С. Н. Попова, Е. Л. Тонков, Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1949–1957

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.977

С. Н. ПОПОВА, Е. Л. ТОНКОВ

УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА СОГЛАСОВАННЫХ СИСТЕМ. II

В этой статье, которая продолжает исследования, начатые в [1], дан аналог метода поворотов В. М. Миллионщикова [2, 3] для равномерно согласованных систем (теорема 4). На основе теоремы 4 получены утверждения о локальной управляемости показателями Ляпунова и центральными показателями, о достижимости центральных показателей и сформулирована теорема о множестве систем с интегральной разделенностью. Обозначения и определения из [1], необходимые для дальнейшего, используются без дополнительных комментариев.

6. Теорема о возмущениях матрицы Коши. Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\ y=C^*(t)x,\ (x,u,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^r. \qquad (1)$$

Систему (1) будем отождествлять с функцией $\sigma\colon \mathbf{R}\to M_{n,n+m+r}$, $\sigma(t)=(A(t),B(t),C(t))$; аргумент t, когда это не вызывает недоразумений, будем опускать. Далее предполагаем, что $\sigma(\cdot)$ удовлетворяет условиям:

а) функция $t\to|\sigma(t)|$ измерима по Лебегу и ограничена на $\mathbf{R}$;

б) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$\sup_t\int_t^{t+1}|\sigma_\tau(s)-\sigma(s)|\,ds<\varepsilon,$$

если $|\tau|<\delta$; здесь $\sigma_\tau(s)=\sigma(s+\tau)$ — сдвиг функции $\sigma(\cdot)$ на τ.

Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши системы

$$\dot{x}=A(t)x, \qquad (2)$$

а через $X_V(t,s)$ — матрицу Коши системы

$$\dot{x}=(A(t)+B(t)V(t)C^*(t))x. \qquad (3)$$

Для положительного ε введем в рассмотрение множество $\mathscr{U}_\varepsilon$ измеримых функций $U\colon\mathbf{R}\to M_{m,r}$, удовлетворяющих неравенству $\sup_t|U(t)|<\varepsilon$; сужение $\mathscr{U}_\varepsilon$ на отрезок $J\subset\mathbf{R}$ обозначим $\mathscr{U}_\varepsilon(J)$.

Лемма 3. *Предположим, что система $\sigma=(A,B,C)$ ϑ-равномерно согласованна. Тогда существует $\varkappa_0>0$ такое, что всяким $\varkappa\in[0,\varkappa_0]$ и $\varepsilon>0$ отвечает $\delta=\delta(\varkappa,\varepsilon)>0$, обеспечивающее следующее свойство: для любой функции $V(\cdot)\in\mathscr{U}_\varkappa$ (такой, что система $(A+BVC^*,B,C)$ удовлетворяет условиям а), б)), любой матрицы $H\in B_\delta(0)\subset M_n$ и любого $\tau\in\mathbf{R}$ существует функция $U(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$ такая, что краевая задача*

$$\dot{Z}=(A(t)+B(t)V(t)C^*(t))Z+B(t)UC^*(t)X_V(t,\tau)+B(t)UC^*(t)Z, \qquad (4)$$

$$Z(\tau)=0,\ Z(\tau+\vartheta)=H \qquad (5)$$

при $U=U(t)$ разрешима относительно $Z(\cdot)$.

Доказательство. Из [1, следствие 5] следует: найдется $\varkappa_0 > 0$, что для любого $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ существует $\alpha_1 = \alpha_1(\varkappa) > 0$, обеспечивающее свойство: каждому $\alpha \in [0, \alpha_1]$ отвечает $\beta = \beta(\alpha, \varkappa)$ такое, что для любого $\tau \in \mathbf{R}$, любой матрицы $H \in M_n$ и любых функций $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa$ и $Z(\cdot) \in C([\tau, \tau+\vartheta], B_\alpha(0))$ уравнение

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} X_V(\tau+\vartheta, t) B(t) U(t) C^*(t) (X_V(t, \tau) + Z(t)) dt = H \tag{6}$$

разрешимо относительно $U(\cdot) \in L_\infty([\tau, \tau+\vartheta], M_{m,r})$, причем $|U(t)| \leqslant \beta |H|$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta$.

