Известия вузов. Математика
2016, №5, с. 22–40

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.С. ЕРЯШКИН

ИНВАРИАНТЫ И КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ H-ПОЛУПЕРВИЧНЫХ H-МОДУЛЬНЫХ АЛГЕБР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ПОЛИНОМИАЛЬНОМУ ТОЖДЕСТВУ

Аннотация. Рассматривается действие конечномерной алгебры Хопфа на PI-алгебре. Доказано, что H-полупервичная H-модульная алгебра A имеет фробениусово артиново классическое кольцо частных Q, если алгебра A имеет конечное число H-первичных идеалов с нулевым пересечением. Кольцо частных Q является H-полупростой H-модульной алгеброй и конечно порожденным модулем над подалгеброй центральных инвариантов. Более того, если алгебра A является проективным модулем постоянного ранга над своим центром, то алгебра A цела над своей подалгеброй центральных инвариантов.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, теория инвариантов, PI-алгебры, кольца частных.

УДК: 512.667

Введение

В этой работе исследуются подалгебры инвариантных элементов H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству (PI-алгебр).

Все рассматриваемые алгебры и алгебры Хопфа, если не оговорено противное, определены над полем $\mathbf{k}$. Алгебры предполагаются ассоциативными с единицей. Через $\Delta : H \to H \otimes H$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon : H \to \mathbf{k}$ — коединицу алгебры Хопфа H. Далее всюду H — алгебра Хопфа и A — ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра. Все необходимые факты, касающиеся алгебр Хопфа, можно найти в [1]. Все тензорные произведения, если не оговорено противное, берутся над $\mathbf{k}$, а Hom — это $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}$.

Напомним, что *H-модульной алгеброй* называется ассоциативная алгебра A, которая наделена структурой левого H-модуля и для любых $h \in H$, $a, b \in A$

$$h \cdot (ab) = \sum_h (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b), \quad h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A.$$

Элемент $a \in A$ называется *инвариантом*, если $h \cdot a = \varepsilon(h)a$ для всех $h \in H$. Непосредственная проверка показывает, что множество инвариантов A^H является подалгеброй в A.

Пусть R — некоторое кольцо, через $Z(R)$ будем обозначать центр кольца R.

Поступила 30.09.2014

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №14-01-31200, гранта Президента РФ для поддержки научных школ, проект НШ-941.2014.1 и за счет средст субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект №1.2045.2014.

Пусть A — H-модульная алгебра. Элементы из $Z(A)\cap A^H$ будем называть *центральными инвариантами*. Множество центральных инвариантов является подалгеброй в A, будем обозначать ее через $Z(A)^H$. Алгебра A называется *H-первичной*, если для любых ненулевых H-инвариантных идеалов I, J идеал IJ также ненулевой.

Пусть R — коммутативное кольцо, P — простой идеал кольца R, а M — конечно порожденный проективный R-модуль. Тогда по ([2], с. 158, теорема 1) модуль M_P является свободным модулем над локальным кольцом. Обозначим через $\mathrm{rk}_P M$ его ранг. Если $\mathrm{rk}_P M$ не зависит от P, то модуль M называется проективным модулем *постоянного ранга*.

Хорошо известно, что понятие действия алгебры Хопфа обобщает действия групп автоморфизмами ([1], с. 139), а значит, имеет смысл рассмотреть задачу переноса ряда фактов классической теории инвариантов на случай действия алгебр Хопфа. Классическим результатом теории инвариантов, принадлежащим Э. Нётер, является факт о том, что алгебра A является целым расширением подалгебры инвариантов A^G алгебры в случае действия конечной группы G автоморфизмами на коммутативной алгебре A. Как обобщение этого результата Монтгомери был поставлен вопрос о том, будет ли коммутативная H-модульная A целым расширением подалгебры инвариантов A^H в случае, если H конечномерна ([3], с. 45). В [4] и [5] был получен положительный ответ на этот вопрос при дополнительных предположениях. Контрпримеры, построенные в [6] и [7], обусловлены наличием в A ненулевых нильпотентных H-инвариантных идеалов. Аналогичный вопрос о том, будет ли H-модульная PI-алгебра цела над своей подалгеброй центральных инвариантов, представляет интерес и для некоммутативной H-модульной алгебры. В работе [8] было показано, что H-модульная алгебра A цела над подалгеброй центральных инвариантов, если существует центральная подалгебра Z, не содержащая нильпотентных элементов с кольцом частных Q такая, что $Q\otimes_Z A$ является полупростой алгеброй с центром Q, и выполнено одно из условий:

1) алгебра A является конечно порожденным проективным Z-модулем,
2) алгебра A является конечно порожденным Z-модулем без кручения, алгебра Z целозамкнута в алгебре Q.

В предшествующих работах автора [9] и [10] рассматривалась некоторая категория $\mathcal{A}$ не обязательно коммутативных H-модульных алгебр. Более того, H-модульные алгебры из этой категории удовлетворяют полиномиальному тождеству. Было установлено, что H-модульные алгебры из этой категории целы над своей подалгеброй центральных инвариантов, если алгебра Хопфа H является полупростой. Также был построен контрпример, который показывает, что это перестает быть верным, когда H неполупроста. Для произвольной конечномерной алгебры Хопфа удалось показать, что H-модульные алгебры из категории $\mathcal{A}$ вкладываются в некоторую H-модульную алгебру из категории $\mathcal{A}$, которая цела над своей подалгеброй центральных инвариантов и получена присоединением набора инвариантных элементов. Таким образом, возникает вопрос об обобщении полученных результатов на случай H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству.

В статье будут использоваться идеи из [10], а так как все утверждения прошлой статьи были сформулированы для алгебр из категории $\mathcal{A}$, то доказательства некоторых утверждений данной работы будут частично повторять доказательства аналогичных утверждений из [10]. Важную роль будет играть H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$, которое было введено М. Коэн [11] для изучения внутренних действий алгебр Хопфа. Будет показано, что любая H-первичная H-модульная PI-алгебра A имеет фробениусово классическое двустороннее кольцо частных Q, причем алгебра Q является H-простой H-модульной алгеброй, конечномерной над полем центральных инвариантов. Также будет

установлено, что имеет место аналогичное утверждение для H-модульных PI-алгебр, которые имеют конечное число H-первичных идеалов P_i таких, что $\bigcap P_i = 0$. Установленные факты о кольцах частных позволили показать, что H-модульная алгебра цела над подалгеброй центральных инвариантов, если алгебра A является проективным модулем постоянного ранга над центром, и имеет конечное число H-первичных идеалов P_i таких, что $\bigcap P_i = 0$.

1. Предварительные результаты

Пусть A — H-модульная алгебра и I — идеал в A. Обозначим через I_H наибольший H-инвариантный идеал, содержащийся в I. Заметим, что если $I_H = 0$, то I не содержит ненулевых H-подмодулей. Действительно, если V — H-подмодуль содержащийся в I, то AVA — H-инвариантный идеал содержащийся в I, значит, $AVA \subseteq I_H = 0$. Напомним, что H-инвариантный идеал P алгебры A называется *H-первичным*, если A/P является H-первичной H-модульной алгеброй.

Лемма 1.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная алгебра. Тогда существует первичный идеал P такой, что $P_H = 0$.*

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из ([12], лемма 2.2 (2)), где утверждается, что для любого первичного идеала P алгебры A идеал P_H является H-первичным, причем соответствие $P \mapsto P_H$ является сюръекцией между первичными и H-первичными идеалами алгебры A. □

В ([3], 6.4.2, с. 97) определено двустороннее кольцо частных Мартиндейла $Q_{\mathcal{F}}(R)$ по отношению к произвольному фильтру идеалов $\mathcal{F}$ кольца R с условием, что $\mathrm{l.ann}(I)=\mathrm{r.ann}(I)=0$ для всех $I \in \mathcal{F}$, и для любых $I, J \in \mathcal{F}$ существует $K \in \mathcal{F}$ такой, что $K \subseteq IJ$, где через $\mathrm{l.ann}(I)$, $\mathrm{r.ann}(I)$ обозначены левый и правый аннуляторы идеала I. Это кольцо строится как прямой предел

$$Q_{\mathcal{F}}(R) = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \{(f,g) \mid f \in \mathrm{Hom}_R({}_RI, R), g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)$$
$$\text{такие, что } (af)b = a(gb) \text{ для всех } a, b \in I\},$$

где $af = f(a)$ и $gb = g(b)$. Сумма и произведение двух его элементов $q_i = (f_i, g_i)$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R({}_RI_i, R)$, $g_i \in \mathrm{Hom}_R(I_{iR}, R)$, $i \in \overline{1,2}$, задаются по формулам $q_1 + q_2 = (f_1 + f_2, g_1 + g_2)$ и $q_1 q_2 = (f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$, где правые и левые отображения определены на некотором $K \in \mathcal{F}$ таком, что $K \subseteq I_1 \cap I_2$ для суммы, и $K \subseteq I_2 I_1$ для произведения.

