В. В. Горлов, О конгруэнциях на замкнутых классах k-значной логики, определяемых предикатами,

Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 756–763

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

О КОНГРУЭНЦИЯХ НА ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПРЕДИКАТАМИ

В. В. Горлов

Решетка конгруэнций замкнутого класса содержит много полезной информации о классе. Например, строение решетки конгруэнций определяет возможность подпрямого разложения класса на подпрямо неразложимые. Подпрямо неразложимыми замкнутыми классами будут простые замкнутые классы, т. е. классы k-значной логики, имеющие только тривиальные конгруэнции $\varkappa_0, \varkappa_a$ и $\varkappa_1$.

Описание всех конгруэнций на каждом замкнутом классе было получено только при $k = 2$ [1]. Известно, что при $k \geqslant 3$ мощность решетки замкнутого класса может быть континуальной, счетной или равной n, $n = 2, 3, \ldots$, [1]. Поэтому представляется интересной возможность описания конгруэнций замкнутого класса k-значной логики через предикаты, сохраняемые всеми функциями класса. Некоторые исследования в этом направлении были проведены автором [2]. Полное сообщение об основных результатах настоящей работы было опубликовано [3].

В данной статье показано, как можно найти все конгруэнции замкнутого класса k-значной логики, располагая подробной информацией о всех предикатах, сохраняемых функциями из этого замкнутого класса.

Все неопределяемые понятия и обозначения, встречающиеся в тексте, можно найти в работах [1, 6].

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k - 1\}$, $k \geqslant 2$, P_k^n — множество всех функций k-значной логики, зависящих от n переменных, $n = 1, 2, \ldots, P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n$. Будем считать, что на P_k действует операция суперпозиции, в том числе операция введения фиктивной переменной. Предикатом арности l на E_k называется функция $R(x_1, \ldots, x_l) \in P_k^l$, принимающая только два значения, 0 и 1, $C_R = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in E_k^l$ и $R(\tilde{\alpha}) = 1\}$, иногда C_R удобно представлять в виде матрицы (α_{ij}), $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, t$, где $t = |C_R|$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$ и $\tilde{\sigma}_i \in C_R$, $i = 1, \ldots, n$; через $(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$ будем обозначать (для удобства) матрицу, строки которой — наборы $\tilde{\sigma}_i$, $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$, обозначим вектор $\tilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_l)$, где $\delta_i = f(\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет предикат $(x_1, \ldots, x_l)$, если для любых $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n$ из C_R $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) \in C$. Для любого предиката R множество $U(R)$ всех функций из P_k, сохраняющих R, образует замкнутый класс.

Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый класс k-значной логики, R — l-местный предикат, $\mathfrak{a} \subseteq U(R)$, ρ — бинарное отношение на C_R, представленное предикатом арности $2l$

$$R_\rho(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l),\ R_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l) = \\ = 1 \Leftrightarrow R(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = R(\beta_1, \ldots, \beta_l) = 1 \text{ и } \tilde{\alpha}\rho\tilde{\beta}.$$

Определение. Бинарное отношение ρ на C_R называется согласованным относительно $\mathfrak{a}$ отношением (с. о. $\mathfrak{a}$), если $\mathfrak{a} \subseteq U(R_\rho)$.

Непосредственно из определения вытекает

Предложение 1. *Пусть R — предикат и ρ с. о. $U(R)$. Тогда $U(R) = U(R_\rho)$.*

Основной интерес представляют согласованные относительно $\mathfrak{a}$ отношения эквивалентности (с. о. э. $\mathfrak{a}$) на C_R. Отметим, что отношение равенства ι и тождественно-истинное отношение ω являются с.о.э.

Достаточно обширное семейство с. о. э. $\mathfrak{a}$ на C можно задать следующим образом: пусть $M \subseteq \{1, 2, \ldots, l\}$ и $\tilde{\sigma} \langle M \rangle \tilde{\delta}$ тогда и только тогда, когда для любых $i \notin M$ $\sigma_i = \delta_i$. Отношение $\langle M \rangle$ является отношением эквивалентности, согласованность которого относительно $U(R)$ (и, следовательно, $\mathfrak{a} \subseteq U(R)$) является следствием определения. Отметим, что $\langle \varnothing \rangle = \iota$ и $\langle \{1, 2, \ldots, l\} \rangle = \omega$.