Зафиксируем произвольные $\tau \in \mathbf{R}$, $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$, $\alpha \in (0, \alpha_1(\varkappa))$, $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa([\tau, \tau+\vartheta], M_{m,r})$ и для выбранных $\varkappa$ и α найдем $\beta = \beta(\alpha, \varkappa)$. Пусть $Z(\cdot) \in C([\tau, \tau+\vartheta], B_\alpha(0))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $H \in B_\delta(0) \subset M_n$ (выбор $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, \varkappa)$ уточним ниже, $\delta \leqslant \varepsilon/\beta(\alpha, \varkappa)$). Построим управление

$$U_Z(t, s) = \begin{cases} U(s), & s \in [\tau, t], \\ 0, & s \in (t, \tau+\vartheta], \end{cases}$$

где $U(\cdot) \in L_\infty([\tau, \tau+\vartheta], M_{m,r})$ — функция, обеспечивающая равенство (6) для выбранной $Z(\cdot)$. Отметим, что $|U(t)| \leqslant \varepsilon$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta$.

Рассмотрим оператор F, определенный равенством

$$(FZ)(t) = \int_\tau^{\tau+\vartheta} X_V(t, s) B(s) U_Z(t, s) C^*(s) (X_V(s, \tau) + Z(s)) ds,$$

$t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Выберем ε_0 таким, что выполнены неравенства

$$\varepsilon_0 < 1/(\vartheta k(\varkappa)\alpha), \quad \vartheta k^2(\varkappa) d\varepsilon_0 / (1 - \vartheta k(\varkappa) d\varepsilon_0) \leqslant \alpha_1,$$

где $k(\varkappa) \geqslant |X_V(t, s)|$, $d \geqslant |B(t)||C^*(t)|$, $t, s \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оператор F переводит множество $C([\tau, \tau+\vartheta], B_\alpha(0))$ в себя при любом α, удовлетворяющем неравенствам $\vartheta k^2(\varkappa) d\varepsilon / (1 - \vartheta k(\varkappa) d\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Действительно, $|(FZ)(t)| \leqslant \vartheta k(\varkappa) d\varepsilon_0 (k(\varkappa) + \alpha) \leqslant \alpha$. Так как оператор F вполне непрерывен как оператор, действующий из $C([\tau, \tau+\vartheta], M_n)$ в себя [4, с. 43], то в силу принципа Шаудера F имеет неподвижную точку $\hat{Z}(\cdot)$. Поскольку

$$\hat{Z}(t) = \int_\tau^t X_V(t, s) B(s) \hat{U}(s) C^*(s) (X_V(s, \tau) + \hat{Z}(s)) ds,$$

где функция $\hat{U}(\cdot)$ — решение (6) при $Z = \hat{Z}(\cdot)$, то $\hat{Z}(\cdot)$ — решение задачи (4), (5) при $U = \hat{U}(\cdot)$, кроме того, $|\hat{U}(t)| \leqslant \beta |H| \leqslant \beta\delta \leqslant \varepsilon$.

Теорема 4. *Если система (A, B, C) равномерно согласованна, то существуют $\varkappa_0 > 0$ и $\vartheta_0 > 0$ такие, что всяким $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$ и $\varepsilon > 0$ отвечает $\eta = \eta(\varkappa, \varepsilon) > 0$, обеспечивающее следующее свойство: для любой функции $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa$ (такой, что система $(A + BVC^*, B, C)$ удовлетворяет условиям а), б)), любой матрицы $H \in B_\eta(I) \subset M_n$, любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и любого $\tau \in \mathbf{R}$ найдется функция $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ такая, что для матрицы Коши $X_{U+V}(t, s)$ системы*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)(U(t) + V(t)) C^*(t)) x \tag{7}$$

справедливо равенство $X_{U+V}(\tau+\vartheta, \tau) = H X_V(\tau+\vartheta, \tau)$.

Следствие 7. *Если система (A, B, C) равномерно согласованна, то существует $\vartheta_0 > 0$ такое, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает $\eta > 0$, обеспечивающее свойство: для любой матрицы $H \in B_\eta(I) \subset M_n$, любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и любого $\tau \in \mathbf{R}$ найдется функция $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ такая, что для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t) U(t) C^*(t)) x \tag{8}$$

справедливо равенство $X_U(\tau+\vartheta, \tau) = H X(\tau+\vartheta, \tau)$.