Кольцо R вкладывается в $Q_{\mathcal{F}}(R)$ с помощью отображения $a \mapsto (r_a, l_a)$, где r_a, l_a — правое и левое умножения на a. Гомоморфизмы f и g в любой паре (f,g), задающей элемент $q \in Q_{\mathcal{F}}(R)$, сводятся к правому и левому умножению на q в кольце $Q_{\mathcal{F}}(R)$. Таким образом, $Iq \subseteq R$ и $qI \subseteq R$, где I — идеал из $\mathcal{F}$, на котором f и g определены. Заметим, что $\mathrm{l.ann}_{Q_{\mathcal{F}}(R)}(J) = 0$ и $\mathrm{r.ann}_{Q_{\mathcal{F}}(R)}(J) = 0$ для любого идеала $J \in \mathcal{F}$. Также заметим, если R коммутативно, то $Q_{\mathcal{F}}(R)$ также коммутативно, причем

$$Q_{\mathcal{F}}(R) \cong \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \mathrm{Hom}_R(I, R),$$

так как в этом случае $f = g$ для любой пары (f,g) задающей элемент из $Q_{\mathcal{F}}(R)$. Известно, что если R — коммутативная область целостности, $\mathcal{F}$ — множество всех ненулевых идеалов в R, то $Q_{\mathcal{F}}(R)$ отождествляется с полем частных $Q(R)$ кольца R.

Предположим, что R — некоторая H-модульная алгебра. Если H имеет биективный антипод и фильтр $\mathcal{F}$ состоит из H-инвариантных идеалов, то на $Q(R)$ задается действие алгебры Хопфа H ([3], 6.4.3, с. 98). Пусть $q = (f,g)$, где $f \in \mathrm{Hom}_R({}_RI, R)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)$, $I \in \mathcal{F}$.

Тогда $h \cdot q = (h \cdot f, h \cdot g)$, где $h \cdot f \in \mathrm{Hom}_R({}_R I, R)$, $h \cdot g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)$ определяются по правилам

$$a(h \cdot f) = \sum_{(h)} h_{(2)} \cdot [(S^{-1}(h_{(1)}) \cdot a)f], \quad (h \cdot g)a = \sum_{(h)} h_{(1)} \cdot [g(S(h_{(2)}) \cdot a)].$$

Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, а A — H-первичная H-модульная алгебра. Рассмотрим двустороннее H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$, построенное по фильтру всех ненулевых H-инвариантных идеалов в A. Если J — H-инвариантный идеал в A, то $\mathrm{r.ann}(J)$ и $\mathrm{l.ann}(J)$ также являются H-инвариантными идеалами в A. Так как A является H-первичной H-модульной алгеброй, то $\mathrm{l.ann}(J) = \mathrm{r.ann}(J) = 0$, когда $J \neq 0$. Отождествим алгебру A с подалгеброй в $Q_H(A)$. Обозначим через $\mathcal{C}(A)$ центр кольца частных Мартиндейла $Q_H(A)$.

Предложение 1.1. *Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, а A — H-первичная H-модульная алгебра, P — первичный идеал в A такой, что $P_H = 0$. Обозначим через $\overline{Q}$ кольцо частных Мартиндейла кольца A/P, построенное по фильтру всех ненулевых идеалов в A/P. Тогда*

1) *любая H-модульная подалгебра T в $Q_H(A)$ такая, что $A \subseteq T$, является H-первичной H-модульной алгеброй,*
2) *существует гомоморфизм $\Phi : Q_H(A) \to \overline{Q}$, причем $\ker(\Phi)$ не содержит ненулевых H-инвариантных идеалов и $\Phi\,|_A$ является канонической проекцией алгебры A на алгебру A/P,*
3) $\Phi(\mathcal{C}(A)) \subseteq Z(\overline{Q})$.

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $R = A/P$, $\pi : A \to R$ — каноническая проекция.

1) Пусть J, I — ненулевые H-инвариантные идеалы в T такие, что $J \cdot I = 0$. Тогда $(J \cap A)(I \cap A) = 0$. Так как A является H-первичной алгеброй, а $(J \cap A)$ и $(I \cap A)$ являются H-инвариантными идеалами A, то $J \cap A = 0$ или $I \cap A = 0$. Но, если $q \in J$ отличен от нуля, то найдется ненулевой H-инвариантный идеал U в A такой, что $qU \subset A \cap J$ и $qU \neq 0$. Значит, $J \cap A \neq 0$, и, аналогично, $I \cap A \neq 0$.

2) Пусть $q \in Q$. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Так как

$$\pi(J)\pi(q(J \cap P)) = \pi(J(q(J \cap P))) = \pi((Jq)(J \cap P)) = 0,$$

$\pi(J)$ — ненулевой идеал в первичном кольце R, то $\pi(q(J \cap P)) = 0$. Значит, $q(J \cap P) \subset P$. Аналогично показывается, что $(J \cap P)q \subset P$.

Обозначим через $\widehat{q}_r$ морфизм правых R-модулей из $\pi(J)$ в R, определенный по правилу $\widehat{q}_r(\pi(a)) = \pi(qa)$ для $a \in J$, и через $\widehat{q}_l$ морфизм левых R-модулей из $\pi(J)$ в R, определенный по правилу $\widehat{q}_l(\pi(a)) = \pi(aq)$ для $a \in J$ (корректность определений вытекает из приведенных выше включений). Пара $(\widehat{q}_l, \widehat{q}_r)$ определяет элемент $\overline{q}$ кольца частных Мартиндейла $\overline{Q}$. Определим отображение $\Phi : Q \to \overline{Q}$ по правилу $\Phi(q) = \overline{q}$. Заметим, что $\Phi|_A = \pi$. Покажем, что Φ — гомоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр. Пусть $q_1, q_2 \in Q$ и J_1, J_2 — H-инвариантные идеалы в A такие, что $q_i J_i \subset A$, $J_i q_i \subset A$ и $J_i \neq 0$. Тогда для любого $a \in J_2 J_1$

$$\widehat{q_1 q_2}(\pi(a)) = \pi(q_1(q_2 a)) = \widehat{q}_1(\pi(q_2 a)) = \widehat{q}_1 \widehat{q}_2(\pi(a)).$$

Значит, $\Phi(q_1 q_2) = \Phi(q_1)\Phi(q_2)$. Линейность Φ доказывается аналогично.

Покажем, что $\ker(\Phi) = \{q \in Q \mid qJ \subset P,\ Jq \subset P$ для некоторого ненулевого H-инвариантного идеала $J \subseteq A\}$. Пусть $q \in Q$. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал J в A

такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Тогда $\pi(Jq) = \pi(J)\Phi(q)$ и $\Phi(q)\pi(J) = \pi(qJ)$. Так как $\pi(J) \neq 0$, то $qJ \subseteq P$, $Jq \subseteq P$ тогда и только тогда, когда $\Phi(q) = 0$.

Покажем, что $\ker(\Phi)$ не содержит ненулевых H-подмодулей. Пусть V — H-модуль, содержащийся в $\ker(\Phi)$ и $q \in V$. Тогда существует некоторый ненулевой H-инвариантный идеал J кольца A такой, что $qJ \subset P$ и $Jq \subset P$. Так как $(Hq)J \subset A$ и $Hq \subseteq \ker(\Phi)$, то $(Hq)J$ — H-модуль, содержащийся в P. Следовательно, $(Hq)J = 0$. Из свойства $\mathrm{l.ann}_Q(J) = 0$ выводим $Hq = 0$. Значит, $V = 0$.

3) Пусть $q \in \mathcal{C}(A)$ и $z \in \overline{Q}$. Найдется ненулевой идеал J в R такой, что $zJ \subseteq R$ и $Jz \subseteq R$. Таким образом, для любого $a \in J$ существует $r \in A$ такой, что $za = \pi(r)$. Пусть $a \in J$ и $x \in A$, тогда $a = \pi(x)$, отсюда

$$\Phi(q)za = \Phi(q)\pi(r) = \Phi(qr) = \Phi(rq) = za\Phi(q) = z\pi(x)\Phi(q) = z\Phi(xq) = z\Phi(qx) = z\Phi(q)a.$$

Значит, $(\Phi(q)z - z\Phi(q))J = 0$. Следовательно, $\Phi(q)z = z\Phi(q)$. Таким образом, $\Phi(q) \in Z(\overline{Q})$. □

Заметим, что $\Phi\mid_{Q_H(A)^H}$ и $\pi\mid_{A^H}$ являются инъективными отображениями.

Предложение 1.2. *Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, а A — H-первичная H-модульная алгебра, P — первичный идеал в A такой, что $P_H = 0$. Тогда алгебра центральных инвариантов кольца частных Мартиндейла $\mathcal{C}(A)^H$ является полем, причем*

$$\mathcal{C}(A)^H \cong \varinjlim_{J \in \mathcal{F}} \mathrm{Hom}_H(J, A) \cap \mathrm{Hom}_{A,A}(J, A),$$

где фильтр $\mathcal{F}$ состоит из всех ненулевых H-инвариантных идеалов в A и $\mathrm{Hom}_{A,A}(J, A)$ — множество гомоморфизмов A-бимодулей из J в A.