Обозначим через $L(\mathfrak{a}, R)$ и $LE(\mathfrak{a}, R)$ множества всех с. о. $\mathfrak{a}$ и с. о. э. $\mathfrak{a}$ соответственно. Некоторые свойства $L(\mathfrak{a}, R)$ и LE $(\mathfrak{a}, R)$ описываются в следующем утверждении.

Предложение 2. *Для любого замкнутого класса k-значной логики $\mathfrak{a}$ и предиката R, $\mathfrak{a} \subseteq U(R)$, выполняется следующее*:

I. $L(\mathfrak{a}, R)$ *замкнуто относительно композиции отношений*;

II. $LE(\mathfrak{a}, R)$ *является полной подрешеткой решетки всех отношений эквивалентности на* C_R.

Доказательство. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in L(\mathfrak{a}, R)$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{a}$ и $\tilde{\sigma}_i (\rho_1 \circ \rho_2) \tilde{\delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для некоторых $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\sigma}_i \rho_1 \tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_i \rho_2 \tilde{\delta}_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) \rho_1 f(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n)$ и $f(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) \rho f(\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_n)$. Поэтому $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) (\rho_1 \circ \rho_2) f(\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_n)$, и, следовательно, $(\rho_1 \circ \rho_2) \in L(\mathfrak{a}, R)$. Перейдем к доказательству второй части нашего утверждения. Пусть ρ_1, $\rho_2 \in$ LE $(\mathfrak{a}, R)$; тогда $\rho_1 \wedge \rho_2$ с. о. э. $\mathfrak{a}$, и поэтому $\rho_1 \wedge \rho_2 \in$ LE $(\mathfrak{a})$. Заметим, что в силу конечности C_R транзитивное замыкание $\rho_1 \vee \rho_2$ будет совпадать с $(\rho_1 \circ \rho_2)^t$ для некоторого натурального t, и, следовательно, $(\rho_1 \vee \rho_2) \in$ LE $(\mathfrak{a}, R)$. Так как $\iota, \omega \in$ LE $(\mathfrak{a}, R)$, то предложение доказано.

Опишем далее конгруэнции, порождаемые с. о. э. на предикатах, сохраняемых замкнутым классом $\mathfrak{a}$.

Пусть $\rho \in$ LE $(\mathfrak{a})$ и $\langle R, \rho; \mathfrak{a} \rangle$ — бинарное отношение на $\mathfrak{a}$, определяемое следующим образом: если $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{a}$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_m) (\langle R, \rho, \mathfrak{a} \rangle)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ и для любых $\tilde{\sigma}_i \in C_R$, $i = 1, \ldots, n$, $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) \cdot \rho g(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$.

ЛЕММА. *Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый класс k-значной логики, $k \geqslant 3$, R — предикат, $\mathfrak{a} \subseteq U(R)$ и $\rho \in LE(\mathfrak{a}, R)$. Тогда выполняется следующее*:

1) $\langle R, \rho; \mathfrak{a} \rangle$ *является конгруэнцией на* $\mathfrak{a}$;

2) $\langle R, \omega; \mathfrak{a} \rangle = \varkappa_a$;

3) *если для некоторого* j, $1 \leqslant j \leqslant t = |C_R|$, $\{\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jt}\} = E_k$, *то* $\langle R, \iota; \mathfrak{a} \rangle = \varkappa_0$.

Доказательство. Докажем 1). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$ $(\langle R, \rho, \mathfrak{a} \rangle)$ и $f(U_1, \ldots, U_n)$, $g(V_1, \ldots, V_n)$ — суперпозиции, причем для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $U_i \equiv V_i$ $(\langle R, \rho; \mathfrak{a} \rangle)$ либо U_i и V_i совпадают с некоторой переменной. Отметим, что если $\mathfrak{a}$ содержит селекторные функции, то не нужно последнее условие.