Замечание 5. Теорема 4 позволяет перенести метод поворотов В. М. Миллионщикова на равномерно согласованные системы. Отметим, что метод поворотов существенно опирается на следующее утверждение (см. [5, с. 90—91, лемма 2]): для любого решения $x(\cdot)$ системы (2) и любого вектора $d \in \mathbf{R}^n$, такого, что $|d| = |x(\tau+1)|$, $\measuredangle(d, x(\tau+1)) = \varepsilon < \pi/2$ существует матрица поворота $P_\varepsilon(\cdot)$ такая, что вектор $z(t) = P_\varepsilon(t)x(t)$, $z(\tau) = x(\tau)$ удовлетворяет равенству $x(\tau+1) = d$ и на промежутке $(\tau, \tau+1)$ является решением системы

$$\dot{z} = (A(t) + Q(t))z, \tag{9}$$

при этом $\sup\limits_{t \in (\tau, \tau+1)} |Q(t)| \leqslant (2a+1)\varepsilon$, где $a = \sup\limits_t |A(t)|$. Систему (9) называют возмущенной по отношению к системе (2) и говорят, что к системе (2) применен поворот $P_\varepsilon(t)$ на отрезке $[\tau, \tau+1]$. Здесь необходимо отметить, что метод поворотов используется для изучения асимптотических свойств решений системы (2), при этом важен результат поворота, а не то, как ведут себя решения возмущенной системы на отрезке, на котором производится поворот. Поэтому можно считать, что к системе (2) применен поворот $P_\varepsilon(\tau+1)$ в момент $\tau+1$. Итак, одно из свойств, на которых основан метод поворотов, состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любому $\tau \in \mathbf{R}$ и любой матрице $H \in B_\delta(I) \subset M_n$ отвечает функция Q: $[\tau, \tau+1] \to B_\varepsilon(0) \subset M_n$, обеспечивающая для матрицы Коши $Z(t, s)$ системы (9) равенство $Z(\tau+1, \tau) = HX(\tau+1, \tau)$. Очевидно, что следствие теоремы 4 обеспечивает для системы (A, B, C) аналогичное свойство. С другой стороны, легко проверить, что система (A, I, I) является ϑ-равномерно согласованной при любом $\vartheta > 0$, поэтому из следствия теоремы 4 для системы (A, I, I) (т. е. для системы (2)) вытекает требуемое свойство.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что $\vartheta_0 > 0$ — число, обеспечивающее ϑ_0-равномерную согласованность системы (A, B, C). Выберем любые $\tau \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$ ($\varkappa_0$ — из леммы 3). Пусть $V(\cdot) \in \mathcal{U}_\varkappa$. Из леммы 3 следует существование $\beta = \beta(\varkappa, \varepsilon)$ такого, что при всех $H \in M_n$, удовлетворяющих условию

$$|HX_V(\tau+\vartheta_0, \tau) - X_V(\tau+\vartheta_0, \tau)| < \beta, \tag{10}$$

краевая задача

$$\begin{gathered} \dot{Z}_0 = (A(t) + B(t)V(t)C^*(t))Z_0 + \\ + B(t)U(t)C^*(t)X_V(t, \tau) + B(t)U(t)C^*(t)Z_0, \\ Z_0(\tau) = 0, \ Z_0(\tau+\vartheta_0) = HX_V(\tau+\vartheta_0, \tau) - X_V(\tau+\vartheta_0, \tau) \end{gathered} \tag{11}$$

разрешима относительно $Z_0(\cdot)$ при некоторой функции $U(\cdot) \in \mathcal{U}_\varepsilon([\tau, \tau+\vartheta_0])$.

Положим $\eta(\varkappa, \varepsilon) = \beta(\varkappa, \varepsilon)k^{-1}(\varkappa)$. Очевидно, что если $H \in B_\eta(I)$, то справедливо неравенство (10). Рассмотрим функцию $t \to Z(t) \in M_n$, определенную на $[\tau, \tau+\vartheta_0]$ равенством $Z(t) = X_V(t, \tau) + Z_0(t)$. Нетрудно проверить, что $Z(\cdot)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{Z} = (A(t) + B(t)(U(t) + V(t))C^*(t))Z$$

и условию $Z(\tau) = I$. В силу теоремы существования и единственности на $[\tau, \tau+\vartheta_0]$ выполнено равенство $Z(t) = X_{U+V}(t, \tau)$. Из (11) следует справедливость соотношения $X_{U+V}(\tau+\vartheta_0, \tau) = HX_V(\tau+\vartheta_0, \tau)$.