Ненулевые элементы $\mathcal{C}(A)^H$ представляются тройками (f, J, J'), где $J, J' \in \mathcal{F}$, а $f : J \to J'$ — изоморфизм H-модулей и A-бимодулей, и каждая такая тройка задает некоторый ненулевой элемент из $\mathcal{C}(A)^H$.

Доказательство. Как и в предыдущем предложении, обозначим $Q = Q_H(A)$. Каждый элемент $q \in Q$ представляется тройкой (f, g, J), где $J \in \mathcal{F}$ и f (соответственно g) $: J \to A$ — гомоморфизм левых (соответственно правых) A-модулей. Нужно показать, что $q \in \mathcal{C}(A)^H$ тогда и только тогда, когда $f = g$ и g является также гомоморфизмом H-модулей.

Пусть $q \in \mathcal{C}(A)^H$. Так как q содержится в центре Q, то $g(a) = qa = aq = f(a)$ для любого $a \in J$. Так как $g(ha) = q(ha) = h(qa) = hg(a)$ для всех $h \in H$ и $a \in J$, то g — морфизм H-модулей. Обратно, предположим, что $f = g$ и g является гомоморфизмом H модулей. Тогда

$$(h \cdot g)(a) = \sum_{(h)} h_{(1)} \cdot [g(S(h_{(2)}) \cdot a)] = \sum_{(h)} g(h_{(1)}S(h_{(2)}) \cdot a) = \varepsilon(h)g(a).$$

Таким образом, $q \in Q^H$. Покажем, что $q \in \mathcal{C}(A)$. Пусть $r \in Q$. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал L в A такой, что $rL \subset A$ и $Lr \subset A$. Тогда $ra \in J$ для любого $a \in LJ$. Значит, $qra = g(ra) = f(ra) = (ra)q = r(aq) = rf(a) = rg(a) = rqa$ для любого $a \in LJ$. Следовательно, $qr = rq$. Таким образом, $q \in \mathcal{C}(A)^H$. Значит, $q \in \mathcal{C}(A)^H$ тогда и только тогда, когда $f = g$ и g является гомоморфизмом H модулей.

Пусть $q \in \mathcal{C}(A)^H$. Тогда $\ker(g)$ и $\mathrm{Im}(g)$ — это H-инвариантные идеалы кольца A. Если $\ker(g) \neq 0$, то $q = 0$. Предположим, что $q \neq 0$. Тогда $\ker(g) = 0$, т. е. g — изоморфизм J на $J' = \mathrm{Im}(g)$ как H-модулей и A-бимодулей. Из конструкции кольца частных Мартиндейла следует, что любой изоморфизм некоторых H-инвариантных идеалов как H-модулей и

A-бимодулей определяет некоторый элемент кольца частных Мартиндейла Q. Таким образом, обратное отображение к g определит обратный элемент для q в Q, причем $q^{-1} \in \mathcal{C}(A)^H$. Итак, кольцо $\mathcal{C}(A)^H$ коммутативно с обратимыми ненулевыми элементами. □

Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, а A — H-первичная H-модульная алгебра. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$. Пусть Z — коммутативная $\mathcal{C}^H$ алгебра. Рассмотрим Z-алгебру $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$. Зададим на $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ структуру левого H-модуля по формуле $h\Big(\sum q_i \otimes b_i\Big) = \sum q_i \otimes hb_i$.

Лемма 1.2. *Пусть L — ненулевой H-инвариантный идеал H-модульной алгебры $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$. Тогда существуют ненулевые $s \in Z$ и H-инвариантный идеал J алгебры A такие, что $s \otimes J \subseteq L$.*

Доказательство. Обозначим $A' = \mathcal{C}^H A$ и $L' = L \cap Z \otimes_{\mathcal{C}^H} A'$. По п. 1) предложения 1.1 A' является H-первичной H-модульной алгеброй. Покажем, что $L' \neq 0$. Выберем ненулевой элемент $\sum q_i \otimes r_i$ из L, где $q_i \in Z$ линейно независимы над $\mathcal{C}^H$, а элементы $r_i \in Q$ отличны от нуля. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $r_i J \subseteq A$ для всех i. Тогда

$$\Big(\sum q_i \otimes r_i\Big)(1 \otimes J) = \sum q_i \otimes r_i J \subseteq Z \otimes_{\mathcal{C}^H} A' \cap L = L'.$$

Если $L' = 0$, то $r_i J = 0$ для всех i, а следовательно, $r_i = 0$, что противоречит выбору элемента $\sum q_i \otimes r_i$. Таким образом, $L' \neq 0$.

Выберем элемент $\sum\limits_{i=1}^{p} q_i \otimes a_i \neq 0$ из L', в котором число слагаемых p минимально, $q_i \in Z$, $a_i \in A$. Рассмотрим $\mathbf{k}$-модуль

$$V = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} q_i \otimes b_i \in L' \mid b_i \in A \Big\} \subseteq Z \otimes_{\mathcal{C}^H} A'.$$

В силу выбора элементов $q_1, \ldots, q_p$ имеем $V \neq 0$. Так как L является H-инвариантным идеалом алгебры $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$, то всякий раз, когда $\sum\limits_{i=1}^{p} q_i \otimes b_i \in V$, элементы $\sum\limits_{i=1}^{p} q_i \otimes ab_i$, $\sum\limits_{i=1}^{p} q_i \otimes b_i a$ и $\sum\limits_{i=1}^{p} q_i \otimes hb_i$ также лежат в V для любых $a \in A$ и $h \in H$.

Обозначим через J_k множество всех $b \in A$, для которых выполняется включение

$$q_k \otimes b + \sum_{i \neq k} q_i \otimes b_i \in V$$

при подходящем выборе элементов $b_i \in A$, $i \neq k$. Тогда $J_1, \ldots, J_p$ являются H-инвариантными идеалами кольца A. Покажем, что для любого $b \in J_k$ указанные выше элементы b_i определены единственным образом. Пусть $c_i \in A$ такие, что $q_k \otimes b + \sum\limits_{i \neq k} q_i \otimes c_i \in V$, тогда $\sum\limits_{i \neq k} q_i \otimes (b_i - c_i) \in V$, а так как число слагаемых выбиралось минимальным образом, то $b_i = c_i$ для всех $i \neq k$. Ясно, что $b_i \in J_i$ для всех $i \neq k$. Соответствие $b \mapsto b_i$ задает отображение $J_k \to J_i$, являющееся гомоморфизмом H-модулей и A-бимодулей. Меняя роли индексов k и i, получим обратное отображение $J_i \to J_k$. Значит, идеалы $J_1, \ldots, J_p$ попарно изоморфны как H-модули и A-бимодули. В силу предложения 1.2 существуют такие $r_i \in \mathcal{C}^H$ и ненулевой H-инвариантный идеал J алгебры A (например, $J = J_1$), что $V = \sum q_i \otimes r_i J = s \otimes J$, где $s = \sum q_i r_i$ (в частности, $p = 1$). В силу линейной независимости элементов q_i над полем $\mathcal{C}^H$, элемент $s \neq 0$. Таким образом, $s \otimes J \subseteq L' \subseteq L$. □

Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, а A — H-первичная H-модульная алгебра, f — гомоморфизм из алгебры $Q_H(A)$ в алгебру K такой, что $f(\mathcal{C}(A)) \subseteq Z(K)$. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$, $Z = Z(K)$. Так как $\mathcal{C}^H$ является полем и $1 \in f(\mathcal{C}^H) \subseteq Z$, то Z является векторным пространством над полем $\mathcal{C}^H$. Определим отображение $\beta_f : Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q \to \mathrm{Hom}(H, K)$, по правилу

$$\beta_f(q \otimes a)(h) = qf(ha),$$

где $q \in Z$, $a \in Q$, $h \in H$.

Заметим, что $\mathrm{Hom}(H, K)$ является левым H-модулем относительно действия $(h \cdot \phi)(e) = \phi(eh)$, где $\phi \in \mathrm{Hom}(H, K)$.

Лемма 1.3. *Если* $\mathrm{l.ann}_Z(f(J)) = 0$ *для всякого ненулевого* H*-инвариантного идеала* J *алгебры* A*, то отображение* β_f *является вложением* H*-модульной алгебры* $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ *в* H*-модульную алгебру* $\mathrm{Hom}(H, K)$.