Так как $\langle R, \rho; \mathfrak{a}\rangle \leqslant \varkappa_a$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $f(U_1, \ldots, U_n)$ и $g(V_1, \ldots, V_n)$ зависят от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Пусть $\widetilde{\sigma}_j \in C_R$, $j = 1, \ldots, m$; тогда $\widetilde{\delta}_i = U_i(\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_m)\rho V_i(\widetilde{\sigma}_1, \ldots \ldots, \widetilde{\sigma}_m) = \tilde{\varepsilon}_i$, причем $\widetilde{\delta}_i$ и $\tilde{\varepsilon}_i$ совпадут с одним из $\widetilde{\sigma}_j$, если V_i и U_i — переменная. Получим $f(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n)\cdot \cdot\rho g(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n)$ и $f(\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n)\rho g(\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n)$; из согласованности отношения ρ следует, что $f(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n)\cdot \cdot\rho f(\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n)$, и поэтому $f(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n)\rho g(\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n)$. Следовательно, $f(U_1, \ldots, U_n) \equiv g(V_1, \ldots, V_n)$ $(\langle R, \rho; \mathfrak{a}\rangle)$. Рефлексивность, симметричность и транзитивность $\langle R, \rho; \mathfrak{a}\rangle$ следует из построения. Так как ω «склеивает» любые две строки C_r, то из построения $\langle R, \rho; \mathfrak{a}\rangle$ следует 2).

Перейдем к доказательству 3). Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ — произвольный набор; построим матрицу $(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n)$ из строк, принадлежащих C_r, так, что j столбец есть набор $\widetilde{\alpha}$. По условию 3) такое возможно. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$ $(\langle R, \rho; \mathfrak{a}\rangle)$, то $f(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_n) = g(\widetilde{\delta}_1, \ldots \ldots, \widetilde{\delta}_n)$, и поэтому $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Следовательно, $f(x_1, \ldots \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, и поэтому $\langle R, \iota; \mathfrak{a}\rangle = \varkappa_0$. Лемма доказана.

Введем важный для дальнейшего тип конгруэнций. По-прежнему R — l-местный предикат, $M \subseteq \{1, 2, \ldots, l\}$ и $\overline{M} = \{1, 2, \ldots, l\} \setminus M$; пусть $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle = \langle M\rangle \vee \langle \overline{M}\rangle$ — транзитивное замыкание объединения с.о. э. $\langle M\rangle$ и $\langle\overline{M}\rangle$, являющееся, в силу предложения 2, также с. о. ц. $U(R)$ на C_R. Как следует из доказываемой ниже теоремы, конгруэнции вида $\langle R, \langle\!\langle M\rangle\!\rangle; \mathfrak{a}\rangle$ являются «каноническим» представлением для конгруэнций замкнутого класса k-значной логики.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый класс k-значной логики, $\varkappa \leqslant \varkappa_a$ — конгруэнция на $\mathfrak{a}$. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

I. *Найдется предикат R, $\mathfrak{a} \subseteq U(R)$, и множество $M \subseteq \{1, \ldots, l\}$ (l — арность R), так что $\varkappa = \langle R, \langle\!\langle M\rangle\!\rangle; \mathfrak{a}\rangle$.*

II. *Найдутся предикаты $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots$ $\mathfrak{a} \subseteq \subseteq U(R_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и множества M_i, $i = 1, 2, \ldots \ldots, M_i \subseteq \{1, 2, \ldots, l_i\}$ (l_i — местность R_i), так что*

$$\varkappa = \bigwedge_{i=1}^{\infty} \langle R_i, \langle\!\langle M_i\rangle\!\rangle; \mathfrak{a}\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим предикаты R_i, $i \geqslant 1$, арности $2 \cdot k^{k^i}$, построенные следующим образом. Пусть $\mathfrak{a}^i = \mathfrak{a} \bigcap P_k^i$ и $\varkappa^i = \varkappa \bigcap (\mathfrak{a}^i \times \mathfrak{a}^i)$, C_{R_i} содержит все элементы $\varkappa^i$, рассматриваемые как пары таблиц функций, а также i наборов длины $2 \cdot k^{k^i}$, соответствующие парам таблиц функций $(l_j^i(x_1, \ldots, x_i),\ l_j^i(x_1, \ldots, x_i))$ $j = 1, 2, \ldots, i$, $l_j^i(x_1, \ldots, x_i) = x_j$ (селектор). Так как $\varkappa$ конгруэнция и $\varkappa \leqslant \varkappa_{\mathfrak{a}}$, то $\mathfrak{a} \subseteq U(R_i)$. Положим $M_i = \{1, 2, \ldots, k^i\}$ и $\overline{M}_i = \{k^i + 1, \ldots, 2 \cdot k^i\}$. Конгруэнция $\langle R_i, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots$, обладает следующими свойствами:

