Bernik, E. Kovalevskaya, On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers // Journal of Number Theory **111** (2005) 33 - 56.

[11] V. Beresnevich, D. Dickinson, S. Velani, Measure theoretic laws for lim sup sets // Mem. Amer. Math. Soc. 179 (2006), 91 pp.

[12] V. Beresnevich, D. Dickinson and S. Velani, Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points // Annals of Mathematics **166** (2007) 367–426.

[13] V. Beresnevich, V. I. Bernik, and F. Götze, The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math. **146** (2010) 1165–1179.

[14] V. Bernik, On the exact order of approximation of almost all points on the parabola // Mat. Zametki **26** (1979) 657–665.

[15] V. Bernik, The metric theorem on the simultaneous approximation of zero by values of integral polynomials // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **44** (1980) 24–45.

[16] V.I. Bernik and I.L. Morotskaya, Diophantine approximation in $\mathbb{Q}_p$ and Hausdorff dimension // Vesti Akad. Nauk BSSR Ser. fiz-mat. **3** (1986) 3–9.

[17] V. I. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis, Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Math. Res. Notices (2001) 453–486.

[18] V. Bernik, N. Budarina and D. Dickinson, Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p–adic fields // Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **149**(2) (2010) 193–216.

[19] M.M. Dodson, A note on the Hausdorff-Besicovich dimension of systems of linear forms // Acta Arith. **44** (1985) 87–98.

[20] Dodson, M.M., B.P. Rynne, and J.A.G. Vickers, Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension // Mathematika **37** (1990) 59–73.

[21] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. **92** (1924) 115–125.

[22] D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis, Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math. **148**(2) (1998) 339–360.

[23] E. Kovalevskaya, On the exact order of approximation to zero by values of integral polynomials in $\mathbb{Q}_p$ // Preprint Institute Math. National Academy Sciences Belarus **8**(547), Minsk 1998.

[24] Y.V. Melnichuk, Hausdorff dimension in Diophantine approximation of p-adic numbers // Ukrain. Mat. Zh. **32** (1980) 118–124 (1980).

[25] A. Mohammadi, A. Salehi Golsefidy, Simultaneous Diophantine Approximation in Non-degenerate p-adic manifolds // Israel J. Math. (to appear).

[26] B.P. Rynne, Regular and ubiquitous systems, and $\mathcal{M}^s_\infty$-dense sequences // Mathematika, **39** (1992) 234–243.

[27] V. Sprindzuk, Mahler's problem in the metric theory of numbers, Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 25, 1969. Translations of Mathematical Monographs.

[28] V. Sprindzuk, Metric Theory of Diophantine Approximation, Wiley, New York (1979).

[29] D.V. Vasilyev, Diophantine sets in $\mathbb{C}$ and Hausdorff dimension // Papers in honour of V.G. Sprindzuk's 60th birthday, Inst. Math., Belarus Akad. Sc., 1997, 21–28.

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
Поступило 12.12.2011