Доказательство. Обозначим $\beta = \beta_f$. Заметим, что $1 \otimes Q$ является H-модульной подалгеброй в алгебре $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$, и порождает ее как Z-модуль, причем элементы из $Z \otimes 1$ инвариантны относительно действия H и содержатся в центре алгебры $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$. Покажем, что β является гомоморфизмом H-модульных Z-алгебр. Пусть $a, b \in Q$, $r, p \in Z$ и $t, h \in H$. Тогда

$$\beta((r \otimes b)(p \otimes a))(t) = \beta(rp \otimes ba)(t) = rpf(t(ba)) = \sum rf(t_{(1)}b)pf(t_{(2)}a) =$$
$$= \sum \beta(r \otimes b)(t_{(1)})\beta(r \otimes a)(t_{(2)}) = \{\beta(r \otimes b)\beta(p \otimes a)\}(t),$$
$$\beta(h(r \otimes b))(t) = \beta(r \otimes hb)(t) = rf(thb) = \beta(r \otimes b)(th) = (h\beta(1 \otimes b))(t).$$

Значит, $\mathrm{Im}(\beta)$ является H-модульной подалгеброй в алгебре $\mathrm{Hom}(H, K)$, а $\ker(\beta)$ является H-инвариантным идеалом в алгебре $Z \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$.

Предположим, что $\ker(\beta) \neq 0$. По лемме 1.2 существуют ненулевые $s \in Z$ и H-инвариантный идеал J алгебры A такие, что $s \otimes J \subseteq \ker(\beta)$. Таким образом,

$$\beta(s \otimes J)(H) = sf(HJ) = sf(J) = 0.$$

Значит, $s \in \mathrm{l.ann}_Z(f(J))$, при этом $J \neq 0$ и $s \neq 0$, что противоречит предположению леммы. Таким образом, $\ker(\beta) = 0$. □

Пусть P — первичный идеал в A такой, что $P_H = 0$. Обозначим через $\overline{Q}$ кольцо частных Мартиндейла кольца A/P, построенное по фильтру всех ненулевых идеалов в A/P, а через $\mathcal{F}$ — центр $\overline{Q}$. В силу свойства 3) предложения 1.1 $\Phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$, что позволяет определить отображение $\beta_\Phi : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q \to \mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$, где Φ — гомоморфизм из предложения 1.1. Также для тождественного отображения $\mathrm{id} : Q \to Q$ определено отображение $\beta_{\mathrm{id}} : \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q \to \mathrm{Hom}(H, Q)$. Обозначим $\beta_0 = \beta_{\mathrm{id}}$, $\beta_P = \beta_\Phi$.

Лемма 1.4. *Отображения* β_0 *и* β_P *являются вложениями* H*-модульной алгебры* $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ *в* H*-модульную алгебру* $\mathrm{Hom}(H, Q)$ *и* H*-модульной алгебры* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ *в* H*-модульную алгебру* $\mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$ *соответственно.*

Доказательство. В силу леммы 1.3 достаточно проверить, что $\mathrm{l.ann}_{\mathcal{C}}(J) = 0$ и $\mathrm{l.ann}_{\mathcal{F}}(\Phi(J)) = 0$ для всякого ненулевого H-инвариантного идеала J алгебры A. Эти равенства немедленно вытекают из следующих свойств:

1) $\mathrm{l.ann}_Q(J) = 0$ для любого ненулевого H-инвариантного идеала J алгебры A,
2) $\mathrm{l.ann}_{\overline{Q}}(J) = 0$ для любого ненулевого идеала J алгебры A/P,

так как для любого ненулевого H-инвариантного идеала J алгебры A образ $\Phi(J)$ является ненулевым идеалом алгебры A/P. □

2. Кольцо частных Мартиндейла H-первичной H-модульной алгебры, удовлетворяющей полиномиальному тождеству

В этом разделе будет рассматриваться кольцо частных Мартиндейла H-модульной PI-алгебры. Важную роль будет играть

Предложение 2.1 ([13], с. 234, теорема 23.4)**.** *Пусть R — первичная* PI*-алгебра. Тогда двустороннее кольцо частных Мартиндейла $\overline{Q}$ является кольцом частных алгебры R, которое является простой конечномерной алгеброй над своим центром. Причем центр $Z(\overline{Q})$ является полем частных алгебры $Z(R)$ и $\overline{Q} = Z(\overline{Q})R$.*

Теорема 2.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная PI-алгебра. Тогда H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$ является H-простой фробениусовой конечномерной алгеброй над полем центральных инвариантов $\mathcal{C}(A)^H$, причем $Q_H(A) = \mathcal{C}(A)^H A$.*

Доказательство. Пусть P — первичный идеал в A такой, что $P_H = 0$. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $R = A/P$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$, через $\overline{Q}$ обозначим кольцо частных Мартиндейла кольца A/P, построенное по фильтру всех ненулевых идеалов в A/P, а через $\mathcal{F}$ — центр $\overline{Q}$.

По предложению 2.1 алгебра $\overline{Q}$ является конечномерной алгеброй над своим центром $\mathcal{F}$. Следовательно, алгебра $\mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$ имеет конечную размерность над полем $\mathcal{F}$. Тогда по лемме 1.4 алгебра $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ также конечномерна над $\mathcal{F}$. Так как $\dim_{\mathcal{C}^H} Q = \dim_{\mathcal{F}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$, то алгебра Q имеет конечную размерность над полем центральных инвариантов $\mathcal{C}^H$.

Обозначим $A' = \mathcal{C}^H A$. Так как алгебра A' артинова и H-первична (по предложению 1.1), то в силу ([14], теорема 1.1) A' является H-простой H-модульной алгеброй. Тогда в силу ([14], лемма 6.3) A' является фробениусовой алгеброй. Осталось показать, что $Q = A'$. Пусть $q \in Q$ и пусть J — ненулевой H-инвариантный идеал в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Тогда $J' = \mathcal{C}^H J$ — ненулевой H-инвариантный идеал в A', значит, $J' = A'$. Найдутся такие $q_i \in \mathcal{C}^H$ и $a_i \in J$, что $\sum q_i a_i = 1$. Тогда $q = q(\sum q_i a_i) = \sum q_i (q a_i) \in \mathcal{C}^H A = A'$. Это доказывает равенство $Q = A'$. □

Заметим, что равенство $Q_H(A) = \mathcal{C}(A)^H A$ показывает, в частности, что $Q_H(A)$ совпадает с центральным замыканием H-модульной алгебры A, которое рассматривалось в [15].

Для расширений колец, порожденных конечным набором централизующих элементов, в свое время изучались различные вопросы, в частности, о соответствии между простыми идеалами двух колец. В качестве примера можно привести работу [16].

Лемма 2.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра, Q — H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла алгебры A, а P — максимальный идеал алгебры $\mathcal{C}(A)$. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}/P$. Тогда алгебра $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ является H-простой алгеброй.*

Доказательство. Пусть L — ненулевой H-инвариантный идеал алгебры $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$. По лемме 1.2 существуют ненулевые $s \in \mathcal{F}$ и H-инвариантный идеал J алгебры A такие, что $s \otimes J \subseteq L$. Заметим, что в силу H-простоты алгебры Q имеем $JQ = Q$. Так как $\mathcal{F}$ является полем, то $s\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Значит,

$$\mathcal{F} \otimes Q = (s \otimes J)(\mathcal{F} \otimes Q) \subseteq L.$$

Таким образом, $L = \mathcal{F} \otimes Q$. □

Предложение 2.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра и P — первичный идеал в A такой, что $P_H = 0$. Тогда $\mathrm{Im}(\Phi) = \overline{Q}$, где $\overline{Q}$ — кольцо частных алгебры A/P, Φ — гомоморфизм из предложения* 1.1.

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $R = A/P$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$, $\mathcal{F} = Z(\overline{Q})$. Рассмотрим подалгебру $E = \Phi^{-1}(\mathcal{F})$. Заметим, что $\mathcal{C}^H \subseteq E$. Таким образом, $\Phi(\mathcal{C}^H) \subseteq \Phi(E) \subseteq \mathcal{F}$. Значит, $\Phi(E)$ является областью целостности и имеет конечную размерность над полем $\Phi(\mathcal{C}^H) \cong \mathcal{C}^H$. Следовательно, $\Phi(E)$ является полем. Согласно предложению 2.1 подкольцо $Z(R)$ содержится в $\mathcal{F}$. Таким образом, в силу равенства $\Phi(A) = R$ имеет место включение $Z(R) = \Phi(\Phi^{-1}(Z(R))) \subseteq \Phi(E)$. Так как $\mathcal{F}$ является полем частных алгебры $Z(R)$ (в силу предложения 2.1), то $\Phi(E) = \mathcal{F}$. Заметим, что $Q = \mathcal{C}^H A = EA$. Таким образом,

$$\Phi(Q) = \Phi(\mathcal{C}^H A) = \Phi(EA) = \Phi(E)R = \mathcal{F}R = \overline{Q}. \qquad \square$$

Заметим, что из предложения 2.2 следует, что $\ker(\Phi)$ является максимальным идеалом в кольце частных Мартиндейла $Q_H(A)$.

Лемма 2.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная PI-алгебра, M — максимальный идеал кольца частных Мартиндейла $Q_H(A)$. Тогда $P = M \cap A$ является первичным идеалом алгебры A, причем $P_H = 0$.*

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$. Пусть J, I — правые идеалы в A такие, что $JI \subseteq P$. Тогда

$$(JQ)(IQ) = (J\mathcal{C}^H)(I\mathcal{C}^H) = JI\mathcal{C}^H \subseteq PQ \subseteq M.$$

Так как Q/M является простой алгеброй, то $JQ \subseteq M$ или $IQ \subseteq M$. Если $JQ \subseteq M$, то $J \subseteq JQ \subseteq M$, значит, $J \subseteq P$. Аналогично, если $IQ \subseteq M$, то $I \subseteq P$. Таким образом, идеал P является первичным.