Далее, для любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ положим $U(t) \equiv 0$ при $t \in [\tau, \tau+\vartheta-\vartheta_0)$, а на отрезке $[\tau+\vartheta-\vartheta_0, \tau+\vartheta]$ построим $U(\cdot)$, как было описано. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\begin{gathered} X_{U+V}(\tau+\vartheta, \tau) = X_{U+V}(\tau+\vartheta, \tau+\vartheta-\vartheta_0) X_{U+V}(\tau+\vartheta-\vartheta_0, \tau) = \\ = HX_V(\tau+\vartheta, \tau+\vartheta-\vartheta_0) X_V(\tau+\vartheta-\vartheta_0, \tau) = HX_V(\tau+\vartheta, \tau). \end{gathered}$$

7. Локальная управляемость показателями Ляпунова. Пусть $\lambda_1(A) \geqslant \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (2) [6, с. 170]. Величину $\lambda_j(A)$ будем называть j-м показателем системы (2), $\lambda_1(A)$ — старшим показателем этой системы.

Определение 4. Система (A, B, C) обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякому $\mu = \mathrm{col}\,(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in B_\delta^n(0)$ отвечает функция $U \in \mathscr{U}_\varepsilon$ такая, что для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ существует единственное $j \in \{1, \ldots, n\}$, обеспечивающее равенство $\lambda_k(A + BUC^*) = \lambda_j(A) + \mu_j$, где $\lambda_k(A + BUC^*)$ — k-й показатель системы (8).

Определение 5. Система (2) называется диагонализируемой, если существует такое преобразование Ляпунова

$$x = L(t) z, \tag{12}$$

что система

$$\dot{z} = P(t) z, \tag{13}$$

где

$$P(t) = L^{-1}(t) A(t) L(t) - L^{-1}(t) \dot{L}(t), \tag{14}$$

диагональная.

Теорема 5. *Если система (2) диагонализируема, а (A, B, C) равномерно согласованна, то система (A, B, C) обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова.*

Доказательство. Предположим, что число $\vartheta > 0$ обеспечивает ϑ-равномерную согласованность системы (A, B, C).

Пусть (12) — преобразование Ляпунова, приводящее (2) к диагональной системе (13), причем $P(t) = \mathrm{diag}\,(p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Так как ляпуновское преобразование не меняет полного спектра системы, то без ограничения общности можно считать, что

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(P) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \int_0^t p_k(s)\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Преобразование (12) переводит систему (A, B, C) в систему

$$\dot{z} = P(t) z + D(t) u, \quad y = F^*(t) z,$$

где $P(\cdot)$ определяется равенством (14), $D(t) = L^{-1}(t) B(t)$, $F(t) = = L^*(t) C(t)$. Так как система (A, B, C) ϑ-равномерно согласованна, то и система (P, D, F) является ϑ-равномерно согласованной [1, следствие 4 теоремы 2]. Матрица Коши $Z(t, s)$ системы (13) имеет вид $Z(t, s) = \mathrm{diag}\,(\exp \int_s^t p_1(\tau)\, d\tau, \ldots, \exp \int_s^t p_n(\tau)\, d\tau)$.

Применим следствие 7 к системе (13). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему определим $\eta = \eta(\varepsilon)$. Возьмем $H = \mathrm{diag}\,(\exp(\vartheta\mu_1), \ldots \ldots, \exp(\vartheta\mu_n))$, где числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ таковы, что $|H - I| < \eta$. Для выбранной матрицы H найдется функция $U(\cdot) \in \mathscr{U}_\varepsilon$ такая, что матрица Коши $Z_U(t, s)$ системы

$$\dot{z} = (P(t) + D(t) U(t) F^*(t)) z \tag{15}$$

удовлетворяет при всех $k = 0, 1, \ldots$ равенствам

$$Z_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = HZ((k+1)\vartheta, k\vartheta).$$

Следовательно,

$$Z_U(k\vartheta, 0) = Z_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) Z_U((k-1)\vartheta, (k-2)\vartheta) \cdots Z_U(\vartheta, 0) =$$
$$= HZ(k\vartheta, (k-1)\vartheta) HZ((k-1)\vartheta, (k-2)\vartheta) \cdots HZ(\vartheta, 0) =$$

$$= \operatorname{diag}\,(\exp\,(\int\limits_0^{k\vartheta} p_1(\tau)\,d\tau + k\vartheta\mu_1),\ \dots,\ \exp\,(\int\limits_0^{k\vartheta} p_n(\tau)\,d\tau + k\vartheta\mu_n)).$$

Обозначим через $z^{(j)}(t)$ j-й столбец матрицы $Z_U(t, 0)$, $j = 1, \dots, n$.

