V. S. Mokeichev, A. M. Sidorov, Matrix Eigenvalues in Analytic Perturbation Theory for Linear Operators, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, Volume 154, Book 3, 158–172

УДК 517.984

МАТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.С. Мокейчев, А.М. Сидоров

Аннотация

В работе предложен новый подход к аналитической теории возмущений собственных значений конечной кратности линейных операторов. Этот подход основан на понятии матричного собственного значения линейного оператора. В качестве приложений полученных результатов рассматриваются линейные задачи для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейный оператор, матричное собственное значение, аналитическая теория возмущений.

Введение

Пусть $B(\mu)$ – линейный оператор, действующий при каждом $\mu \in J = \{\,|\,\mu\,| < < \mu_0\}$ из сепарабельного гильбертова пространства H в H. Рассмотрим задачу на собственные для оператора $B(\mu)$.

Для самосопряжённого оператора $B(\mu) = A_0 + \mu A_1$ Э. Шрёдингер [1] предположил, что его собственные значения и соответствующие собственные элементы аналитически зависят от параметра μ, то есть могут быть вычислены в виде

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + \cdots, \quad u(\mu) = u_{(0)} + u_{(1)}\mu + u_{(2)}\mu^2 + \cdots, \tag{1}$$

в которых λ_j и $u_{(j)}$ не зависят от μ. Формулы (1) называются формулами Шрёдингера. Справедливость этого предположения впервые доказал Ф. Реллих [2]. Хорошо известно, что если хотя бы один из операторов A_0, A_1 не является самосопряжённым, то в общем случае предположение Шрёдингера неверно.

Целью настоящей работы является нахождение условий, при которых для несамосопряжённого оператора $B(\mu) = A_0(\mu) + A_1(\mu)$ справедливо предположение Шрёдингера. Различным подходам к аналитической теории возмущений посвящено большое количество работ. Мы предлагаем новый подход, в основе которого лежит понятие матричного собственного значения. Это понятие, введённое в [3] для других целей, оказалось весьма полезным в теории возмущений [4, 5].

Исследования будут проведены при следующих предположениях относительно оператора $B(\mu) = A_0(\mu) + A_1(\mu)$, $\mu \in J$:

а) при каждом $\mu \in J$ операторы $A_0(\mu) : D_{A_0(\mu)} \to H$, $A_1(\mu) : D_{A_1(\mu)} \to H$ являются линейными в H и $D_{A_0(\mu)} \subset D_{A_1(\mu)}$;

б) все различные собственные значения $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu), \ldots$ оператора $A_0(\mu)$ имеют конечную кратность, при каждом $\mu \in J$ система

$$\{y_{(k,j)}(\mu), \quad j = 1, \ldots, n_k(\mu), \quad k = 1, 2, \ldots\} \tag{2}$$

собственных элементов, соответствующих $\lambda_k(\mu)$, является ортонормированным базисом в H, при всех k и $\mu \in J$

$$a(k,\mu) = \sup_{q\neq k}(|\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu)|^{-1}) < +\infty; \tag{3}$$

в) при каждых k и $\mu \in J$ оператор $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)\, I$ нормально разрешим (I – единичный оператор) и оператор $A_1(\mu)$ подчинён оператору $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu) I$ в следующем смысле: при всех $x \in D_{A_0(\mu)}$ таких, что $\langle x, y_{(k,j)}(\mu)\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, n_{k(\mu)}$, справедливо неравенство $\|A_1(\mu)x\| \le b(k,\mu)\|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)x\|$;

г) при каждом $\mu \in J$ для любых чисел $z_{k,j}$ справедливо равенство

$$A_1(\mu)\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} z_{k,j} y_{(k,j)}\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} z_{k,j}\, A_1(\mu)\, y_{(k,j)},$$

если ряды сходятся в H по норме.

Замечание 1. Если операторы $A_0(\mu)$ и $A_1(\mu)$ замкнуты, то, как легко видеть, из выполнимости предположений *а*) и *б*) следует выполнимость предположений *в*) и *г*).

Введём обозначения, в которых k фиксировано, C – множество всех комплексных чисел:

$\mathbf{v}$ – вектор-столбец с координатами $v_{(1)}, \ldots, v_{(n_k(\mu))}$, $v_{(j)} \in H$;

$\mathbf{z}$ – вектор-столбец с координатами $z_1, \ldots, z_{n_k(\mu)}$, $z_j \in C$;

$\mathbf{z}\, v$ – вектор-столбец с координатами $z_1 v, \ldots, z_{n_k(\mu)} v$, $v \in H$;

$T\,\mathbf{v}$ – вектор-столбец с координатами $T\, v_{(1)}, \ldots, T\, v_{(n_k(\mu))}$, $v_{(j)} \in D_T$ для скалярного оператора T;

$\langle \mathbf{v}, y\rangle$ – вектор-столбец с координатами $\langle v_{(1)}, y\rangle, \ldots, \langle v_{(n_k(\mu))}, y\rangle$ при каждом $y \in H$;

$$\|\,\mathbf{v}\,\| = \Biggl(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \|v_{(j)}\|^2\Biggr)^{1/2}, \quad |\mathbf{z}| = \Biggl(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |z_j|^2\Biggr)^{1/2}, \quad |D| = \Biggl(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)}\sum_{q=1}^{n_k(\mu)} |d_{j,q}|^2\Biggr)^{1/2},$$

если D – матрица с элементами $d_{j,q} \in C$.

Определение 1. Квадратная матрица $\Lambda_k(\mu)$ размерности $n_k(\mu)$ называется матричным собственным значением оператора $B(\mu) - \lambda_k(\mu) I$, если уравнение $(B(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\,\mathbf{v} = \Lambda_k\,(\mu)\,\mathbf{v}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{v}$.

В настоящей работе (теорема 4 и замечание 4) приведены условия, при которых матричные собственные значения $\Lambda_k(\mu)$ аналитически зависят от μ в некоторой окрестности нуля, причём соответствующие им собственные векторы $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ можно выбрать аналитически зависящими от μ. Другими словами, обоснованы формулы Шрёдингера

$$\Lambda_k(\mu) = \Lambda_{k,0} + \Lambda_{k,1}\mu + \Lambda_{k,2}\mu^2 + \cdots, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_{(k)}(\mu) = \mathbf{v}_{(k,0)} + \mathbf{v}_{(k,1)}\mu + \mathbf{v}_{(k,2)}\,\mu^2 + \cdots, \tag{5}$$

в которых $\Lambda_{k,j}$, $\mathbf{v}_{(k,j)}$ не зависят от μ.