Пусть V — H-подмодуль, содержащийся в P. Тогда QVQ является H-инвариантным идеалом алгебры Q, причем $QVQ \subseteq M$. Так как алгебра Q является H-простой, то $QVQ = 0$. Значит, $V = 0$. Следовательно, P не содержит не нулевых H-инвариантных идеалов, т. е. $P_H = 0$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра. Тогда для любого правого идеала I в кольце частных Мартиндейла $Q_H(A)$ выполняется равенство $(I \cap A)Q_H(A) = I$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, тогда найдется ненулевой H-инвариантный идеал J такой, что $xJ \subseteq A \cap I$. Тогда $\mathcal{C}(A)^H J$ является ненулевым H-инвариантным идеалом в $Q_H(A)$. Так как $Q_H(A)$ является H-простой алгеброй, то $\mathcal{C}(A)^H J = Q_H(A)$. Значит, найдутся $q_i \in \mathcal{C}(A)^H$ и $a_i \in J$ такие, что $\sum q_i a_i = 1$. Тогда $x = x\Big(\sum q_i a_i\Big) = \sum (xa_i)q_i \in (I \cap A)Q_H(A)$. Таким образом, $I \subseteq (I \cap A)Q_H(A)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра, K — правый ниль-идеал алгебры A. Тогда $KQ_H(A) \subseteq \operatorname{rad}(Q_H(A))$, где $\operatorname{rad}(Q_H(A))$ — радикал Джекобсона кольца частных Мартиндейла $Q_H(A)$.*

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал алгебры $Q_H(A)$. Тогда по лемме 2.2 $P = M \cap A$ является первичным идеалом алгебры A. Тогда $K' = (K + P)/P$ является правым ниль-идеалом алгебры A/P. Так как A/P — первичная PI-алгебра, то ([17], с. 484, теорема 13.2.5) $K' = 0$. Значит, $K \subseteq P \subseteq M$. Следовательно, $KQ_H(A) \subseteq M$. Таким образом, KQ содержится в каждом максимальном идеале алгебры $Q_H(A)$, значит, $KQ_H(A) \subseteq \operatorname{rad}(Q_H(A))$. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра. Тогда каждый ненулевой H-инвариантный идеал I алгебры A содержит элемент обратимый в $Q_H(A)$.*

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$. Рассмотрим множество $X = \{x \in A \mid \mathrm{r.ann}_Q(x) = \mathrm{r.ann}_Q(x^2)\}$. Заметим, что X содержит в точности те $x \in A$, для которых $xQ \cap \mathrm{r.ann}_Q(x) = 0$. Покажем, что для любого $x \in X$ выполняется равенство $Q = xQ + \mathrm{r.ann}_Q(x)$. Рассмотрим отображение $x_l : Q \to Q$, определенное по правилу $x_l(q) = xq$. Тогда $\mathrm{Im}(x_l) = xQ$, $\ker(x_l) = \mathrm{r.ann}_Q(x)$. Таким образом,

$$\dim_{\mathcal{C}^H}(xQ + \mathrm{r.ann}_Q(x)) = \dim_{\mathcal{C}^H} xQ + \dim_{\mathcal{C}^H} \mathrm{r.ann}_Q(x) = \\ = \dim_{\mathcal{C}^H} \mathrm{Im}(x_l) + \dim_{\mathcal{C}^H} \ker(x_l) = \dim_{\mathcal{C}^H} Q.$$

Значит, $Q = xQ + \mathrm{r.ann}_Q(x)$.

Пусть $x \in I \cap X$ такой, что размерность $\mathrm{r.ann}_Q(x)$ над полем $\mathcal{C}^H$ минимальна. Покажем, что $K = I \cap \mathrm{r.ann}_A(x)$ является правым ниль-идеалом.

Пусть $u \in K$ не является нильпотентным. Тогда в силу конечномерности алгебры Q над полем $\mathcal{C}^H$ можно подобрать такое $n > 0$, что элемент $v = u^n$ принадлежит

$$K \cap X = I \cap \mathrm{r.ann}_A(x) \cap X.$$

Рассмотрим элемент $y = x + v$, тогда $y^2 = x^2 + vx + v^2$. Заметим, что $vx + v^2 \in K$ и $xQ \cap K = 0$, так как $K \subseteq \mathrm{r.ann}_Q(x)$. Покажем, что $y \in X$. Пусть $y^2q = 0$ для некоторого $q \in Q$. Так как $x^2q \in xQ$, а $(vx + v^2)q \in K \subseteq \mathrm{r.ann}_Q(x)$, то $x^2q = 0$ и $(vx + v^2)q = 0$, а значит, $xq = 0$, и $v^2q = (vx + v^2)q = 0$. Таким образом, $vq = 0$, так как $v \in X$. Следовательно, $y \in X$ и $\mathrm{r.ann}_Q(y) = \mathrm{r.ann}_Q(x) \cap \mathrm{r.ann}_Q(v)$, так как $x \in xQ$ и $v \in K \subseteq \mathrm{r.ann}_Q(x)$. Таким образом, $vQ \cap \mathrm{r.ann}_Q(y) = 0$ и $vQ + \mathrm{r.ann}_Q(y) \subseteq \mathrm{r.ann}_Q(x)$. Значит, правый идеал $\mathrm{r.ann}_Q(y)$ имеет меньшую размерность, чем $\mathrm{r.ann}_Q(x)$, что противоречит выбору x.
Значит, K является ниль-идеалом в алгебре A. Заметим, что так как $\mathrm{r.ann}_A(x) = \mathrm{r.ann}_Q(x) \cap A$, то в силу леммы 2.3 $\mathrm{r.ann}_Q(x) = \mathrm{r.ann}_A(x)Q$. Так как I является H-инвариантным идеалом алгебры A, то $Q = IQ$. Значит, $\mathrm{r.ann}_Q(x) = \mathrm{r.ann}_A(x)IQ \subseteq KQ$. Таким образом, в силу леммы 2.4 $\mathrm{r.ann}_Q(x)$ содержится в радикале Джекобсона алгебры Q. Так как $Q = xQ + \mathrm{r.ann}_Q(x)$, то $x + \mathrm{rad}(Q)$ обратим в алгебре $Q/\mathrm{rad}(Q)$. Значит, x обратим в Q. □

Теорема 2.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра. Тогда H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$ является классическим левым и правым кольцом частных для A.*

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$. Пусть $x \in A$ — неделитель нуля в A. Так как $\mathrm{r.ann}_A(x) = \mathrm{r.ann}_Q(x) \cap A$, то в силу леммы 2.3 $\mathrm{r.ann}_Q(x) = \mathrm{r.ann}_A(x)Q = 0$. Так как Q — конечномерная алгебра над полем $\mathcal{C}^H$, то x обратим в Q.

Пусть $q \in Q$. Тогда существует ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subseteq A$ и $Jq \subseteq A$. По предложению 2.3 в J содержится обратимый в Q элемент x. Значит, $qx{=}a{\in}A$, и так как x обратим в Q, то $q = ax^{-1}$. Аналогично, $q = x^{-1}b$ для некоторого $b \in A$.

Теорема 2.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная* PI*-алгебра, которая имеет конечное число H-первичных идеалов $\{P_i\}_{i\in\overline{1,k}}$ таких, что $\bigcap P_i = 0$. Тогда алгебра A имеет фробениусово классическое двустороннее кольцо частных Q, которое является H-полупростой H-модульной алгеброй. Алгебра Q является конечно порожденным модулем над подалгеброй центральных инвариантов $\mathcal{C}^H$. Причем алгебра $\mathcal{C}^H$ полупроста и $Q = \mathcal{C}^H A$.*

Доказательство. Пусть $\{P_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ — минимальные H-первичные идеалы алгебры A, их число конечно в силу условий теоремы. Заметим, что $\bigcap P_i = 0$. Обозначим $A_i = A/P_i$ и $Q_i = Q_H(A_i)$. Пусть $Q = \prod\limits_{i=1}^{m} Q_i$. Так как $\bigcap P_i = 0$, то алгебра A вкладывается в алгебру Q. Будем отождествлять алгебру A с ее образом в Q. Обозначим через $\mathcal{C}_i$ центр Q_i, тогда $\prod\limits_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$ является центром Q, обозначим его через $\mathcal{C}$. В силу теоремы 2.1 алгебра Q является H-полупростой фробениусовой алгеброй и конечно порожденным модулем над подалгеброй центральных инвариантов $\mathcal{C}^H$. Причем $Q = \mathcal{C}^H A$. Осталось показать, что алгебра Q является классическим левым и правым кольцом частных алгебры A.