Покажем, что фундаментальная система решений $Z_U(t, 0)$ является нормальной (в смысле Ляпунова) [6, с. 139]. Предположим, что это не так. Тогда существует такая постоянная нижняя треугольная $(n \times n)$-матрица $G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $g_{ij} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i < j$, что $Z_U(t, 0)\, G = (z_G^{(1)}(t), \dots, z_G^{(n)}(t))$ является нормальной фундаментальной матрицей системы (15). Матрица $Z_U(k\vartheta, 0)\, G$ имеет вид

$$\{Z_U(k\vartheta, 0)\, G\}_{ij} = \begin{cases} \exp(\int\limits_0^{k\vartheta} p_j(\tau)\,d\tau + k\vartheta\mu_j), & i = j, \\ 0, & i < j, \\ g_{ij} \exp(\int\limits_0^{k\vartheta} p_i(\tau)\,d\tau + k\vartheta\mu_i), & i > j. \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{Z}_G(t) = (\hat{z}_G^{(1)}(t), \dots, \hat{z}_G^{(n)}(t)) \in M_n$ и $\hat{Z}(t) = (\hat{z}^{(1)}(t), \dots$ $\dots, \hat{z}^{(n)}(t)) \in M_n$ кусочно-постоянные функции, определенные на $[0, +\infty) \doteq \mathbf{R}_+$ равенствами: $\hat{Z}_G(t) = Z_U(k\vartheta, 0)\, G$ при $t \in [k\vartheta, (k+1)\vartheta)$; $\hat{Z}(t) = Z_U(k\vartheta, 0)$ при $t \in [k\vartheta, (k+1)\vartheta)$, $k = 0, 1, \dots$ Известно [7, с. 25], что характеристические показатели столбцов матрицы $\hat{Z}_G(t)$ совпадают с характеристическими показателями решений, входящих в фундаментальную систему $Z_U(t, 0)\, G$, и это же верно для $\hat{Z}(t)$ и $Z_U(t, 0)$. Очевидно, что $\chi[\hat{z}_G^{(j)}] \geqslant \chi[\hat{z}^{(j)}]$, а потому и $\chi[z_G^{(j)}] = \chi[z^{(j)}]$ для всех $j = 1, \dots, n$ (символом $\chi[f]$ здесь обозначен характеристический показатель Ляпунова функции $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$). Последнее означает, что сумма показателей решений, входящих в фундаментальную систему $Z_U(t, 0)$, не больше суммы показателей решений, входящих в $Z_U(t, 0)\, G$. Следовательно, фундаментальная система $Z_U(t, 0)$ является нормальной (в смысле Ляпунова).

Очевидно, что $\chi[\hat{z}^{(j)}] = \lambda_j(P) + \mu_j$, поэтому $\chi[z^{(j)}] = \lambda_j(P) + \mu_j$, $j = 1, \dots, n$, т. е. полный спектр системы (15) состоит из чисел $\lambda_1(P) + \mu_1, \dots, \lambda_n(P) + \mu_n$. К системе (15) применим преобразование (12), в итоге получим систему (8). Ее полный спектр будет тем же, что и у системы (15), поэтому для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ существует единственное $j \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\lambda_k(A + BUC^*) = \lambda_j(A) + \mu_j$.

8. Локальная управляемость и достижимость центральных показателей. Напомним [8, с. 116], что верхним центральным показателем системы (2) называется величина

$$\Omega(A) = \inf_{T > 0} \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln |X(jT, (j-1)T)|,$$

нижним центральным показателем — величина

$$\omega(A) = \sup_{T > 0} \underline{\lim_{k \to \infty}} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln |X((j-1)T, jT)|^{-1}.$$

Центральные показатели системы (2) служат для оценки показателей Ляпунова всех нетривиальных решений системы $\dot{z} = A(t) z + \psi(z, t)$, $|\psi(z, t)| \leqslant \delta |z|$ при малом δ [8, с. 164].

Определение 6. Система (A, B, C) обладает свойством локальной управляемости верхним центральным показателем, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\mu \in \mathbf{R}$, $|\mu| < \delta$ существует функция $U(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$, обеспечивающая равенство $\Omega(A+BUC^*)=\Omega(A)+\mu$; здесь $\Omega(A+BUC^*)$ — верхний центральный показатель системы (8).

Аналогично вводится понятие локальной управляемости нижним центральным показателем.