Переход от матричных собственных значений к обычным собственным значениям осуществляется по следующей схеме.

Пусть $\delta_{k,q}(\mu)$, $q = 1, \ldots, m_k(\mu)$, – все различные собственные значения матрицы $\Lambda'_k(\mu)$, транспонированной к матричному собственному значению $\Lambda_k(\mu)$, и $\{\boldsymbol{\xi}_{k,q,j}(\mu),\ j = 1, \ldots, p_{k,q}(\mu)\}$ – система из собственного $\boldsymbol{\xi}_{k,q,1}(\mu)$, первого присоединённого $\boldsymbol{\xi}_{k,q,2}(\mu)$, второго присоединённого $\boldsymbol{\xi}_{k,q,3}(\mu)$ и т. д. векторов матрицы $\Lambda'_k(\mu)$, соответствующих собственному значению $\delta_{k,q}(\mu)$. Тогда цепочка векторов

$$\Bigl\{h_{(k,q,j)}(\mu) = \sum_{r=1}^{n_k(\mu)} \xi_{k,q,j,r}(\mu)\, v_{(k,r)}(\mu),\ j = 1, \ldots, p_{k,q}(\mu)\Bigr\} \tag{6}$$

состоит из собственного вектора $h_{(k,q,1)}(\mu)$, первого присоединённого элемента $h_{(k,q,2)}(\mu)$, второго присоединённого $h_{(k,q,3)}(\mu)$ и т. д. элементов оператора $B(\mu)$, соответствующих собственному значению $\lambda_k(\mu)+\delta_{k,q}(\mu)$. Напомним, что $\xi_{k,q,j,r}(\mu)$, $v_{(k,r)}(\mu)$ – координаты с номером r соответственно для $\boldsymbol{\xi}_{k,q,j}(\mu)$, $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$.

Из формул (6), в частности, следует, что вопрос о справедливости формул Шрёдингера сводится к вопросу о справедливости формул Шрёдингера для возмущений первой ненулевой матрицы $\Lambda_{k,q}(\mu)$.

1. Существование матричных собственных значений

Всюду в разделе k фиксировано. В доказательствах утверждений (в отличие от нумеруемых формул) не будем подчеркивать зависимость от μ используемых объектов, а в тех случаях, когда не возникает недоразумений, – и от k. Символ 0 будем использовать и для числа 0, и для нулевого вектора, и для нулевой матрицы, и для нулевого элемента, и для нулевого оператора. Из контекста будет понятно, в каком смысле понимается 0. Переменные j, k, m, n, q, p (как с индексами, так и без них) считаются целыми и неотрицательными (в приложениях они могут быть векторными, но с целыми координатами). Обозначим через $\mathbf{u}_{(0)}$ вектор-столбец с координатами $y_{(k,1)},\dots,y_{(k,n_k(\mu))}$ и положим $\mathbf{z}_{-1,j}=0$.

Лемма 1. *Существуют такие абстрактные $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$ и числовые $\mathbf{z}_{k,j}(\mu)$ объекты, что при $p\geq 1$ выполняются равенства*

$$(A_0(\mu)-\lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(p)}(\mu)=-A_1(\mu)\mathbf{u}_{(p-1)}(\mu)+\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{n_k(\mu)}\mathbf{z}_{m,j}(\mu)u_{(p-1-m,j)}(\mu), \quad (7)$$

$$\langle\mathbf{u}_{(p)}(\mu),\ y_{(k,j)}(\mu)\rangle=0,\quad j=1,\dots,n_k(\mu). \quad (8)$$

Доказательство. Имеем, что в (7) $u_{(p,j)}$ – координата с номером j вектора $\mathbf{u}_{(p)}$. Введём индукционное предположение:

$$\text{при } q=0,\dots,p-1 \text{ существуют } \ \mathbf{u}_{(q)},\quad \mathbf{z}_{q-1,j},\quad j=1,\dots,n_k.$$

В силу выбора $\mathbf{u}_{(0)}$, $\mathbf{z}_{-1,j}$ предположение выполняется при $p=1$. Докажем его справедливость при $q=p$. Обозначим правую часть в (7) через $F_{(p)}$. Поскольку оператор $A_0-\lambda_k I$ нормально разрешим, то уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\langle F_{(p)},\,z\rangle=0\quad \forall\, z\in\ker(A_0-\lambda_k\ I)^*=\ \{z:\ (A_0-\lambda_k\ I)^*z\ =0\}.$$

В силу того, что ортонормированный базис (2) состоит из собственных элементов оператора A_0, выполняется равенство

$$\ker(A_0(\mu)-\lambda_k(\mu)I)^*=\ker(A_0(\mu)-\lambda_k(\mu)I).$$

Поэтому уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle F_{(p)},y_{(k,j)}\rangle=0$, $j=1,\dots,n_k$. Эти равенства с учётом (8) принимают вид

$$\mathbf{z}_{p-1,j}(\mu)=\langle A_1(\mu)\mathbf{u}_{(p-1)}(\mu),\ y_{(k,j)}(\mu)\rangle,\quad j=1,\dots,n_k(\mu). \quad (9)$$

По индукционному предположению $p\geq 1$.

При выполнении (9) общее решение уравнения (7) принимает вид $\mathbf{u}-$ $-\sum_{j=1}^{n_k}\mathbf{c}_j\ y_{(k,j)}$, где $\mathbf{u}$ – одно из решений уравнения (7). Поэтому при $\mathbf{c}_j=\langle\mathbf{u},\ y_{(k,j)}\rangle$, $j=1,\dots,n_k$, получим решение задачи (7), (8). Справедливость индукционного предположения при $q=p$, а значит, и леммы, доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{q,j}(\mu)$ *удовлетворяют* (7), (8). *Тогда при* $q \geq 1$ *и некоторых* $f_k(\mu)$ *выполняются оценки*

$$\| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(q)}(\mu) \| \leq g(k,\mu)\, q^{-2}\, (f_k(\mu))^{q-1}, \tag{10}$$

в которых $g(k,\mu) = \| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(0)}(\mu) \|$.