Обозначим через $\pi_i : A \to A_i$ каноническую проекцию, через $p_i : Q \to Q_i$ проекцию на i-й сомножитель, через $r : A \to Q$ — вложение алгебры A в алгебру Q, а через $h_i : Q_i \to Q$ — вложение Q-модуля Q_i в Q такое, что $p_j(h_i(q)) = 0$, $p_i(h_i(q)) = q$ для любых $i \neq j$ и любого $q \in Q_i$. Заметим, что $p_i(r(a)) = \pi_i(a)$ и $r(a) = \sum h_i(\pi_i(a))$ для любого $a \in A$. Обозначим $R_i = \bigcap\limits_{j\neq i} P_j$. Тогда в силу минимальности идеалов P_i H-инвариантный идеал R_i не содержится в H-инвариантном идеале P_i для любого $i \in \overline{1,m}$.

Покажем, что каждый неделитель нуля алгебры A имеет обратный в алгебре Q. Пусть $a \in A$ является неделителем нуля в алгебре A. Так как каждый неделитель нуля в алгебре A_i имеет обратный в алгебре Q_i, то достаточно показать, что $\pi_i(a)$ является неделителем нуля в алгебре A_i. Пусть $b \in A$ такой, что $\pi_i(a)\pi_i(b) = 0$. Значит, $ab \in P_i$. Так как $\bigcap P_j = 0$, то $abR_i = 0$. Следовательно, $bR_i = 0$. Так как H-инвариантный идеал R_i не содержится в H-инвариантном идеале P_i, то $\pi_i(R_i)$ является ненулевым H-инвариантным идеалом в алгебре A_i и $\pi_i(b) \in \mathrm{l.ann}(\pi_i(R_i)$. Следовательно, $\pi_i(b) = 0$. Таким образом, $\pi_i(a)$ не является левым делителем нуля в алгебре A_i. Аналогичным образом показывается, что $\pi_i(a)$ не является правым делителем нуля в алгебре A_i.

Покажем, что для каждого набора H-инвариантных идеалов $\{J_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ алгебр A_i существует набор H-инвариантных идеалов $\{J_i'\}_{i\in\overline{1,m}}$ алгебр A_i такой, что $J_i' \subseteq J_i$ и $\bigoplus h_i(J_i') \subseteq r(A)$, причем $J_i' = 0$ тогда и только тогда, когда $J_i = 0$. Пусть $\{J_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ — набор H-инвариантных идеалов алгебр A_i. Рассмотрим идеалы $K_i = \pi^{-1}(J_i)R_i$. Так как идеал R_i не содержится в идеале P_i, то $K_i \subseteq P_i$ тогда и только тогда, когда $J_i = 0$. Положим $J_i' = \pi_i(K_i)$. Заметим, что $\pi_j(K_i) = 0$ для любых $i \neq j$, и для любого i идеал $J_i' = 0$ тогда и только тогда, когда $J_i = 0$. Таким образом,

$$\bigoplus h_i(J_i') = \sum_i h_i(\pi_i(K_i)) = \sum_{i,j} h_i(\pi_i(K_j)) = \sum_j r(K_j) \subseteq r(A).$$

Покажем теперь, что каждый элемент $q \in Q$ можно представить в виде $q = ax^{-1}$, где $a, x \in A$ и x является неделителем нуля в A. Так как $Q = \mathcal{C}^H A$, то это достаточно показать для элементов из $\mathcal{C}^H$. Пусть $q \in \mathcal{C}^H$. Обозначим $q_i = p_i(q)$. Заметим, что $q_i \in \mathcal{C}_i^H$. Таким образом, для каждого i существует ненулевой H-инвариантный идеал J_i в алгебре A_i такой, что $q_i J_i$ является H-инвариантным идеалом в алгебре A_i. Тогда существует набор H-инвариантных идеалов $\{L_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ алгебр A_i такой, что $L_i \subseteq q_i J_i$ и $\bigoplus h_i(L_i) \subseteq r(A)$, причем $L_i = 0$ только в том случае, если $q_i = 0$. Обозначим $J_i' = q_i^{-1} L_i$, если $q_i \neq 0$, и $J_i' = J_i$, если $q_i = 0$. Заметим, что идеал J_i' является ненулевым H-инвариантным идеалом алгебры A_i для каждого i, причем

$$q\big(\bigoplus h_i(J_i')\big) = \bigoplus h_i(q_i J_i') \subseteq r(A).$$

Тогда существует набор ненулевых H-инвариантных идеалов $\{U_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ алгебр A_i такой, что $U_i \subseteq J_i'$ и $\bigoplus h_i(U_i) \subseteq r(A)$, причем в силу предложения 2.3, для каждого i существует элемент $x_i \in U_i$, который не является делителем нуля в алгебре A_i. Следовательно, $\sum h_i(x_i) = r(x)$ для некоторого элемента $x \in A$, который не является делителем нуля в алгебре A. Более того, $r(x)$ принадлежит $\bigoplus h_i(J_i')$, значит, $qr(x) = r(a)$ для некоторого $a \in A$. Таким образом, $q = ax^{-1}$. □

3. Алгебры являющиеся проективными модулями постоянного ранга над своим центром

Предложение 3.1. *Пусть A — кольцо, которое является конечно порожденным модулем над подкольцом $Z \subseteq Z(A)$, обладает артиновым справа классическим правым кольцом частных Q, и $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_Z(z)A$ для любого $z \in Z$. Тогда $Q = AS^{-1}$, где S — множество неделителей нуля алгебры Z.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_Z(z)A$ для любого $z \in Z$, то каждый элемент s из S является неделителем нуля в кольце A, а значит, имеет обратный в Q. Заметим, что кольцо Z содержится в центре кольца Q, и для любого $s \in S$ элемент s^{-1} лежит в центре кольца Q. Значит, $ZS^{-1} \subseteq Z(Q)$ и $AS^{-1} = A\mathcal{C} \subseteq Q$. Обозначим $\mathcal{C} = ZS^{-1}$, $Q' = AS^{-1} = A\mathcal{C}$. Пусть $c = zs^{-1} \in \mathcal{C}$, тогда $\mathrm{Ann}_Q(c) = \mathrm{Ann}_Q(z) = \mathrm{Ann}_A(z)Q = \mathrm{Ann}_Z(z)Q = \mathrm{Ann}_{\mathcal{C}}(z)Q = \mathrm{Ann}_{\mathcal{C}}(c)Q$. Таким образом, $\mathrm{Ann}_Q(c) = \mathrm{Ann}_{\mathcal{C}}(c)Q$ для любого $c \in \mathcal{C}$.

Так как кольцо A является конечно порожденным модулем над подкольцом Z, то кольцо Q' является конечно порожденным модулем над подкольцом $\mathcal{C}$. Пусть $\{M_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — максимальные идеалы кольца Q, тогда $\bigcap\limits_i M_i = J(Q)$, где $J(Q)$ — радикал Джекобсона кольца Q. Обозначим $P_i = M_i \cap \mathcal{C}$.

Покажем, что каждый минимальный простой идеал кольца $\mathcal{C}$ совпадает с идеалом P_j для некоторого j. Пусть P — минимальный простой идеал кольца $\mathcal{C}$. В силу нильпотентности радикала Джекобсона $J(Q)$ идеал $\bigcap\limits_i P_i = \bigcap\limits_i M_i \cap \mathcal{C} = J(Q) \cap \mathcal{C}$ нильпотентен, а значит, содержится в идеале P. Следовательно, $P \supseteq P_j$ для некоторого j. Тогда $P = P_j$ в силу минимальности идеала P.

Обозначим через $D(\mathcal{C})$ множество делителей нуля в кольце $\mathcal{C}$. Пусть $\{P_{i_k}\}_{k\in\overline{1,l}}$ — минимальные простые идеалы кольца $\mathcal{C}$. Тогда

$$\bigcap_k P_{i_k} = \bigcap_i P_i = J(Q) \cap \mathcal{C}.$$

Покажем, что $D(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup\limits_k P_{i_k}$. Пусть $c \in \mathcal{C} \setminus \bigcup\limits_k P_{i_k}$. Найдется такое $m > 0$, что $\mathrm{Ann}_Q(c^m) = \mathrm{Ann}_Q(c^{m+1})$, обозначим $a = c^m$. Заметим, что $a \in \mathcal{C} \setminus \bigcup\limits_k P_{i_k}$. Тогда $\mathrm{Ann}_Q(a) = \mathrm{Ann}_{\mathcal{C}}(a)Q \subseteq \big(\bigcap\limits_k P_{i_k}\big)Q \subseteq J(Q)$. Пусть $q \in Q$ такой, что $aq \subseteq J(Q)$, тогда $a^k q^k = 0$. Следовательно, $q^k \in \mathrm{Ann}_Q(a^k) = \mathrm{Ann}_Q(a) \subseteq J(Q)$. Таким образом, элемент $a + J(Q)$ является неделителем нуля в артиновом справа кольце $Q/J(Q)$, значит, имеет обратный в $Q/J(Q)$. Следовательно, a и c обратимы в Q. Поэтому $\mathrm{Ann}_{\mathcal{C}}(c) = 0$ и $c \notin D(\mathcal{C})$.