Теорема 6. *Если система (A, B, C) равномерно согласованна, то она обладает свойством локальной управляемости верхним центральным показателем.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и в соответствии со следствием 7 найдем $\eta=\eta(\varepsilon)$. Возьмем любое скалярное $\mu\in(-(1/\vartheta)\ln(1+\eta), (1/\vartheta)\ln(1+\eta))$, здесь $\vartheta>0$ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную согласованность системы (A, B, C). Из следствия 7 вытекает, что найдется такая функция $U(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$, что матрица Коши $X_U(t, s)$ системы (8) для каждого натурального l удовлетворяет равенствам

$$X_U(l\vartheta, (l-1)\vartheta)=\exp(\mu\vartheta)X(l\vartheta, (l-1)\vartheta).$$

Известно [8, с. 116], что верхний центральный показатель любой системы

$$\dot z=Q(t)z \qquad (16)$$

из пространства систем вида (2) совпадает с величиной

$$\lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kT}\sum_{j=1}^{k}\ln|Z(jT, (j-1)T)|,$$

где $Z(t, s)$ — матрица Коши системы (16), поэтому для вычисления верхнего центрального показателя системы (16) достаточно выбрать любую последовательность $\{T_l\}_{l=1}^{\infty}$, $T_l\to+\infty$ при $l\to\infty$, и

$$\Omega(Q)=\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kT_l}\sum_{j=1}^{k}\ln|Z(jT_l, (j-1)T_l)|.$$

Выберем в качестве последовательности $\{T_l\}$, на которой будем вычислять центральные показатели, последовательность $T_l=l\vartheta$, $l=1, 2, \ldots$ Тогда

$$\Omega(A+BUC^*)=\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kl\vartheta}\sum_{j=1}^{k}\ln|X_U(jl\vartheta, (j-1)l\vartheta)|=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kl\vartheta}\sum_{j=1}^{k}\ln|X_U(jl\vartheta, (jl-1)\vartheta)\times$$

$$\times X_U((jl-1)\vartheta, (jl-2)\vartheta)\cdots X_U(((j-1)l+1)\vartheta, (j-1)l\vartheta)|=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kl\vartheta}\sum_{j=1}^{k}\ln|\exp(\mu\vartheta)X(jl\vartheta, (jl-1)\vartheta)\cdots$$

$$\cdots\exp(\mu\vartheta)X(((j-1)l+1)\vartheta, (j-1)l\vartheta)|=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kl\vartheta}\sum_{j=1}^{k}\ln|\exp(l\mu\vartheta)X(jl\vartheta, (j-1)l\vartheta)|=\Omega(A)+\mu.$$

Аналогично доказывается локальная управляемость нижним центральным показателем.

Определение 7. Система (A, B, C) обладает свойством достижимости центральных показателей, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие функции $U_1(\cdot)\in\mathcal{U}_\varepsilon$, $U_2(\cdot)\in\mathcal{U}_\varepsilon$, что у системы

$$\dot{z}=(A(t)+B(t)U_1(t)C^*(t))z \tag{17}$$

найдется решение с характеристическим показателем, большим $\Omega(A)-\varepsilon$, а у системы

$$\dot{z}=(A(t)+B(t)U_2(t)C^*(t))z \tag{18}$$

найдется нетривиальное решение с характеристическим показателем, меньшим $\omega(A)+\varepsilon$.

Замечание 6. Определение достижимости центральных показателей системы (2) было дано в [8] Р. Э. Виноградом в такой формулировке: центральные показатели системы (2) называются достижимыми, если для любого $\varepsilon>0$ существуют функции $Q_1\colon \mathbf{R}\to B_\varepsilon(0)\subset M_n$ и $Q_2\colon \mathbf{R}\to B_\varepsilon(0)\subset M_n$ такие, что старший показатель $\lambda_1(A+Q_1)$ системы

$$\dot{z}=(A(t)+Q_1(t))z$$

удовлетворяет неравенству $\lambda_1(A+Q_1)\geqslant\Omega(A)-\varepsilon$, а младший показатель $\lambda_n(A+Q_2)$ системы

$$\dot{z}=(A(t)+Q_2(t))z$$

— неравенству $\lambda_n(A+Q_2)\leqslant\omega(A)+\varepsilon$. Вопрос о достижимости центральных показателей (в формулировке Р. Э. Винограда) был решен В. М. Миллионщиковым в [2].

