М. Я. Блинкин, О неразложимости борелевских многообразий, *Матем. сб.*, 1972, том 130, номер 3, 442–446

УДК 519.46

О неразложимости борелевских многообразий

М. Я. Блинкин (Москва)

1. Введение

Однородное пространство G/T простой компактной связной группы Ли G по максимальному тору T мы будем называть борелевским многообразием.

Целью нашей работы является доказательство следующего факта: борелевские многообразия неразложимы, т. е. не разлагаются в прямое произведение многообразий положительной размерности.

Неразложимость борелевских многообразий позволяет применить к ним результаты А. Л. Онищика ([2] и [3]) и получить описание всех групп Ли, действующих на них транзитивно и эффективно.

Следует отметить, что неразложимость борелевских многообразий для простых групп ранга 2 была доказана ранее в работе [2].

2. Обозначения и предварительные сведения

Везде далее G — связная простая компактная группа Ли, T — ее максимальный тор, $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T, $\mathfrak{t}^*$ — двойственное пространство пространства $\mathfrak{t}$, $r=r(G)=\dim T$ — ранг группы G, $W=W(G)$ — группа Вейля группы Ли G, $(\, , \,)$ — W-инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{t}^*$, R (соответственно R^+) — система корней (положительных корней) пространства $\mathfrak{t}^*$, $m=|R^+|$ — число положительных корней.

Для конечномерного векторного пространства V через $\mathbf{R}[V]$ будем обозначать его симметрическую алгебру над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Через $I(W)$ — идеал в $\mathbf{R}[\mathfrak{t}^*]$, порожденный инвариантами ненулевой степени группы W. Известно, что $H(G/T, \mathbf{R})$ (мы будем писать просто $H(G/T)$) — конечномерная градуированная алгебра над $\mathbf{R}$, порожденная своими элементами из $H^2(G/T)$. $H^2(G/T)$ канонически отождествляется с $\mathfrak{t}^*$. Также известно, что $H(G/T)\cong\mathbf{R}[\mathfrak{t}^*]/I(W)$ как градуированные алгебры (элементам из $H^2(G/T)$ будем приписывать степень 1).

Многочлен Пуанкаре пространства G/T имеет вид

$$P(G/T)=(1-t^{2m_1})\dots(1-t^{2m_r})(1-t^2)^{-r},$$

где m_i — степени инвариантов группы W — образующих идеала $I(W)$.

Доказательства перечисленных фактов содержатся в работе [1], числа m_i для простых групп G выписаны, например, в [4].

Высотой нильпотентного элемента x алгебры M мы будем называть натуральное число $h(x)$ такое, что $x^{h(x)}\neq 0$, $x^{h(x)+1}=0$.

3. Верхняя оценка для высот

Назовем степенью регулярности элемента $x \in \mathfrak{t}^*$ величину $l(x) = \operatorname{card}\{\in R^+ : (\alpha, x) \neq 0\}$.

Предложение 1. *$h(x) \leqslant l(x)$ для любого $x \in \mathfrak{t}^* \cong H^2(G/T)$.*

Доказательство. Обозначим через V_x векторное пространство, порожденное корнями из R^+, ортогональными элементу x. Тогда $\mathfrak{t}^* = V_x \dotplus V_x^\perp$, где $V_x^\perp$ — ортогональное дополнение к V_x. Группа $\widetilde{W} \subset W(G)$ порождена отражениями в корнях из V_x. В качестве базисных $\widetilde{W}$-инвариантов в $\mathbf{R}[\mathfrak{t}^*]$ выберем любые $k = \dim V_x^\perp$ линейно независимых элементов в $V_x^\perp$ $P_1, \ldots, P_k$ с условием $P_1 = x$; $P_{k+1}, \ldots, P_r$ — $\widetilde{W}$-инварианты в $\mathbf{R}[V_x]$. Алгебра $\widetilde{S} = \mathbf{R}[P_1, \ldots P_r]/I(W)$ вложена в $H(G/T)$, и ее полином Пуанкаре имеет вид

$$P(\widetilde{S}) = \prod_{i=1}^{r}(1 - t^{m_i})\left[\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{\widetilde{m}_i})\right]^{-1},$$