1. $\langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle \bigcap (\mathfrak{a}^i \times \mathfrak{a}^i) = \varkappa \bigcap (\mathfrak{a}^i \times \mathfrak{a}^i)$;
2. $\varkappa \leqslant \langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle$.

Заметим, что, согласно [3], из $\varkappa \neq \varkappa_{\mathfrak{a}}$ следует, что при $p \neq q$ $l_p^i \not\equiv l_q^i\ (\varkappa)$. Поэтому при доказательстве 1 получим $\langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle \neq \omega$, если $\varkappa \neq \varkappa_{\mathfrak{a}}$. Далее, из выбора M_i и определения $\langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle$ следует, что если замкнутый класс $\mathfrak{a}$ содержит селекторы, то $\langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle\ \varkappa^i$, в противном случае $\langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle$ шире, чем $\varkappa^i$ за счет включения пар селекторов в C_R. Из сказанного выше и конструкции $\langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle \mathfrak{a} \rangle$ следует равенство 1. Остается заметить, что если $f \equiv g\ (\varkappa)$, то по $\langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle$ будут сравнимы значения f и g на наборах, соответствующих парам селекторов из C_R, и поэтому $f \equiv g\ (\langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle)$. Если для любых i, $i = 1, 2, \ldots, \varkappa \neq \langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle$, то из 1 и 2 следует $\varkappa = \bigwedge_{i=1}^{\infty} \langle R_i, \langle\!\langle M_i \rangle\!\rangle; \mathfrak{a} \rangle$. Теорема доказана.

Отметим, что доказанная теорема является некоторым усилением результата [4] (лемма 2).

Покажем на примере P_k, как можно использовать описанное выше представление конгруэнций замкнутого класса. Известно, что предикат арности l, удовлетворяющий условию $U(D) = P_k$, устроен следующим образом: найдется отношение эквивалентности E на $\{1, 2, \ldots, l\}$ так, что C_D принадлежат все $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l) \in E_k^l$, для которых из $i \equiv j\ (E)$ следует $\sigma_i = \sigma_j$, $i, j \in \{1, \ldots, l\}$. Пусть $M \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ и $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ — соответствующее с. о. э. на C_D. Возможны только два случая:

1) M ($\overline{M}$) — объединение классов эквивалентности отношения E;

2) Существует класс эквивалентности T отношения E, имеющий непустое пересечение как с M, так и с $\overline{M}$.

В случае 1) отношение E представлено в виде $E_1 \bigcup E_2$, $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$, E_1 и E_2 — отношения эквивалентности, при этом объединение классов эквивалентности E_1 есть M; аналогично, объединение классов эквивалентности E_2 есть $\overline{M}$. Поэтому транзитивное замыкание «M» $= \langle M \rangle \bigvee \bigvee \langle \overline{M} \rangle$ будет совпадать с тождественно-истинным отношением ω, и, следовательно, $\langle D, \langle\langle M \rangle\rangle; P_k \rangle = \varkappa_a$. Во втором случае для каждого класса эквивалентности T отношения E, имеющего непустое пересечение с M и $\overline{M}$, имеет место: если $\tilde{\alpha} \langle M \rangle \tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma} \langle \overline{M} \rangle \tilde{\nu}$, то для всех $i \in T$ $\alpha_i = \beta_i, \gamma_i = \nu_i$. Из построения предиката D следует, что транзитивное замыкание $\langle\langle M \rangle\rangle$ устроено так: $\tilde{\sigma} \langle\langle M \rangle\rangle \tilde{\delta}$ для любого класса эквивалентности T отношения E, $T \bigcap \bigcap M \neq \varnothing$ и $T \bigcap \overline{M} \neq \varnothing$ и для каждого $i \in T$ $\sigma_i = \delta_i$. В наборах из C_D на местах с номерами из T могут стоять любые элементы из E_k, поэтому для любого $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ можно подобрать матрицу $(\tilde{\sigma}, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$, $\tilde{\sigma}_i \in D$, у которой все строки с номерами из T будут равны $\tilde{\alpha}$. Следовательно, из $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$ $(\langle D, \langle\langle M \rangle\rangle; P_k \rangle)$ следует, в силу предыдущего, $f(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha})$, и поэтому в случае 2) $\langle D, \langle\langle M \rangle\rangle; P_k \rangle = \varkappa_0$. Остается заметить, что селекторы содержатся в P_k, и поэтому, если $\varkappa$ — конгруэнция на P_k, $\varkappa \not\leqslant \varkappa_a$, то $\varkappa = \varkappa_1$ [3]. Таким образом доказано