Теорема 7. *Если система (A, B, C) равномерно согласованна, то она обладает свойством достижимости центральных показателей.*

Замечание 7. Очевидно, что центральные показатели системы (2) достижимы тогда и только тогда, когда система (A, I, I) обладает свойством достижимости центральных показателей. Так как система (A, I, I) равномерно согласованна (см. замечание 5), то теорема 4 является, в некотором смысле, обобщением теоремы В. М. Миллионщикова о достижимости центральных показателей, доказанной в [2].

Доказательство теоремы 7. Пусть ϑ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную согласованность системы (A, B, C). Обозначим $\vartheta_0=\max\{1,\vartheta\}$, тогда система (A, B, C) ϑ_0-равномерно согласованна. Из следствия 7 вытекает существование такого $\eta(\varepsilon)>0$, что для любой матрицы $H\in B_\eta(I)$, любого $\vartheta_1\geqslant\vartheta_0$ и любого $\tau\in\mathbf{R}$ найдется функция $U(\cdot)\in\mathcal{U}_\varepsilon([\tau,\tau+\vartheta_1])$, обеспечивающая для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (8) равенство

$$X_U(\tau+\vartheta_1,\tau)=HX(\tau+\vartheta_1,\tau). \tag{19}$$

Обозначим $\eta_1(\varepsilon)=\eta(\varepsilon)/\vartheta_0$. Так как $\eta_1\leqslant\eta$, то для любой матрицы $H\in B_{\eta_1}(I)$, любого $\vartheta_1\geqslant\vartheta_0$ и любого $\tau\in\mathbf{R}$ найдется функция $U(\cdot)\in\in\mathcal{U}_\varepsilon([\tau,\tau+\vartheta_1])$, обеспечивающая равенство (19). В силу того что функция $\varepsilon\to\eta_1(\varepsilon)$ монотонно убывает и $\eta_1(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$, найдется такое $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$, что $\eta_1(\varepsilon_1)\leqslant\varepsilon$. Зафиксируем $\vartheta_1\geqslant\vartheta_0$ такое, что $\exp((1/2)\eta_1\vartheta_1)\sin^2\eta_1\geqslant1$. Применяя метод доказательства достижимости центральных показателей (В. М. Миллионщиков [2]), получим, что существуют такие функции $U_1(\cdot)\in\mathcal{U}_{\varepsilon_1}\subset\mathcal{U}_\varepsilon$, $U_2(\cdot)\in\mathcal{U}_{\varepsilon_1}\subset\mathcal{U}_\varepsilon$, что старший показатель $\lambda_1(A+BU_1C^*)$ системы (17) удовлетворяет неравенству $\lambda_1(A+BU_1C^*)>\Omega(A)-\eta_1$, а младший показатель $\lambda_n(A+BU_2C^*)$ системы (18) — неравенству $\lambda_n(A+BU_2C^*)<\omega(A)+\eta_1$. Но $\eta_1(\varepsilon_1)\leqslant\varepsilon$, поэтому $\lambda_1(A+BU_1C^*)>\Omega(A)-\varepsilon$, $\lambda_n(A+BU_2C^*)<\omega(A)+\varepsilon$.

9. Устойчивость и локальная управляемость показателями Ляпунова. Напомним некоторые определения, относящиеся к теории характеристических показателей Ляпунова.

Определение 8 (см., например, [5, с. 72]). Показатели Ляпунова системы (2) называются устойчивыми, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любой функции $Q\colon \mathbf{R}\to B_\delta(0)\subset M_n$

показатели Ляпунова системы (9) удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j(A)-$ $-\lambda_j(A+Q)|<\varepsilon$, $j=1, \dots, n$.

Определение 9 [9]. Система (2) называется системой с интегральной разделенностью, если она имеет фундаментальную систему решений $x^{(1)}(\cdot)$, $x^{(2)}(\cdot), \dots, x^{(n)}(\cdot)$, для которой выполнено свойство: существуют такие постоянные числа $c>0$ и $d>0$, что для каждого $i\in\{1, \dots, n\}$ и всех $t\geqslant s\geqslant 0$

$$|x^{(i)}(t)|/|x^{(i)}(s)|\geqslant d\exp(c(t-s))|x^{(i+1)}(t)|/|x^{(i+1)}(s)|.$$

Известно [3], что множество систем с интегральной разделенностью совпадает с открытым ядром множества систем с устойчивыми показателями. Отметим, что в [3] рассматривается пространство $\mathfrak{A}_n^0$ систем вида (2) с ограниченными и кусочно-непрерывными $A(\cdot)$ и метрикой

$$\rho(A, \widehat{A})=\sup_t |A(t)-\widehat{A}(t)|. \tag{20}$$

Несложно убедиться, что утверждения работ [8] и [10] сохраняются для пространства $\mathfrak{A}_n$ систем вида (2) с измеримыми по Лебегу, ограниченными на $\mathbf{R}$ функциями $A(\cdot)$, удовлетворяющими условию: для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $\sup\limits_t \int\limits_t^{t+1} |A(s)-A_\tau(s)|ds<\varepsilon$ при $|\tau|<\delta$ (метрика в $\mathfrak{A}_n$ определяется равенством (20)).