Покажем, что каждый максимальный идеал кольца $\mathcal{C}$ совпадает с идеалом P_{i_j} для некоторого j. Пусть J — собственный идеал в кольце $\mathcal{C}$. Так как все неделители нуля кольца $\mathcal{C}$ имеют вид as^{-1}, где $a, s \in S$, то все элементы из $\mathcal{C} \setminus D(\mathcal{C})$ имеют обратный в $\mathcal{C}$. Значит, $J \subseteq D(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup\limits_k P_{i_k}$. Тогда в силу ([18], с. 17, предложение 1.11) идеал J содержится в некотором идеале P_{i_j}. Таким образом, каждый максимальный идеал кольца $\mathcal{C}$ совпадает с одним из идеалов P_{i_k}. Но идеалы P_{i_k} являются минимальными идеалами кольца $\mathcal{C}$. Значит, каждый

простой идеал кольца $\mathcal{C}$ является максимальным идеалом, в частности, идеалы P_i являются максимальными.

Для равенства $Q = Q'$ достаточно показать, что каждый неделитель нуля в кольце A имеет обратный в кольце Q'. Обозначим $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}/P_i$, $R_i = Q/P_iQ$, $R'_i = Q'/(P_iQ \cap Q')$ и $N = \bigcap P_iQ \cap Q'$. Заметим, что для каждого i кольцо R'_i является конечномерным векторным пространством над полем $\mathcal{C}_i$, которое вкладывается в кольцо R_i. Пусть a — элемент из кольца A, не являющийся делителем нуля. Так как a имеет обратный в кольце Q, то для каждого i элемент $a + P_iQ$ имеет обратный в R_i. Следовательно, для каждого i элемент $a + P_iQ \cap Q'$ не является делителем нуля в R'_i, а значит, имеет обратный. Так как идеалы P_i являются максимальными в кольце $\mathcal{C}$, то $P_i + P_j = \mathcal{C}$ и $P_iQ \cap Q' + P_jQ \cap Q' = Q'$ для любых $i \neq j$. Тогда в силу китайской теоремы об остатках $Q'/N \cong \prod R'_i$. Отсюда следует, что $a + N$ имеет обратный в кольце Q'/N. Так как идеал N нильпотентен, то элемент a имеет обратный в Q'. Значит, $Q = Q'$. □

Заметим, что если алгебра A является проективным модулем над подалгеброй $Z \subseteq Z(A)$, то $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_Z(z)A$ для любого $z \in Z$. Таким образом, предыдущее предложение верно и в случае, когда A является конечно порожденным проективным модулем над подалгеброй Z.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — артиново коммутативное кольцо, B — такое кольцо, что $\mathcal{C}$ содержится в центре кольца B и B является проективным $\mathcal{C}$-модулем. Пусть M — левый B-модуль такой, что M является проективным $\mathcal{C}$-модулем, и для каждого максимального идеала P кольца $\mathcal{C}$ модуль M/PM является свободным левым B/PB-модулем ранга r, причем r не зависит от выбора P. Тогда M является свободным левым B-модулем ранга r.*

Доказательство. Пусть $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — максимальные идеалы кольца $\mathcal{C}$, тогда $\bigcap\limits_i P_i = J$, где J — радикал Джекобсона кольца $\mathcal{C}$, и $\mathcal{C}/J \cong \prod\limits_i \mathcal{C}/P_i$. Тогда $B/JB \cong \prod\limits_i B/P_iB$ и $M/JM \cong \prod\limits_i M/P_iM$ как $\mathcal{C}$-модули ([2], с. 71, предложение 6). Заметим, что так как JB и P_iB являются идеалами кольца B, а JM и P_iM являются B-подмодулями модуля M, то изоморфизм $B/JB \cong \prod\limits_i B/P_iB$ является изоморфизмом алгебр, а изоморфизм $M/JM \cong \prod\limits_i M/P_iM$ является изоморфизмом B-модулей. Так как $M/P_iM \cong (B/P_iB)^r$ как B-модули, то $M/JM \cong (B/JB)^r$ как B-модули. Значит, M/JM является свободным модулем ранга r над кольцом B/J. Обозначим $F = (B/JB)^r$. Пусть $\phi : F \to M$ — гомоморфизм B-модулей такой, что соответствующий ему гомоморфизм $\phi' : F/JF \to M/JM$ является изоморфизмом B/J-модулей. Заметим, что гомоморфизмы ϕ и ϕ' являются также и гомоморфизмами $\mathcal{C}$-модулей. Так как идеал J нильпотентен, то в силу ([2], с. 117, следствие 1) гомоморфизм ϕ является сюръективным. Обозначим $N = \ker(\phi)$. В силу проективности $\mathcal{C}$-модуля M существует $\mathcal{C}$-подмодуль R модуля F такой, что $F = N \oplus R$. Тогда $F/JF = N/JN \oplus R/JR$, причем $N/JN \subseteq \ker(\phi') = 0$. Значит, $N/JN = 0$. Пусть m такое, что $J^m = 0$, тогда $N = JN = J^2N = \cdots = J^mN = 0$. Следовательно, гомоморфизм ϕ является изоморфизмом. □

Замечание. Доказательство леммы 3.1 повторяет с незначительными изменениями доказательство ([4], лемма 2.2), в котором кольцо B предполагалось коммутативным.

Если H конечномерна, то H^* является алгеброй Хопфа, и любой правый H-комодуль U можно считать левым H^*-модулем с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(U, U \otimes H) \cong \mathrm{Hom}(H^* \otimes U, U)$, и наоборот. Также любая H-модульная алгебра A превращается в H^*-комодульную

относительно структурного отображения

$$\rho : A \to A \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}(H, A), \quad \rho(a)(h) = h \cdot a, \quad h \in H, \quad a \in A.$$

Пусть A — H-модульная алгебра, V — левый A-модуль, U — правый H-комодуль. Зададим на $V \otimes U$ структуру левого A-модуля по правилу

$$a(v \otimes u) = \sum_{(u)} (u_{(1)}a)v \otimes u_{(0)},$$

где $a \in A$, $v \in V$, $u \in U$ ([14], с. 817). Заметим, что если $f : V \to V'$ — гомоморфизм левых A-модулей, а $g : U \to U'$ — гомоморфизм правых H-комодулей, то $f \otimes g : V \otimes U \to V' \otimes U'$ является гомоморфизмом левых A-модулей. Таким образом, если $V \cong V'$ как левые A-модули, а $U \cong U'$ как правые H-комодули, то $V \otimes U \cong V' \otimes U'$ как левые A-модули.

Лемма 3.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная алгебра, V — левый A-модуль, U — левый H^*-модуль, а значит, и правый H-комодуль. Тогда*

$$a(v \otimes u) = \rho(a)(v \otimes u),$$

где $a \in A$, $v \in V$, $u \in U$, отображение $\rho : A \to A \otimes H^*$ задает на A структуру правого H^*-комодуля.

Доказательство. Пусть $a \in A$, $v \in V$, $u \in U$, $\{e_i\}$ — базис H, $\{\xi_i\}$ — базис H^* такой, что $\langle \xi_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, отображение $p : U \to U \otimes H$ задает на U структуру правого H-комодуля. Тогда

$$\rho(a) = \sum (e_i a) \otimes \xi_i, \quad p(u) = \sum (\xi_i u) \otimes e_i.$$

Таким образом,

$$a(v \otimes u) = \sum (e_i a)v \otimes \xi_i u = \rho(a)(v \otimes u). \qquad \square$$

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная алгебра, V — левый A-модуль. Зададим на $\mathrm{Hom}(H, V)$ структуру левого $\mathrm{Hom}(H, A)$ по правилу $(f \cdot g)(h) = \sum f(h_{(1)})g(h_{(2)})$, где $f \in \mathrm{Hom}(H, A)$, $g \in \mathrm{Hom}(H, V)$. Напомним, что $A \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}(H, A)$ как алгебры. Аналогичным образом доказывается, что $V \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}(H, V)$ как левые $\mathrm{Hom}(H, A)$-модули. Таким образом, из предыдущей леммы следует, что структуре левого A-модуля на $V \otimes H^*$ при этом изоморфизме соответствует структура левого A-модуля на $\mathrm{Hom}(H, V)$, определенная по правилу

$$(af)(h) = (\rho(a)f)(h) = \sum \rho(a)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = \sum (h_{(1)}a)f(h_{(2)}),$$

где $a \in A$, $h \in H$, $f \in \mathrm{Hom}(H, V)$.

Лемма 3.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-простая артинова справа H-модульная алгебра, V — левый A-модуль. Тогда существует $l > 0$ такое, что модуль $\mathrm{Hom}(H, V^l)$ является свободным A-модулем.*

Доказательство. В силу ([14], теорема 6.2) существует $l > 0$ такое, что модуль $V^l \otimes H$ является свободным A-модулем. Так как алгебра Хопфа H^* фробениусова ([19]; [3], с. 18, теорема 2.1.3), то $H^* \cong H$ как левые H^*-модули. Следовательно, $V^l \otimes H \cong V^l \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}(H, V^l)$ как A-модули.