Доказательство. Предварительно при $m \geq 1$ докажем оценки

$$\| \mathbf{u}_{(m)}(\mu) \| \leq a(k,\mu)\ \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \tag{11}$$

$$\| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \| \leq b(k,\mu)\, \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \tag{12}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\, \mathbf{z}_{m,j}(\mu) \,|^2 \right)^{1/2} \leq b(k,\mu)\, \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \tag{13}$$

$$\| -A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \mathbf{z}_{m,j}(\mu) y_{(k,j)}(\mu) \| \leq b(k,\mu)\, \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\, \mathbf{u}_m(\mu) \|. \tag{14}$$

Напомним, что в доказательствах (в отличие от нумеруемых формул) не подчёркиваем зависимость от μ, и, если нет недоразумений, то и от k. Так как выполняется (8) и (2) – ортонормированный базис, то

$$\| \mathbf{u}_{(m)} \|^2 = \sum_{q\neq k} \sum_{j=1}^{n_k} |\, c_{m,q,j} \,|^2 \ \leq$$

$$\leq \ \left(\max_{q\neq k} |\, \lambda_q - \lambda_k \,|^{-2} \right) \sum_{q\neq k}\ \sum_{j=1}^{n_k} (|\, c_{m,q,j}|^2 |\, \lambda_q - \lambda_k \,|^2) \ =$$

$$= \ a^2\ \| (A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(m)} \|^2.$$

Следовательно, выполняется (11). В силу подчинённости оператора A_1 оператору $A_0 - \lambda_k I$ и оценок (8) выполняются оценки (12).

Из равенств (9) следует, что при $m \geq 1$ совпадают коэффициенты Фурье с номерами $q \neq k$ (по последовательности (2)) у элементов

$$-A_1\mathbf{u}_{(m)} + \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{z}_{m,j}\, y_{(k,j)}, \quad -A_1\mathbf{u}_{(m)},$$

причём коэффициент Фурье с номером k у первого элемента равен нулю (в силу (9)). Тогда

$$\| -A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \mathbf{z}_{m,j}(\mu)\ y_{(k.j)}(\mu)\| \leq \|A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu)\|. \tag{15}$$

С учётом (12) получим (14).

Чтобы доказать (13), заметим, что в силу (9)

$$\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\mathbf{z}_{m,j}(\mu)|^2 = \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\langle A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu), y_{(k,j)}(\mu)\rangle|^2 \ \leq$$

$$\leq \ \sum_{q\geq 1}\ \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\langle A_1\mathbf{u}_{(m)}(\mu),\ y_{(q,j)}(\mu)\rangle|^2 = \|A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu)\|^2. \tag{16}$$

Здесь учтено, что (2) – ортонормированный базис. Отсюда и из (12) следует (13). Оценки (11)–(14) доказаны. Легко видеть, что оценки (15), (16) выполняются и при $m=0$.

Вводим индукционное предположение: *оценки* (10) *выполняются при* $q = 0,\ldots,p-1$.

Справедливость этих оценок при $q=1$ следует из (7) и (15). Докажем их справедливость при $q=p$ и оценим $f=f_{(k)}(\mu)$. Итак, $p\ge 2$, и в силу (7)

$$\|(A_0-\lambda_k I)\mathbf{u}_{(p)}\| \le \|-A_1\mathbf{u}_{(p-1)}+\sum_{j=1}^{n_k}\mathbf{z}_{p-1,j}\;y_{(k,j)}\| + \\ +\;\|\sum_{j=1}^{n_k}\mathbf{z}_{0,j}\;u_{(p-1,j)}\|+\|\sum_{m=1}^{p-2}\sum_{j=1}^{n_k}\mathbf{z}_{m,j}\;u_{(p-1-m,j)}\|.$$

Оценим каждую из трех групп слагаемых S_1, S_2, S_3. Отметим, что третье слагаемое при $p=2$ отсутствует. В (14) оценено S_1. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$S_2\le\Big(\sum_{j=1}^{n_k}|\mathbf{z}_{0,j}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n_k}\|u_{(p-1,j)}\|^2\Big)^{1/2}=\Big(\sum_{j=1}^{n_k}|\mathbf{z}_{0,j}|^2\Big)^{1/2}\|\mathbf{u}_{(p-1)}\|.$$

Отсюда и из (11), (16) следует, что

$$S_2\le|\Lambda_{k,0}|\;a\;\|(A_0-\lambda_k I)\mathbf{u}_{(p-1)}\|,$$

где $\Lambda_{k,m}$ – матрица, столбцы которой $\mathbf{z}_{m,j}$, $j=1,\ldots,n_k$, зависят от k. При $p\ge 3$ из (9), (12), (16) следуют неравенства

$$S_3\le\sum_{m=1}^{p-2}\Big(\sum_{j=1}^{n_k}|\mathbf{z}_{m,j}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n_k}\|u_{(p-1-m,j)}\|^2\Big)^{1/2}\le\sum_{m=1}^{p-2}\|A_1\mathbf{u}_{(m)}\|\;\|\mathbf{u}_{(p-1-m)}\|\le \\ \le\; b\;a\sum_{m=1}^{p-2}\|(A_0-\lambda_k I)\mathbf{u}_{(m)}\|\;\|(A_0-\lambda_k I)\mathbf{u}_{(p-1-m)}\|.$$

Поэтому в силу индукционных предположений

$$S_1\le b\;g\;f^{p-2}\;(p-1)^{-2};\quad S_2\le g\;|\Lambda_{k,0}|\;a\;f^{p-2}\;(p-1)^{-2};$$

$$S_3\le b\;a\;g^2\;f^{p-3}\Big(\sum_{m=1}^{p-2}m^{-2}\;(p-1-m)^{-2}\Big).$$

Заметим, что $S_3=0$ при $p=2$. Очевидно, что $p^2\sum_{m=1}^{p-2}m^{-2}(p-1-m)^{-2}\le c$ при всех $p\ge 3$, и постоянная c не зависит от p.

Таким образом, доказано, что

$$\|(A_0-\lambda_k I)\mathbf{u}_{(p)}\|\le((p/(p-1))^2(b+|\Lambda_{k,0}|\;a)+b\,a\,g\,c\,f^{-1})\,g\,p^{-2}f^{p-2}.$$

Поэтому индукционное предположение выполнится и при $q=p$, если

$$(p/(p-1))^2\,(b(k,\mu)+a(k,\mu)|\Lambda_{k,0}(\mu)|)+b(k,\mu)\,a(k,\mu)g(k,\mu)\,c\,(f_k(\mu))^{-1}\le f_k(\mu). \quad (17)$$

На этом доказательство леммы 2 закончено. □

Замечание 2. Если

$$4\, b(k,\mu) + 4\, a(k,\mu)\, |\Lambda_{k,0}| + b(k,\mu)\, a(k,\mu)\, g(k,\mu)\, c \leq 1, \tag{18}$$

то оценки (17) выполняются при некотором $f_k(\mu) \leq 1$; более того, если левая часть в (18) стремится к нулю для некоторой подпоследовательности $\{k_n\}$, стремящейся к бесконечности, то $f_k(\mu)$ можно выбрать так, что $f_{k_n}(\mu) \to 0$.