где $\widetilde{m}_i = \deg P_i$. Итак, если $\widetilde{m} = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i - \sum\limits_{i=1}^{r} \widetilde{m}_i$, то $P_1^{\widetilde{m}+1} = 0$ в $\widetilde{S}$ и, следовательно, в $H(G/T)$. Но $\sum\limits_{i=1}^{r}(m_i - 1) = m$ (см. [5]), а $\sum\limits_{i=1}^{r}(\widetilde{m}_i - 1)$ — число корней из $R^+ \cap V_x$, т. е. $\widetilde{m} = l(x)$, следовательно, $x^{l(x)+1} = 0$, и предложение доказано.

Замечание. Представляется весьма правдоподобной гипотеза: $l(x) = h(x)$.

Нижняя оценка высот, которую мы установим ниже, непосредственно не нужна для доказательства неразложимости, но, видимо, представляет некоторый интерес.

4. Нижняя оценка

Предложение 2. *$h(x) \geqslant r$ для любого $x \in \mathfrak{t}^* \cong H^2(G/T)$.*

Для доказательства нам понадобятся некоторые свойства высоты.

Пусть $M = \bigoplus\limits_i M^i$ и $N = \bigoplus\limits_i N^i$ — конечномерные градуированные алгебры над полем характеристики 0.

Лемма 1. *Если $a \in M^1$, $b \in N^1$, то высота элемента $a + b = a \otimes 1 + 1 \otimes b$ в алгебре $M \otimes N$ равна $h(a) + h(b)$.*

Доказательство. Так как $(a + b)^n = \sum\limits_i \binom{n}{i} a^{n-i} \otimes b^i$, если $(a+b)^p = 0$, то $a^{p-i} \otimes b^i = 0$ для любого $i \geqslant 0$. Следовательно, $p > h(a) + h(b)$. Если $(a + b)^q \neq 0$, найдется $i \geqslant 0$ такое, что $a^{q-i} \otimes b^i \neq 0$, т. е. $q - i \leqslant h(a)$, $i \leqslant h(b)$ и $q \leqslant h(a) + h(b)$. Из полученных неравенств заключаем, что $h(a + b) = h(a) + h(b)$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней в пространстве $V_r = \mathfrak{t}^*$. Заметим, что, «зачеркивая» любой корень α_k, мы получаем систему простых корней некоторой полупростой алгебры Ли и что найдутся по крайней мере два таких корня (мы будем называть их крайними) после «зачеркивания» любого из которых остается неприводимая система простых корней. Пусть α_k — крайний корень, V_{r-1}^k — линейная оболочка всех простых корней, кроме α_k, β_k ортогонален подпространству V_{r-1}^k и $V_1^k = \mathbf{R}\beta_k$.

Любой $x \in V_r$ представляется в виде $x = l_k(x) + c_k(x)\beta_k$, где $l_k(x) \in V_{r-1}^k$, $c_k(x) \in \mathbf{R}$.

Лемма 2. *Для любого $x \in V_r$ найдутся такие крайний корень α_k и $g \in W$, что $l_k(gx) \neq 0$ и $c_k(gx) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть α_1 и α_r — различные крайние корни. Так как система корней неприводима, для любого $x \in V_r$ найдется такой $g \in W$, что $c_1(gx) \neq 0$. Если при этом $l_1(gx) = 0$, то $x = c_1(gx) g^{-1}\beta_1$, т. е. лемму достаточно доказать для $x = \beta_1$.

Заведомо $l_r(\beta_1) \neq 0$. Если же $c_r(\beta_1) = 0$, то $(\beta_1, \beta_r) = 0$, что равносильно вырожденности верхнего правого минора $(r-1)$-го порядка матрицы Грама векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Но легко проверить, используя схемы Дынкина простых алгебр Ли, что этот минор невырожден.