Следствие 1. *На P_k имеются только тривиальные конгруэнции* $\varkappa_0, \varkappa_a, \varkappa_1$.

Следующий пример связан с результатом [2] о тривиальности всех конгруэнций на замкнутых классах $P_k^{(t)}$ (клетках алгебры P_k), состоящих из всех функций k-значной логики, принимающих не более t различных значений ($t = 2, 3, \ldots, k-1$). Ниже этот результат будет получен с помощью предикатного описания конгруэнций.

Пусть $P_k^{(t)}$ — произвольная клетка и R — предикат арности l, $P_k \subseteq U(R)$ и $Q_k(l, t) \subseteq E_k^l$ — множество всех векторов длины l, содержащих не более t различных компонент. Основной интерес представляет для нас множество векторов $C(t) = C_R \bigcap Q_k(l, t)$. Пусть E произвольное отношение эквивалентности на $\{1, \ldots, l\}$ и $Q(l, t, E) = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in Q_k(l, t)$ и $i \equiv j(E) \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j\}$. Покажем, что для некоторого отношения эквивалентности E на $\{1, \ldots, l\}$ $C_R(t) = Q_k(l, t, E)$. Отметим, что возможно $C_R(t) = Q_k(l, t)$ (если E — равенство). Зададим на $\{1, \ldots, l\}$ отношение эквивалентности $E(R)$, $i \equiv \equiv j(E(R) \Leftrightarrow$ i-й и j-й столбцы матрицы предиката R

совпадают. Пусть $s = |C_R|$ и $f(x_1, \ldots, x_s) \in P_k^{(t)}$; тогда значение $f(x_1, \ldots, x_s)$ на матрице предиката R принадлежит $Q_k(l, t, E(R))$ и, следовательно, $C_R(t) = Q_k(l, t, E(R))$, поскольку любой элемент $Q_k(l, t, E(R))$ является значением подходящей функции из $P_k^{(t)}$ на матрице предиката R. Для произвольного $M \subset \{1, \ldots, l\}$ рассмотрим отношения $\langle M \rangle$ и $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ на предикате R арности l, $P_k^{(t)} \subseteq U(R)$. Значения любой функции $P_k^{(t)}$ на матрице R всегда принадлежат $C_R(t)$ и поэтому основной интерес представляет поведение $\langle M \rangle$ и $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ на $C_R(t) = Q_k(l, t, E(R))$. Нетрудно видеть, что также и при вычислении конгруэнций на P_k, следует рассматривать два случая:

1) M — объединение классов эквивалентности отношения $E(R)$;

2) для некоторого класса T отношения $E(R)$ $T \cap M \neq \varnothing$ и $T \cap \overline{M} \neq \varnothing$.

В первом случае отношение $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ совпадает с тождественно-истинным отношением ω на $C_R(t) = Q_k(l, t, E(R))$. Поэтому для любых $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{(t)}$ и произвольных $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n$ из C_R, $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$, $g(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) \in C_R(t) = Q_k(l, t, E(R))$ и $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n) \langle\!\langle M \rangle\!\rangle g(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n) (\langle R, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle; P_k^{(t)} \rangle)$ и $\varkappa_a = \langle R, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle; P_k^{(t)} \rangle$.