Замечание 3. Если $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{p,j}(\mu)$, $f_k(\mu)$ удовлетворяют (7)–(9), (17), то при выполнении условия

$$\sum_{q=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{q-1} q^{-2} < +\infty$$

ряды

$$\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{u}_{(p)}(\mu), \quad \sum_{p=0}^{\infty} (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu) I)\mathbf{u}_{(p)}(\mu), \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_1(\mu)\mathbf{u}_{(p-1)}(\mu), \quad \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{z}_{p,j}(\mu) \tag{19}$$

сходятся, причём первые три ряда – по норме, а четвертый – абсолютно.

Пусть ряды (19) сходятся, и $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ – сумма первого ряда, $\boldsymbol{\lambda}_{k,j}(\mu)$ – сумма четвёртого ряда. Тогда

$$(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu) I)\mathbf{v}_{(k)}(\mu) = -A_1(\mu)\mathbf{v}_{(k)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \boldsymbol{\lambda}_{k,j}(\mu) v_{(k,j)}(\mu), \tag{20}$$

где $v_{(k,j)}(\mu)$ – координата с номером j вектора $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$.

Введём матрицу $\Lambda_k(\mu)$, первый столбец которой образует вектор, совпадающий с $\boldsymbol{\lambda}_{k,1}(\mu)$, второй – с $\boldsymbol{\lambda}_{k,2}(\mu)$ и т. д. Тогда равенства (20) принимают вид

$$(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu) I + A_1(\mu))\mathbf{v}_{(k)}(\mu) = \Lambda_k(\mu)\mathbf{v}_{(k)}(\mu), \tag{21}$$

причём $\langle \mathbf{v}_{(k)}(\mu), y_{(k,j)}(\mu)\rangle \neq 0$. Следовательно, доказана

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{p,j}(\mu)$ *определяются равенствами* (7)–(9), *выполняются оценки* (17), *ряды* (19) *сходятся,* $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$, $\lambda_{k,j}(\mu)$ *– суммы соответственно первого и последнего рядов в (19). Тогда* $\Lambda_k(\mu)$ *– матричное собственное значение оператора* $A_0(\mu)+A_1(\mu)-\lambda_k(\mu)I$, $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ *– соответствующий собственный элемент.*

Зная матричные собственные значения, по формулам (6) вычислим собственные и присоединённые элементы оператора $B(\mu)$. Ответим на вопрос: все ли собственные значения оператора $B(\mu)$ можно вычислить по (6)?

Пусть при каждом $\mu \in J$ и каждом k ряды (19) сходятся. По формулам (4), (5) вычислим множество собственных значений оператора $B(\mu)$:

$$\{\lambda_k(\mu) + \delta_{q,k}(\mu),\ q = 1, \ldots, m_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots\} \tag{22}$$

и соответствующую им последовательность собственных и присоединённых элементов

$$\{h_{(k,q,j)}(\mu),\ j = 1, \ldots, p_{k,q}(\mu),\ q = 1, \ldots, m_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots\}. \tag{23}$$

Теорема 2. *Если при* $\mu \in J$ *система* (23) *является базисом в* H *и оператор* $B(\mu)$ *имеет хотя бы одно регулярное значение, то каждое собственное значение оператора* $B(\mu)$ *принадлежит множеству* (22).

Доказательство. С целью упрощений в записях формул не подчёркиваем зависимость от μ используемых в доказательстве объектов. Итак, β – собственное значение оператора B, v – соответствующий собственный элемент и γ – регулярное значение оператора B. Так как (23) – базис в H, то

$$v = \sum{}' \left(v_{k,q,1} h_{(k,q,1)} + \cdots + v_{k,q,s} h_{(k,q,s)}\right). \tag{24}$$

При этом символ $\sum{}'$ указывает на то, что суммирование производится только по тем k, q, для которых сумма, заключенная в скобки, отлична от нуля. Число s выбрано так, чтобы $v_{k,q,s} \neq 0$, $v_{k,q,j} = 0$ при $j > s$.

В силу непрерывности $(B - \gamma I)^{-1}$ имеем

$$(B - \gamma I)^{-1} v = \sum{}' \left(v_{k,q,1}(B - \gamma I)^{-1} h_{(q,k,1)} + \ldots + v_{k,q,s}(B - \gamma I)^{-1} h_{(k,q,s)}\right).$$

Из равенств $(B - \beta_{k,q} I) h_{(k,q,1)} = 0$, $(B - \beta_{k,q} I) h_{(k,q,j)} = h_{(k,q,j-1)}$ при $j > 1$ следует, что

$$\begin{aligned}(B - \gamma I)^{-1} h_{(k,q,1)} &= (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1} h_{(k,q,1)}, \quad (B - \gamma I)^{-1} h_{(k,q,j)} = \\ &= (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1} h_{(k,q,j)} + \phi_{k,q,j-1} h_{(k,q,j-1)} + \cdots + \phi_{k,q,1} h_{(k,q,1)}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$(B - \gamma I)^{-1} v = \sum{}' \left(t_{k,q,1} h_{(k,q,1)} + \cdots + t_{k,q,s-1} h_{(k,q,s-1)} + (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1} v_{k.q,s}\right). \tag{25}$$

С другой стороны, $(B - \gamma I)^{-1} v = (\beta - \gamma)^{-1} v$. Отсюда, из (24), (25) и базисности (23) следует равенство $(\beta_{k,q} - \gamma)^{-1} v_{k,q,s} = (\beta - \gamma)^{-1} v_{k,q,s}$, в котором $v_{k,q,s} \neq 0$. Поэтому $\beta = \beta_{k,q}$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $f_k(\mu) \leq 1$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k,\mu))^2 < 1, \tag{26}$$

где $\psi(k,\mu) = a(k,\mu)\, b(k,\mu) \sum_{p=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{p-1} p^{-2}$. *Тогда* (23) *является в* H *базисом Рисса со скобками, причём если у* $B(\mu)$ *имеется регулярное значение, то множество всех собственных значений оператора* $B(\mu)$ *совпадает с* (22).