Мы будем пользоваться еще двумя очевидными свойствами высоты: если $\varphi : M \to N$ — гомоморфизм градуированных алгебр и $a \in M^1$, то $h(a) \geqslant h(\varphi(a))$; если $a \in \mathfrak{t}^* \cong H^2(G/T)$ и $g \in W(G)$, то $h(a) = h(ga)$.

Теперь для доказательства предложения 2 мы воспользуемся индукцией по рангу r. Пусть $r = 1$, тогда: $H(G/T) \cong \mathbf{R}[x]/(x^2)$, и, очевидно, $h(x) = 1$.

Пусть теперь $x \in V_r$. Пользуясь леммой 2, найдем крайний корень, скажем, α_r и $g \in W$ такие, что $l_r(gx) \neq 0$ и $c_r(gx) \neq 0$. (Далее мы будем опускать индекс r и считать, что уже $l(x) \neq 0$ и $c(x) \neq 0$.) Разложение $V_r = V_{r-1} \dotplus V_1$ инвариантно относительно действия группы Вейля W', порожденной отражениями в корнях $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$, и поэтому отображение

$$\varphi : \mathbf{R}[V_r] \to \mathbf{R}[V_{r-1}] \otimes \mathbf{R}[V_1],$$

индуцированное этим разложением, пропускается через действие группы W' Таким образом, если P — инвариант группы W в $\mathbf{R}[V_r]$, то $\varphi(P)$ — W'-инвариант в $\mathbf{R}[V_{r-1}] \otimes \mathbf{R}[V_1]$, т. е. $\varphi(P) = \sum_i Q_i \beta^i$, где Q_i — W'-инварианты в $\mathbf{R}[V_{r-1}$ и $\deg Q_i + i = \deg P$ $(i = 0, \ldots, \deg P)$.

Понятно, что если Q_i — константа, то $i \geqslant 2$. Таким образом, существует гомоморфизм градуированных алгебр

$$\tilde{\varphi} : \mathbf{R}[V_r]/I(W) \to \mathbf{R}[V_{r-1}]/I(W') \otimes \mathbf{R}[\beta]/(\beta^2).$$

Применяя лемму 1 и предположение индукции, получаем

$$h(x) \geqslant h(\varphi(x)) = h(l(x)) + h(\beta) \geqslant r - 1 + 1 = r.$$

Предложение доказано.

5. Теорема о неразложимости

Теорема. *Борелевские многообразия G/T неразложимы.*

Доказательство. Если $G/T \simeq X' \otimes X''$, где X' и X'' — многообразия ненулевой размерности, то $H(G/T) \cong H(X') \otimes H(X'')$, и $H^2(G/T) \cong H^2(X') \otimes 1 + 1 \otimes H^2(X'')$. Очевидно, найдется элемент максимальной высоты $x \in H^2(G/T)$, т. е. $x^m \neq 0$.

В силу предложения 1, x регулярен (т. е. не ортогонален ни одному из корней). Так как $H^{2m}(X') = 0$, $H^{2m}(X'') = 0$ и $x^m \neq 0$, то $x \notin H^2(X')$ и $x \notin H^2(X'')$, поэтому найдутся $a \in H^2(X')$ и $b \in H^2(X'')$ такие, что $x = a \otimes 1 + 1 \otimes b$.

Имеем $x^m = \sum\limits_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^i \otimes b^{m-i} \neq 0$ и $\dim H^{2m}(G/T) = 1$, поэтому найдется единственное p, $0 < p < m$, такое, что $x^m = \binom{m}{p} a^p \otimes b^{m-p}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, если $x_\lambda = a \otimes 1 + 1 \otimes \lambda b$, то $x_\lambda^m = \lambda^{m-p} \binom{m}{p} a^p \otimes b^{m-p} \neq 0$, и, в силу предложения 1, x_λ регулярен. Но тогда $(\alpha, a) = 0$ или $(\alpha, b) = 0$ для любого $\alpha \in R$, так как иначе, положив $\lambda = -\frac{(\alpha, a)}{(\alpha, b)}$, получим нерегулярный x_λ. Поэтому, если $R_a = \{\alpha \in R : (\alpha, a) = 0\}$, $R_b = \{\alpha \in R : (\alpha, b) = 0\}$, то $R = R_a \bigcup R_b$, причем $R_a \bigcap R_b = \phi$, так как x регулярен.