В случае 2) рассуждение полностью аналогично соответствующему при описании конгруэнций на P_k, поскольку на i-м месте произвольного набора из $Q_k(l, t, E(R))$ может стоять любой элемент из E_k. Как отмечалось выше, значения функций из $P_k^{(t)}$ на C_R всегда принадлежат $C_R(t) = Q_k(l, t, E(R))$, поэтому получим, что $\varkappa_0 = \langle R, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle; P_k^{(t)} \rangle$.

Произвольная конгруэнция $\varkappa \leqslant \varkappa_a$ на $P_k^{(t)}$ совпадает, таким образом, с $\varkappa_0$ либо с $\varkappa_a$. Следовательно, для конгруэнции $\varkappa \nleqslant \varkappa_a$ на $P_k^{(t)}$ либо $\varkappa = \varkappa_1$, либо $\varkappa \wedge \varkappa_a = \varkappa_0$. Поэтому при изучении конгруэнций $\varkappa \leqslant \varkappa_a$ на $P_k^{(t)}$ достаточно рассмотреть случай $\varkappa \wedge \varkappa_a = \varkappa_0$. Из $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) (\varkappa)$ следует, что для некоторых $U(x_1)$, $V(x_1, x_2)$ из $P_k^{(t)}$ $U(x_1) \equiv V(x_1, x_2) (\varkappa)$. В силу $\varkappa \wedge \varkappa_a = \varkappa_0$ получим, что $U(x_1) = V(x_1, a)$ для любого $a \in E_k$, поэтому $U(E_k) = V(E_k, E_k)$. Множеству пар функций $\{\{V(x_1), U(x_1, x_2)\}; V(x_1), U(x_1, x_2) \in P_k^{(t)}$ и $V(x_1) \equiv U(x_1, x_2) (\varkappa)\}$

сопоставим предикат $R(\varkappa)$ арности $k+k^2$, истинный на наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{k^2})$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ таблица значений $V(x_1)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_{k^2})$ таблица значений $U(x_1, x_2)$, причем $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{k^2}\}$ и $|\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}| \leqslant t$. Так как $\varkappa$ конгруэнция на $P_k^{(t)}$, получим $P_k^{(t)} \subseteq U(R(\varkappa))$. Нетрудно видеть, что $C_{R(\varkappa)} = C_{R(\varkappa)}(t)$ и поэтому $C_{R(\varkappa)} = Q_k(k^2+k, t, E(R(\varkappa)))$, как было показано выше. Это противоречит условию $\varkappa \wedge \varkappa_a = \varkappa_0$. Поэтому для конгруэнции $\varkappa \nleqslant \varkappa_a$ на $P_k^{(t)}$ получим $\varkappa = \varkappa_1$. Это завершает доказательство следующего

Следствие 2. *На любой клетке $P_k^{(t)}$, $t = 2, \ldots, k-1$, имеются только тривиальные конгруэнции $\varkappa_0, \varkappa_a$ и $\varkappa_1$.*

В заключение отметим, что при выборе множества M для построения конгруэнций вида $\langle R, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle, \mathfrak{a}\rangle$ можно ограничиться множествами вида $\{1, \ldots, p\}$, где $p = 1, 2, \ldots, l$ и l — арность предиката R. Объясняется это инвариантностью конгруэнций вида $\langle R, \langle\!\langle M \rangle\!\rangle; \mathfrak{a}\rangle$ относительно любых перестановок строк и столбцов матрицы предиката R.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило
19.01.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста.— Алгебра и логика, 1966, т. 5, № 2, с. 5—24.
[2] Мальцев И. А. Конгруэнции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста.— Алгебра и логика, 1972, т. 11, № 6, с. 666—672.
[3] Горлов В. В. О конгруэнции на замкнутых классах Поста.— Математические заметки, 1973, т. 13, № 5, с. 725—734.
[4] Горлов В. В. О замкнутых классах k-значной логики, все конгруэнции которых тривиальны.— Математические заметки, 1977, т. 22, № 4, с. 499—509.
[5] Горлов В. В. О конгруэнциях на замкнутых классах k-значной логики, определяемых предикатами. —Тезисы докладов VI всесоюзной конференции по математической логике. Тбилиси, 1982, с. 43—44.
[6] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, т. 51 с. 5—142.