Доказательство. В силу (10), (11), (19) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_{(k)}(\mu) - \mathbf{y}_{(k)}(\mu)\| &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \|\mathbf{u}_{(k,p)}(\mu)\| \leq a(k,\mu) \sum_{p=1}^{\infty} \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu) I)\mathbf{u}_{(k,p)}(\mu)\| \leq \\ &\leq a(k,\mu) g(k,\mu) \sum_{p=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{p-1} p^{-2} = \psi(k,\mu).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (26) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} ||v_{(k,j)}(\mu) - y_{(k,j)}||^2 < 1$. Значит, система $\{v_{(k,j)},\ j = 1, \ldots, n_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots\}$ является квадратично близкой к ортонормированному базису $\{y_{(k,j)}(\mu),\ j = 1, \ldots, n_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots\}$. По теореме

Н.К. Бари [6] она является базисом Рисса в H. Поскольку $\mathbf{h}_{(k)}(\mu) = G(k,\mu)\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$, а матрица $G(k,\mu)$ обратима (ибо её столбцы есть линейно независимые собственные и присоединённые векторы матрицы $\Lambda'_k(\mu)$), то система элементов (23) является в H базисом Рисса со скобками. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 2. □

В заключении этого раздела ответим на вопросы:

1) справедливы ли формулы Шрёдингера для вычисленных матричных собственных значений $\Lambda_k(\mu)$ и собственных векторов $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$?

2) какие собственные значения оператора $B(\mu)$ аналитически зависят от μ?

Теорема 4. *Пусть при некоторых k, $\mu_k > 0$, всех $\mu \in J_k = \{|\mu| < \mu_k\}$ выполняются оценки* (26), *оператор $A_1(\mu)$ и функции $y_{(k,j)}(\mu)$, $(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$, где $q \neq k$, аналитически зависят от $\mu \in J_k$. Тогда для $\Lambda_k(\mu)$, $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ при $\mu \in J_k$ выполняются формулы Шрёдингера.*

Доказательство. Аналитичность в J_k оператора $A_1(\mu)$ означает, что из аналитичности в J_k элемента $x(\mu) \in D_{A_0(\mu)}$ следует аналитичность в J_k элемента $A_1(\mu)x(\mu)$. Так как ряды (19) при $\mu \in J_k$ сходятся по норме, то по теореме Вейерштрасса о пределе последовательности аналитических функций достаточно доказать, что $\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{p,k,j}(\mu)$, определяемые в (7)–(9), аналитически зависят от $\mu \in J_k$. Воспользуемся методом математической индукции. При $p = 0$ имеем $\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu) = \mathbf{y}_{(k)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{p-1,k,j}(\mu) = 0$, то есть аналитически зависят от $\mu \in J_k$. Предполагаем, что при всех $q = 0, \ldots, p-1$ объекты $\mathbf{u}_{(q,k)}(\mu)$, $\mathbf{z}_{q-1,k,j}(\mu)$ аналитически зависят от $\mu \in J_k$. Тогда в силу (9) $\mathbf{z}_{p-1,k,j}(\mu)$ аналитически зависит от $\mu \in J_k$, поэтому этим же свойством обладает и правая часть $F_{(p)}(\mu)$ в равенстве (7). При этом решение задачи (7), (8) имеет вид

$$\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu) = \sum_{j,m\neq k,} \langle F_{(p)}(\mu),\ y_{(m,j)}(\mu)\rangle (\lambda_m(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1} y_{(m,j)}(\mu),$$

причём ряд сходится по норме, и каждое слагаемое аналитически зависит от $\mu \in$ $\in J_k$. В этом случае по теореме Вейерштрасса его сумма также обладает этим свойством. Теорема доказана. □

Замечание 4. При выполнении оценок $f_k(\mu) \leq 1$ из независимости от μ оператора $A_0(\mu)$ и аналитичности по μ в окрестности нуля оператора $A_1(\mu)$ следует выполнимость предположений теоремы 4.

2. Приложение к граничным задачам для линейных дифференциальных уравнений скалярного аргумента

Речь пойдёт о линейном дифференциальном уравнении с отклоняющимся аргументом

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{r=1}^{N_2} C_{j,r}(\mu) y^{(j)}(t + T_{j,r}(\mu)) + \sum_{j=0}^{N_3}\sum_{r=1}^{N_4} C_{j,r,1}(t,\mu) y^{(j)}(T_{j,r,1}(t,\mu)) = \lambda y(t)\ t \in Q, \quad (27)$$

в котором $N_3 \leq N_1 - 1$, $C_{j,r}(\mu)$ не зависят от t, $\mu \in J$, $y^{(j)}(t)$ – производная порядка j функции $y(t)$, $T_{j,r}(\mu)$ – вещественные числа, $T_{j,r,1}\ (t,\mu)$ – вещественнозначные функции, $C_{j,r,1}(t,\mu)$ – суммируемые в каждом компакте функции, причём $C_{N_1-1,r,1}(t,\mu)$ ограничены в существенном. Считаем, что все рассматриваемые функции измеримы по Лебегу. Обозначим через Q_T объединение при $j \neq 0$ множеств $\{t + T_{j,r}(\mu),\ t \in Q\}$, $\{T_{j,r,1}(t,\mu),\ t \in Q\}$, через Q_{T_0} – объединение множеств $\{t + T_{0,r}(\mu),\ t \in Q\}$, $\{T_{0,r,1}(t,\mu),\ t \in Q\}$, Q.

Определение 2. Функция $y(t)$, $t \in Q_T \bigcup Q_{T_0}$, для которой $y^{(j)}(t)$, $j = 0, \ldots, (N_1 - 1)$, абсолютно непрерывны в каждом компакте из Q_T, называется решением уравнения (27), если при почти всех $t \in Q$ выполняется (27).

Определение 3. Решение $y(t)$ уравнения (27) называется 2π-периодическим, если выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} y_k \left(\exp\left(ikt\right)\right)^{(j)}, \ t \in R, \ j = 0, \ldots, N_1, \tag{28}$$

в которых y_k не зависят от t, и ряды сходятся в $L^2(2\pi)$ по норме.

Здесь и далее $L^2(2\pi)$ – множество всех 2π-периодических функций $h(t)$, удовлетворяющих условию $\|h(t)\| = \left(\int\limits_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt\right)^{1/2} < +\infty$.

Определение 4. Нечётное 2π-периодическое решение уравнения (27) называется решением Штурма–Лиувилля.

Определение 5. Чётное 2π-периодическое решение уравнения (27) называется решением Неймана.

Определение 6. Решение $y(t)$ уравнения (27) называется анти-2π-периодическим, если выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} y_k \left(\exp\left(it(k+1/2)\right)\right)^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \ldots, N_1,$$

в которых y_k не зависят от t, и ряды сходятся в $L^2(2\pi)$ по норме.

Очевидно, что для решения Штурма–Лиувилля выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sin\left(kt\right)\right)^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \ldots, N_1.$$

Аналогично для решения Неймана имеем равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \left(\cos\left(kt\right)\right)^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \ldots, N_1.$$

Сказанное указывает на то, что наибольшее внимание следует уделить 2π-периодической задаче. Изучая эту задачу, считаем, что множество Q содержит интервал длины 2π.