Теорема 8. *Если показатели системы (2) устойчивы, то равномерно согласованная система (A, B, C) обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова.*

Теорема 9. *Предположим, что система (A, B, C) равномерно согласованна. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует функция $U(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$ такая, что система (8) является системой с интегральной разделенностью.*

Замечание 8. Теорема 9 является, в некотором смысле, обобщением известной теоремы В. М. Миллионщикова о том, что системы с интегральной разделенностью всюду плотны в пространстве $\mathfrak{A}_n^0$ [10]. Доказательство теоремы 9 будет приведено в следующей статье цикла.

Доказательство теоремы 8. Из теорем 4 и 5 легко получить следующее утверждение: для любых $\varepsilon>0$ и $\varkappa\in(0, \varkappa_0)$ существует $\eta=\eta(\varkappa, \varepsilon)>0$ такое, что для всякой диагонализируемой системы (3), удовлетворяющей включению $V(\cdot)\in\mathscr{U}_\varkappa$, и любого вектора $\mu=\operatorname{col}(\mu_1, \dots, \mu_n)\in\mathbf{R}^n$, такого, что $|\lambda_j(A+BVC^*)-\mu_j|<\eta$, $j=1, \dots, n$, найдется $U(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$, обеспечивающая равенства

$$\lambda_j(A+B(U+V)C^*)=\mu_j,\ j=1, \dots, n. \tag{21}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и $\varkappa=\varkappa_0/2$, найдем соответствующее $\eta=$ $=\eta(\varepsilon, \varkappa)$. Обозначим $\delta=0{,}5\min\{\varepsilon, \varkappa, \eta\}$. Из теоремы 6 следует, что существует функция $V(\cdot)\in\mathscr{U}_\delta$ такая, что система (3) является системой с интегральной разделенностью. С другой стороны, так как показатели системы (2) устойчивы, справедливы неравенства

$$|\lambda_j(A)-\lambda_j(A+BVC^*)|<\delta,\ j=1, \dots, n.$$

Для выбранной функции $V(\cdot)$ и произвольного вектора $\mu\in\mathbf{R}^n$ такого, что $|\lambda_j(A+BVC^*)-\mu_j|<\delta$ $(j=1, \dots, n)$ найдем функцию $U(\cdot)\in\mathscr{U}_{\varepsilon/2}$, обеспечивающую равенства (21). Рассмотрим величины $|\lambda_j(A)-\mu_j|$:

$$|\lambda_j(A)-\mu_j|\leqslant|\lambda_j(A)-\lambda_j(A+BVC^*)|+|\lambda_j(A+BVC^*)-\mu_j|<2\delta.$$

Кроме того,

$$|U(t)+V(t)|\leqslant|U(t)|+|V(t)|<\varepsilon/2+\delta\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,\ t\in\mathbf{R}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого вектора $\mu\in\mathbf{R}^n$, $|\lambda_j(A)-\mu_j|<2\delta$ $(j=1, \dots, n)$ существует функция $\hat{U}(t)=U(t)+V(t)$, $\hat{U}(\cdot)\in\mathscr{U}_\varepsilon$, обеспечивающая равенства

$$\lambda_j(A+B\hat{U}C^*)=\mu_j,\ j=1,\ldots,n,$$

т. е. (A, B, C) обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова.

Литература

1. Попова С. Н., Тонков Е. Л. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1687—1696.
2. Миллионщиков В. М. // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99—104.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775—1784.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
5. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71—147.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. Попова С. Н. // Вестн. Удмур. ун-та. 1992. Вып. 1. С. 23—39.
8. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
9. Былов Б. Ф. // Мат. сб. 1965. Т. 67 (109), вып. 3. С. 338—344.
10. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1167—1170.

Удмуртский государственный университет

Поступила в редакцию 12 октября 1993 г.