

вращением на угол $\pi/2$ в плоскости (2,4) переводится в матрицу

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Литература

1. Van Loan Ch. A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix // Linear Algebra and its Appls. 1984. V. 61. P. 233–251.
2. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений и симплектическая матричная алгебра // Вычисл. процессы и системы. М.: Наука, 1987. Вып. 5. С. 154–163.
3. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. Ортогональные методы. М.: Наука, 1984.
4. Paige Chr., Van Loan Ch. A Schur decomposition for Hamiltonian matrices // Linear Algebra and its Appls. 1981. V. 41. P. 11–32.
5. Икрамов Х. Д., Сагитов М. С. О факторизации симплектических матриц в произведение элементарных // Методы и алгоритмы числ. анализа. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 111–119.

Поступила в редакцию 14.IX.1987

УДК 519.676

ЗАМЕЧАНИЕ О БЕТА-МЕТОДАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ПОХОДЗЕЙ В. В.

(Ленинград)

Исходя из содержательной трактовки так называемых бета-методов моделирования биномиального распределения, исследованных ранее экспериментально, получены теоретические оценки их быстродействия.

Стандартная интерпретация случайной величины (с.в.) $\xi_{n,p}$, имеющей биномиальное распределение с параметрами $n \geq 1$ и $0 < p < 1$, как числа «успехов» в последовательности независимых испытаний, определяет метод ее моделирования, состоящий в последовательной реализации схемы Бернулли: $\xi_{n,p} = I_{(0,p)}(\alpha_1) + \dots + I_{(0,p)}(\alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — независимые с.в., равномерно распределенные в $(0, 1)$, а I — индикаторная функция интервала. Однако быстродействие соответствующего алгоритма увеличивается линейно с ростом числа испытаний, что делает его неприемлемым при больших n .

Значительно более быстродействующие при больших значениях параметра n так называемые бета-методы моделирования биномиального распределения основаны на реализации составной схемы испытаний Бернулли. Пусть $\alpha_{(1)} < \dots < \alpha_{(i)} < \dots < \alpha_{(n)}$ — порядковые статистики выборки объема n из равномерного распределения в интервале $(0, 1)$. Известно, что порядковая статистика $\alpha_{(i)}$ распределена как с.в. β , имеющая бета-распределение с параметрами i и $n-i+1$. Тогда если $\beta \leq p$, то наверняка i первых порядковых статистик не превосходят p и остается подсчитать число не превосходящих теперь уже $(p-\beta)/(1-\beta)$ элементов, лежащих между β и p среди последних $n-i$ статистик исходной выборки. Если же $\beta > p$, то $n-i+1$ последних порядковых статистик тем более превышают p и остается подсчитать число не превосходящих тогда уже p/β элементов, лежащих между p и β среди первых $i-1$ статистик исходной выборки.

Таким образом, как это формально доказано в [1],

$$\xi_{n,p} = \begin{cases} i + \xi_{n-i, (p-\beta)/(1-\beta)}, & \text{если } \beta \leq p, \\ \xi_{i-1, p/\beta}, & \text{если } \beta > p, \end{cases}$$

и, следовательно, задача моделирования биномиального распределения с параметрами n и p сводится к задаче моделирования биномиальных распределений либо

с параметрами $n-i$ и $(p-\beta)/(1-\beta)$, либо с параметрами $i=1$ и p/β . Для моделирования последних может итеративно применяться тот же самый прием до тех пор, пока величина первого параметра очередного биномиального распределения не станет близкой к некоторому наперед заданному числу n_0 (с дальнейшим использованием последовательной реализации схемы Бернулли).

Один из вариантов реализации изложенной составной схемы Бернулли заключается в последовательном выборе такого i , что $n=2i-1$ (если n четно, то к значению моделируемой с.в. $\xi_{n,p}$ добавляется $I_{(0,p)}(\alpha_n)$ и n уменьшается на единицу), т. е. моделируется медиана упорядоченной по возрастанию выборки из $n=2i-1$ равномерно распределенных в $(0, 1)$ с.в., которая имеет симметричное бета-распределение с параметром i . Итеративно продолжая подобную процедуру до выполнения условия $n/2^k \approx n_0$, получаем, что требуемое число итераций соответствующего алгоритма $k \approx \log n / \log n_0$, а это при небольшом n_0 практически совпадает с $\log n$.

С другой стороны, i может быть выбрано так, чтобы математическое ожидание с.в. β , имеющей бета-распределение с параметрами i и $n-i+1$, которое равно $i/(n+1)$, приближенно совпадало с p , т. е. $i = [(n+1)p]$. Тогда быстродействие вытекающего отсюда алгоритма оценивается величиной

$$\begin{aligned} & E(\xi_{n-i, (p-\beta)/(1-\beta)}, \beta \leq p) + E(\xi_{i-1, 1-p/\beta}, \beta > p) = \\ & = (n-i) \int_0^p \frac{p-x}{1-x} f_{i, n-i+1}(x) dx + (i-1) \int_p^1 \frac{x-p}{x} f_{i, n-i+1}(x) dx, \end{aligned}$$

где $f_{a,b}(x)$ — плотность бета-распределения с параметрами a и b . Обозначая $\sigma_n = [p(1-p)/n]^{1/2}$ и учитывая, что $\sigma_n f_{a,b}(p + \sigma_n x) \rightarrow (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого x , нетрудно показать, что искомая оценка пропорциональна величине $[np(1-p)]^{1/2}$, которая не превосходит $n^{1/2}$. После k итераций алгоритма последняя оценка принимает вид $n^{2^{-k}}$, так что если условием окончания алгоритма является $n^{2^{-k}} \approx n_0$, то требуемое число итераций $k \approx \log(\log n / \log n_0)$, а это при небольшом n_0 совпадает по порядку с $\log \log n$.

Приведенные в [1] экспериментальные оценки быстродействия соответствующих алгоритмов моделирования биномиального распределения хорошо согласуются с полученной иерархией их теоретических оценок.

Литература

1. Походзей Б. Б. Бета- и гамма-методы моделирования биномиального и пуассоновского распределений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 2. С. 187–193.

Поступила в редакцию 20.XI.1987