Удобно обозначить через $AC^n(2\pi)$ множество всех 2π-периодических функций $x(t)$, для которых производные $x^{(j)}(t)$, $j = 0, \ldots, n-1$, существуют, абсолютно непрерывны в каждом компакте из R и $x^{(n)}(t) \in L^2(2\pi)$. Очевидно, что условия (28) равносильны включению $y(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$.

Чтобы воспользоваться абстрактной схемой, положим $H = L^2(2\pi)$, а также при $z(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$

$$A_0(\mu)z(t) = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left(\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{r=1}^{N_2} C_{j,r}(\mu) \exp\left(ipT_{j,r}(\mu)\right)(ip)^j\right) \exp\left(ipt\right), \tag{29}$$

$$A_1(\mu)z(t) = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left(\sum_{j=0}^{N_3} \sum_{r=1}^{N_4} C_{j,r,1}(t,\mu) \exp\left(ipT_{j,r,1}(t,\mu)\right)(ip)^j \right). \tag{30}$$

Сходимость в H по норме рядов (29), (30) легко следует из сделанных предположений и из равенств (28). Коэффициенты Фурье суммы ряда (29) обозначим через $\gamma_p(\mu)$. Тогда множество всех собственных значений оператора $A_0(\mu)$ совпадает с множеством $\{\gamma_p(\mu),\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Фиксируем $\lambda_1(\mu),\ \lambda_2(\mu), \ldots$ – все различные элементы данного множества. Это и есть все различные собственные значения оператора $A_0(\mu)$. Кратность $n_k(\mu)$ собственного значения $\lambda_k(\mu)$ равна количеству целочисленных решений p уравнения

$$\gamma_p(\mu) = \lambda_k(\mu). \tag{31}$$

Очевидно, она конечна, если у уравнения $\sum\limits_{r=1}^{N_2} C_{N_1,r}(\mu) \exp\left(ipT_{N_1,r}(\mu)\right) = 0$ конечное множество целочисленных корней p. Всюду считаем, что $n_k(\mu) < +\infty$. Целочисленные корни k_j уравнения (31) перепишем в виде (k,j).

Итак, $\{(k,j),\ j = 1, \ldots, n_k(\mu)\}$ – множество всех целочисленных корней уравнения (31). Тогда $y_{(k,j)}(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(ik_jt)$ – собственные элементы оператора $A_0(\mu)$, соответствующие собственному значению $\lambda_k(\mu)$.

Далее под записью $\sum^{(k)}$ понимаем запись $\sum\limits_{q=1, q\neq k}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_q}(\mu)$.

К сожалению, без дополнительных предположений обойтись невозможно. Объяснение этому – простое: из неравенства

$$\sum^{(k)} |z_{q_j}(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}|^2 < +\infty \tag{32}$$

в общем случае не следуют неравенства

$$\sum^{(k)} |z_{q_j}(iq_j)^m|^2 < +\infty, \quad m = 0, \ldots, N_3$$

даже тогда, когда выполняются равенства

$$\langle z(t),\, y_{(k,j)}(\mu) \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, n_k(\mu). \tag{33}$$

Напомним, что q_j – целочисленное решение уравнения $\gamma_p(\mu) = \lambda_q(\mu)$. Другими словами, если $z(t)$ принадлежит области определения оператора $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$, то необязательно $z(t) \in AC^{N_3}(2\pi)$. Но без этого включения непонятен смысл записи $A_1(\mu)z(t)$. Поэтому предполагаем, что при $m \le N_3$ и $q \neq k$ выполняются оценки

$$|q_j^m(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}| \le B_{m,k}(\mu), \quad j = 1, \ldots, n_q(\mu). \tag{34}$$

В частности, при $m = 0$ вычисляем $a(k,\mu)$.

Замечание 5. В тех случаях, когда $N_1 \ge 2$,

$$\gamma_p(\mu) = (ip)^{N_1} + \sum_{m=0}^{N_1-2} \sum_{r=1}^{N_2} C_{m,r}(\mu)\ (ip)^m\ \exp\left(ipT_{m,r}(\mu)\right),$$

оценки (34) выполняются автоматически, более того, имеет место асимптотика $B_{m,k}(\mu) = O(k^{m-N_1})$; если все числа $\lambda_k(\mu)$ – целые, то $a(k,\mu) \le 1$.

Заметим, что область определения оператора $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ состоит из всех тех $z(t) \in L^2(2\pi)$, для которых выполняются оценки (32).

Из предположений относительно коэффициентов и отклонений аргумента для уравнения (27) следует, что при $m = 0, \dots, N_3$, $w(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$ выполняются оценки

$$\|C_{m,r,1}(t,\mu)\; w^{(m)}(T_{m,r,1}(t,\mu))\| \le B_{m,r,1}(\mu)\, \|w^{(m)}(t)\|. \tag{35}$$

В силу (34) в случае (33)

$$\|z^{(m)}(t)\| \le B_{m,k}(\mu)\; \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)z(t)\|. \tag{36}$$

Из неравенств (32)–(36) легко следует, что

$$\|C_{m,r,1}(t,\mu)\; z^{(m)}(T_{m,r,1}(t,\mu)\| \le b_{m,k,1}(\mu)\; \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)z(t)\|,$$

если $z(t)$ удовлетворяет условиям (33) и $m \le N_3$. В результате имеем $b(k,\mu) = b_{0,k,1}(\mu) + \dots + b_{N_3,k,1}(\mu)$, причём в силу замечания 5 $b(k,\mu) = O(k^{N_3+1-N_1})$, если $B_{m,k}(\mu) = O(k^{m-N_1})$.

Величина $g(k,\mu)$ равна

$$\|A_1(\mu)\mathbf{y}_{(k)}(\mu)\| = \left(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \left\|A_1(\mu)y_{(k,j)}(\mu)\right\|^2\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \left\| \sum_{m=o}^{N_3}\sum_{r=1}^{N_4} C_{m,r,1}(t,\mu)\; (ik_j)^m \exp\left(ik_jT_{m,r,1}(t,\mu)\right)\right\|^2\right)^{1/2}$$

с учётом того, что записи (k,j), k_j означают одно и то же. Очевидно, что оценки (31) гарантируют нормальную разрешимость оператора $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$.

Зная $a(k,\mu)$, $g(k,\mu)$, $b(k,\mu)$, из неравенства (17) находим $f_k(\mu)$ – величину, используемую в (10). В силу замечания 5 $f_k(\mu) \to 0$ при $|k| \to +\infty$, если $N_1 > 1$, $N_3 \le N_1 - 2$, $C_{N_1,j_0}(\mu) \ne 0$, $T_{N_1,j_0}(\mu) = 0$, $C_{N_1,j}(\mu) = 0$ при $j \ne j_0$.