Легко видеть, что R_a инвариантно относительно отражения s_α в гиперплоскости, ортогональной корню α, для любого $\alpha \in R_a$ и $s_\beta R_b \subset R_b$ для любого $\beta \in R_b$. Пусть $\alpha \in R_a$, $\beta \in R_b$. Если $s_\alpha(\beta) \in R_a$, то $R_a \ni s_\alpha(s_\alpha(\beta)) = \beta$, но $R_a \cap R_b = \phi$. Если $s_\alpha(\beta) \in R_b$, то

$$0 = (s_\alpha(\beta), b) = (\beta, b) - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}(\alpha, b);$$

так как $(\beta, b) = 0$ и $(\alpha, b) \neq 0$ для любых $\alpha \in R_a$ и $\beta \in R_b$, то $(\alpha, \beta) = 0$, т. е. R_a ортогональна подсистеме R_b, что противоречит неприводимости системы корней $R(G)$.

6. Транзитивные группы на борелевских многообразиях

Пусть X — компактное однородное многообразие с положительной эйлеровой характеристикой. Соображения, приведенные в работе [2], показывают, что если X неразложимо, то всякая транзитивно и эффективно действующая на нем компактная группа Ли проста.

С другой стороны, простая связная компактная группа Ли, транзитивно и эффективно действующая на борелевском многообразии G/T, подобна G в группе всех автоморфизмов этого многообразия (теорема 8 из [2]). Заметив, что эйлерова характеристика многообразия G/T положительна, и пользуясь теоремой о неразложимости, получаем

Следствие 1. *Связная компактная группа Ли G', действующая транзитивно и эффективно на борелевском многообразии G/T, проста и подобна группе G.*

Какие некомпактные группы могут действовать на борелевских многообразиях?

Если связная группа Ли L действует на G/T транзитивно и локально эффективно, то L во всяком случае полупроста (теорема 2 из [3]). Из неразложимости G/T следует простота группы Ли L. Но все простые группы такого сорта описаны в той же работе [3]. Следовательно, справедливо

Следствие 2. *Всякая связная группа Ли L, действующая на борелевском многообразии G/T транзитивно и локально эффективно, проста и содержит группу, подобную G, в качестве максимальной компактной.*

Все такие группы перечислены в приведенной ниже таблице.

G	L	
	$G^{\mathbf{C}}$	другие некомпактные
$SU(n)$	$SL(n, \mathbf{C})$	
$SO(n)$	$SO(n, \mathbf{C})$	$SL(n, \mathbf{R})$
$Sp(n)$	$Sp(n, \mathbf{C})$	$SU^*(2n)$
F_4	$F_4^{\mathbf{C}}$	E_6^{IV}
E_6, E_7, E_8, G_2	соответственно $E_6^{\mathbf{C}}, E_7^{\mathbf{C}}, E_8^{\mathbf{C}}, G_2^{\mathbf{C}}$	

Автор признателен А. Л. Онищику за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе.

(Поступила в редакцию 18/V 1971 г.)

Литература

1. А. Борель, О когомологиях главных расслоенных пространств, Сб. «Расслоенные пространства», Москва, ИЛ, 1958, 163 — 244.
2. А. Л. Онищик, О транзитивных компактных группах преобразований, Матем. сб., **60 (102)** (1963), 447—485.
3. А. Л. Онищик, О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. III, Матем. сб., **75 (117)** (1968), 255—263.
4. Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик, Семинар по алгебраическим группам и группам Ли, Москва, изд-во МГУ, 1969.
5. R. Steinberg, Invariants of finite reflection groups, Canad. J. Math., **12**, № 4 (1960), 616 — 618.