Таким образом, к изучаемой 2π-периодической задаче применимы полученные выше результаты (теоремы 1–4), связанные с существованием и нахождением собственных значений.

Следующим шагом ответим на вопрос: *когда к изучаемой задаче применимы формулы Шрёдингера?*

Очевидно, что в случае $f_k(\mu) \le 1$ при некотором k и дополнительных предположениях об аналитической зависимости от $\mu \in J_k$ всех функций $C_{m,j,1}(t,\mu)$, $T_{m,j,1}(t,\mu)$, $(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$ при $q \ne k$ выполняются предположения теоремы 4. Это означает справедливость формул Шрёдингера. При этом следует отметить, что при таких k для матричного собственного значения $\Lambda_k(\mu)$ выполняется равенство $\Lambda_k(\mu) = \Lambda_{k,0}(\mu) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m W_{m,k}$, где $W_{m,k}$ не зависят от μ, причём

$$\sqrt{2\pi}\,\Lambda_{k,0}(\mu) = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{1,1}(\mu), \dots, \widetilde{\lambda}_{1,n_k(\mu)}(\mu) \\ \cdots \\ \widetilde{\lambda}_{n_k(\mu),1}(\mu), \dots, \widetilde{\lambda}_{n_k(\mu),n_k(\mu)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{\lambda}_{j,r}(\mu) = \int_0^{2\pi} (A_1(\mu)\exp(ik_jt))\exp(-ik_rt)\,dt.$$

Из теоремы 4 следует, что если при некотором k собственные значения матрицы $\Lambda_k(\mu)$ аналитически зависят от μ, то и собственные значения 2π-периодической задачи для уравнения (27) аналитически зависят от μ, при этом соответствующие собственные функции рассматриваемой задачи можно выбрать аналитически зависящими от μ.

Замечание 6. Оператор $A_0(\mu)$ мы определили с помощью равенств (29), хотя можно его выбрать иначе, например,

$$A_0(\mu)z = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left(\sum_{j\in Q_1} \sum_{r\in Q_2} C_{j,r}(\mu)\,(ip)^j \, \exp\left(ipT_{j,r}(\mu)\right)\right) \exp\left(ipt\right),$$

где Q_j – подмножества множеств $\{0,\dots,N_j\}$, $j=1,2$. Выбирать $A_0(\mu)$ следует так, чтобы облегчить проверку условий теорем 1–4.

Замечание 7. Если $N_1>1$ – чётное число и $y_{(k,j)}(t,\mu)=(\sqrt{\pi})^{-1}\sin(kt)$, то все сказанное о 2π-периодической задаче с естественными изменениями переносится на задачу Штурма–Лиувилля, а в случае $y_{(k,j)}(t,\mu)=(\sqrt{\pi})^{-1}\cos(kt)$ – и на задачу Неймана, причём при дополнительных предположениях $C_{N_1-1,r}(\mu)=0$, $C_{N_1-1,r}(t,\mu)=0$ в качестве оператора $A_0(\mu)$ следует взять оператор, определяемый равенствами

$$A_0(\mu)z(t)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (ik)^{N_1}\ \sin(kt)$$

для задачи Штурма–Лиувилля,

$$A_0(\mu)z(t)=\sum_{k=0}^{\infty} z_k\ (ik)^{N_1}\ \cos(kt)$$

для задачи Неймана.

При таком выборе при всех k выполняются равенства $n_k(\mu)=1$.

3. Задача Чебышёва–Эрмита для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами

Речь пойдёт о задаче во всем пространстве R^n для уравнения

$$P(\mu,t,D)z(t)\equiv P_1(\mu,t,D)z(t)+P_2(\mu,t,D)z(t)=\lambda z(t),\ t\in R^n, \tag{37}$$

в которой

$$P_1(\mu,t,D)z(t)\equiv \sum_{\alpha\in Q_1} C_\alpha(\mu) l^\alpha z(t);$$

$$P_2(\mu,t,D)z(t)\equiv \sum_{\alpha\in Q_2} C_{\alpha,r}(\mu,t)\, z^{(\alpha)}(T_{\alpha,r}(\mu,t));$$

Q_1, Q_2 – конечные множества мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $C_\alpha(\mu)$ не зависят от $t=(t_1,\dots,t_n)$;

$$l^\alpha z(t)\equiv\Big(\prod_{j=1}^{n} l_j^{\alpha_j}\Big)z(t),\quad l_j z(t)\equiv -(z(t))^{(2)}_{t_j}+t_j^2 z(t);$$

функции $C_{\alpha,r}(\mu,t)$, $T_{\alpha,r}(\mu,t)$ измеримы по Лебегу, причём $T_{\alpha,r}(\mu,t)$ – вещественные.

Известно [7, с. 401], что оператор l_j имеет в $L^2(R)$ собственные значения $\nu_m = 2m+1$, $m=0,1,2,\dots$, которым соответствуют собственные функции Чебышева–Эрмита $z_{(m)}(t_j)$, $m=0,1,2,\dots$, образующие ортонормированный базис в $L^2(R)$.

Чтобы воспользоваться абстрактной схемой, обозначим

$$k=(k_1,\dots,k_n),\quad z_{(k)}(t)=\prod_{j=1}^{n} z_{(k_j)}(t_j),\quad \nu_k=(\nu_{k_1},\dots,\nu_{k_n}),\quad \nu_k^{\alpha}=\prod_{j=1}^{n}\nu_{k_j}^{\alpha_j},$$

$$A_0(\mu)y(t)=\sum_{|k|=0}^{\infty} P_1(\mu,t,D)(y_k\ z_{(k)}(t)), \tag{38}$$

$$A_1(\mu)y(t)=\sum_{|k|=0}^{\infty} P_2(\mu,t,D)(y_k\ z_{(k)}(t)). \tag{39}$$

В выписанных равенствах

$$y(t)=\sum_{|k|=0}^{\infty} y_k\ z_{(k)}(t)\in H=L^2(R^n). \tag{40}$$

Области определений $D_{A_0(\mu)}$, $D_{A_1(\mu)}$ соответственно операторов $A_0(\mu)$, $A_1(\mu)$ состоят из всех тех функций (40), при которых соответствующие ряды (38), (39) сходятся по норме в H.

Очевидно, что множество $\sigma(\mu)$ всех собственных значений оператора $A_0(\mu)$ имеет вид

$$\Big\{\gamma_k(\mu)=\sum_{\alpha\in Q_1} C_\alpha(\mu)\ \nu_k^{\alpha},\ k\in Z^+\Big\}.$$

Здесь и ниже Z^+ – множество всех векторов размерности n с целочисленными неотрицательными координатами. Некоторые элементы множества $\sigma(\mu)$ могут совпадать между собой. Поэтому фиксируем $\lambda_k(\mu)$, $k\in Z^+$, – все различные элементы множества $\sigma(\mu)$. Тогда кратность $n_k(\mu)$ собственного значения $\lambda_k(\mu)$ равна количеству решений $p\in Z^+$ уравнения

$$\gamma_p(\mu)=\lambda_k(\mu).$$

Решения этого уравнения перепишем в виде (k,j), $j=1,\dots,n_k(\mu)$, а собственные элементы $z_{(k)}(t)$ оператора $A_0(\mu)$, соответствующие собственному значению $\lambda_k(\mu)$, – в виде $y_{(k,j)}(t)$, $j=1,\dots,n_k(\mu)$. Тогда

$$\{y_{(k,j)}(t),\ j=1,\dots,n_k(\mu),\ k\in Z^+\}$$

есть ортонормированный базис в H.

Всюду считаем, что $n_k(\mu)<+\infty$, $a(k,\mu)=\sup\limits_{q\neq k}|\lambda_k(\mu)-\lambda_q(\mu)|^{-1}<+\infty$. Эти предположения выполняются, например, тогда, когда $|\gamma_p(\mu)|\to+\infty$ при $|p|\to\to+\infty$.

Приведем условия, гарантирующие подчинённость оператора $A_1(\mu)$ оператору $A_0(\mu)-\lambda_k(\mu)I$. Напомним, что подчинённость для нас означает существование некоторой постоянной $b(k,\mu)$ такой, что для всех $z(t)\in D_{A_0(\mu)}$, удовлетворяющих условию

$$\langle z(t),\ y_{(k,j)}(t)\rangle=0,\quad j=1,\dots,n_k(\mu),$$

выполняются оценки

$$\|A_1(\mu)z(t)\|\le b(k,\mu)\ \|(A_0(\mu)-\lambda_k(\mu)I)z(t)\|. \tag{41}$$

Укажем условия, гарантирующие выполнение оценок (41).

Пусть $R^n = \bigcup\limits_{j=1}^{M} \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$, где $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ попарно не пересекаются, и функции $T_{\alpha,r}(t,\mu)$ в каждом $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ дифференцируемы и обратимы. Через $\delta_{\alpha,r,j}(\tau,\mu)$ обозначим якобиан преобразования координат $\tau = T_{\alpha,r}(t,\mu)$, $t \in \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$. Если почти всюду в $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ выполняются оценки

$$|C_{\alpha,r}(t,\mu)\delta_{\alpha,r,j}(T_{\alpha,r}(t,\mu))| \le B_{\alpha,r,j},$$

то

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)} |C_{\alpha,r}(t,\mu)\ w(T_{\alpha,r}(t,\mu))|^2\, dt \Bigg)^{1/2} =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{T_{\alpha,r}\Omega_{\alpha,r,j}} |C_{\alpha,r}(T^{-1}_{\alpha,r}(\tau,\mu))\ \delta_{\alpha,r,j}(\tau,\mu)|^2\ |w(\tau)|^2\, d\tau \Bigg)^{1/2},$$

где $T_{\alpha,r}\Omega_{\alpha,r,j}$ – область значений функции $T_{\alpha,r}(t,\mu)$, $t \in \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$. Поэтому выполняются оценки (41). Имеем, что $g(k,\mu) = \|A_1(\mu)\mathbf{y}_{(k)}(t)\|$, где $\mathbf{y}_{(k)}(t)$ – вектор-столбец с координатами $y_{(k_j)}$, $j = 1,\ldots,n_k(\mu)$, $\gamma_{k_j} = \lambda_k(\mu)$.

Итак, постоянные $a(k,\mu)$, $b(k,\mu)$, $g(k,\mu)$ вычислены. Поэтому из (17) находим $f_k(\mu)$. В случае $f_k(\mu) \le 1$ к исследуемой задаче применимы теоремы 1–4. В частности, если при фиксированном k выполняется оценка $f_k(\mu) \le 1$, то в случае аналитической зависимости от $\mu \in J$ объектов $C_{\alpha,r,1}(t,\mu)$, $(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$ (при $q \ne k$), $T_{\alpha,r}(t,\mu)$ матричные собственные значения $\Lambda_k(\mu)$ аналитически зависят от $\mu \in J$. При этом соответствующие собственные векторы $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ можно выбрать аналитически зависящими от $\mu \in J$. Другими словами, для вычисления матричных собственных значений $\Lambda_k(\mu)$ и соответствующих им собственных векторов $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ применимы формулы Шрёдингера.

Замечание 8. Область применимости полученных результатов значительно шире рассмотренных двух задач.

Summary

V.S. Mokeichev, A.M. Sidorov. Matrix Eigenvalues in Analytic Perturbation Theory for Linear Operators.

In the present paper, we propose a new approach to the analytic perturbation theory for isolated eigenvalues of finite multiplicity. This approach is based on the notion of the matrix eigenvalue of a linear operator. As an application example, we consider linear problems for differential equations.

Key words: linear operator, matrix eigenvalue, analytic perturbation theory.

Литература

1. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem. Dritte Mitteilung: Störungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien // Ann. Phys. – 1926. – Bd. 80. – S. 437–490.

2. *Rellich F.* Störungstheorie der Spektralzerlegung. I. Mitteilung. Analytische Störung der isolierten Punkteigenwerte eines beschränkten Operators // Math. Ann. – 1937. – Bd. 113. – S. 600–619.

3. *Мокейчев В.С.* Собственные значения граничных задач. Преобразование граничных задач к граничным задачам с малыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 222–228.

4. *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* О матричном подходе к теории возмущений линейных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. Воронеж. зимней матем. школы. – Воронеж: Изд.-полиграф. центр Воронеж. ун-та, 2009. – С. 119–120.

5. *Сидоров А.М.* Матричные собственные значения в теории возмущений // Современные проблемы теории функций и их приложений: Материалы 16-й Сарат. зимней школы. – Саратов: Научн. шк., 2012. – С. 161–162.

6. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. – 1951. – Т. 4, Вып. 148. – С. 69–107.

7. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Поступила в редакцию
10.04.12

Мокейчев Валерий Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Valery.Mokeychev@ksu.ru*

Сидоров Анатолий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Anatoly.Sidorov@ksu.ru*