Пусть H — алгебра Хопфа размерности n, а A — H-первичная H-модульная PI-алгебра. Обозначим через Q классическое левое и правое кольцо частных для алгебры A, через $\mathcal{C}$ — центр алгебры Q. Зададим на Q структуру $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модуля по правилу $(c \otimes q) \cdot r = cqr$, где

$c \in \mathcal{C}$, $q, r \in Q$. Тогда согласно лемме 3.2 на $\mathrm{Hom}(H, Q^l)$ определена структура $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модуля, причем для любых $c \in \mathcal{C}$, $q \in Q$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q^l)$ и $h \in H$

$$[(c \otimes q)f](h) = \sum [h_{(1)}(c \otimes q)]f(h_{(2)}) = \sum (c \otimes h_{(1)}q)f(h_{(2)}) = \sum c(h_{(1)}q)f(h_{(2)}) =$$
$$= \sum \beta_0(c \otimes q)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = [\beta_0(c \otimes q)f](h),$$

где β_0 — вложение из леммы 1.4. Значит, $(c \otimes q)f = \beta_0(c \otimes q)f$ для любых $c \in \mathcal{C}$, $q \in Q$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q^l)$. Заметим, что $\rho(a) = \beta_0(1 \otimes a)$ для любого $a \in A$.

Предложение 3.2. *Пусть H — алгебра Хопфа размерности n, а A — H-первичная H-модульная* PI*-алгебра. Предположим, что классическое левое и правое кольцо частных Q для алгебры A является свободным модулем ранга r над своим центром $\mathcal{C}$. Тогда существует $l > 0$ такое, что алгебра $\mathrm{Hom}(H, Q^l)$ является свободным $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модулем ранга $\frac{rln}{d}$, где $d = \dim_{\mathcal{C}^H} Q$.*

Доказательство. Заметим, что алгебра $\mathcal{C}$ является конечномерным векторным пространством над полем $\mathcal{C}^H$. Пусть $\{P_i\}_{i \in \overline{1,m}}$ — все максимальные идеалы алгебры $\mathcal{C}$. Обозначим $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}/P_i$, $Q_i = Q/P_iQ$, $\pi_i : Q \to Q_i$ — каноническая проекция. Тогда в силу леммы 2.1 алгебра $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ является H-простой артиновой справа и слева H-модульной алгеброй. Так как $\pi_i(J) \neq 0$ для любого ненулевого H-инвариантного идеала J алгебры A, то согласно лемме 1.3 отображение β_{π_i} является вложением H-модульной алгебры $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ в H-модульную алгебру $\mathrm{Hom}(H, Q_i)$.

Зададим на алгебре Q_i структуру левого $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модуля по правилу $(c \otimes q)r = c\pi_i(q)r$. Тогда в силу леммы 3.3 модуль $\mathrm{Hom}(H, Q_i^{l_i})$ является свободным левым $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модулем при некотором $l_i > 0$. Причем в силу леммы 3.2

$$[(c \otimes q)f](h) = \sum (c \otimes h_{(1)}q)f(h_{(2)}) = \sum c\pi_i(h_{(1)}q)f(h_{(2)}) =$$
$$= \sum \beta_{\pi_i}(c \otimes q)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = [\beta_{\pi_i}(c \otimes q)f](h),$$

где $c \in \mathcal{C}_i$, $q \in Q$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q_i^{l_i})$ и $h \in H$.

Пусть l — наименьшее общее кратное l_i, тогда для каждого i существует p_i такое, что $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модули $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ и $(\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q)^{p_i}$ изоморфны. Заметим, что Q_i имеет размерность r над полем $\mathcal{C}_i$ и для любых $c \in \mathcal{C}_i$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ и $h \in H$

$$((c \otimes 1)f)(h) = cf(h).$$

Таким образом, $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ имеет размерность rln над полем $\mathcal{C}_i \otimes 1$. Так как $\dim_{\mathcal{C}_i} \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q = \dim_{\mathcal{C}^H} Q = d$, то $p_i = \frac{rln}{d}$, а значит, не зависит от максимального идеала P_i.

Заметим, что $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$ является свободным $\mathcal{C} \otimes 1$-модулем ранга d и

$$\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q/(P_i \otimes 1)(\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q) = \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}^H} Q.$$

Так как для любых $c \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q^l)$ и $h \in H$

$$((c \otimes 1)f)(h) = cf(h),$$

то $\mathrm{Hom}(H, Q^l)$ является проективным $\mathcal{C} \otimes 1$-модулем постоянного ранга lrn и

$$\mathrm{Hom}(H, Q^l)/((P_i \otimes 1)\,\mathrm{Hom}(H, Q^l)) \cong \mathrm{Hom}(H, Q_i^l).$$

Теперь, применяя лемму 3.1, получаем, что алгебра $\mathrm{Hom}(H, Q^l)$ является свободным $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}^H} Q$-модулем. □

Пусть A — коммутативное кольцо, M — проективный модуль постоянного ранга, $\psi \in \mathrm{End}(M)$, тогда определен характеристический многочлен $P(x) \in A[x]$ эндоморфизма ψ ([2], с. 173, упражнение 9). Причем $P(\psi) = 0$. Отметим несколько свойств характеристических многочленов.

1) Для каждого $r > 0$ определим эндоморфизм ϕ модуля M^r по правилу $\phi(m_1, ..., m_r) = (\psi(m_1), \ldots, \psi(m_r))$, тогда характеристический многочлен эндоморфизма ϕ равен $P^r(x)$.
2) Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм коммутативных колец, тогда характеристический многочлен эндоморфизма $\mathrm{id} \otimes \psi \in \mathrm{End}(B \otimes_A M)$ равен $f^x(P)$, где $f^x : A[x] \to B[x]$ такое расширение гомоморфизма f, что $f^x(x) = x$.

Теорема 3.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная алгебра, которая имеет конечное число H-первичных идеалов $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ таких, что $\bigcap P_i = 0$. Тогда если алгебра A является проективным модулем постоянного ранга над своим центром Z, то алгебра A цела над подалгеброй центральных инвариантов Z^H.*

Доказательство. Пусть A является проективным модулем постоянного ранга r над своим центром Z, $\{P_i\}_{i\in\overline{1,m}}$ — минимальные H-первичные идеалы алгебры A. Тогда $\bigcap P_i = 0$. Обозначим $Q_i = Q_H(A/P_i)$. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что кольцо частных алгебры A изоморфно $Q = \prod_{i=1}^m Q_i$. Обозначим через $\pi_i : Q \to Q_i$ проекцию на i-й сомножитель.

Также по предложению 3.1 $Q = AS^{-1}$, где S — множество неделителей нуля в Z. Таким образом, центр алгебры Q совпадает с ZS^{-1}, обозначим его через $\mathcal{C}$. Значит, алгебра Q является проективным модулем постоянного ранга r над своим центром $\mathcal{C}$, причем центр $\mathcal{C}$ является коммутативным артиновым кольцом. В силу ([18], с. 111, теорема 8.7) алгебра $\mathcal{C}$ разлагается в конечное прямое произведение артиновых локальных колец. Следовательно, алгебра Q является свободным модулем ранга r над своим центром $\mathcal{C}$. Значит, для каждого i алгебра Q_i является свободным модулем ранга r над своим центром $\pi_i(\mathcal{C})$. Обозначим $\mathcal{C}_i = \pi_i(\mathcal{C})$, $A_i = \pi_i(A) \cong A/P_i$.

По предложению 3.2 для каждого i существует $l_i > 0$ такое, что $\mathrm{Hom}(H, Q_i^{l_i})$ является свободным $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$-модулем. Пусть l — наименьшее общее кратное $\{l_i\}_{i\in\overline{1,m}}$. Тогда $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ является свободным $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$-модулем ранга p_i. Обозначим $n = \dim H$, $d_i = \dim_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$. Заметим, что $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$ является свободным $\mathcal{C}_i \otimes 1$-модулем ранга d_i. Так как алгебра Q_i является проективным $\mathcal{C}_i$-модулем постоянного ранга r, то $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ является проективным $\mathcal{C}_i \otimes 1$-модулем постоянного ранга rln. Таким образом, $p_i = \frac{rln}{d_i}$.

Далее будем отождествлять элементы из $\mathcal{C}_i$ с элементами $\mathcal{C}_i \otimes 1 \subseteq \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$, а модули $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ и $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$ рассматривать как свободные $\mathcal{C}_i$-модули рангов rln и d_i соответственно. Заметим, что для любого $c \in \mathcal{C}_i$, $f \in \mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ и $h \in H$

$$(cf)(h) = ((c \otimes 1)f)(h) = cf(h).$$

Зададим на $\mathrm{Hom}(H, A^l)$ структуру левого Z-модуля по правилу

$$(zf)(h) = zf(h),$$

где $z \in Z$, $f \in \mathrm{Hom}(H, A^l)$, $h \in H$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(H, A^l)$ является проективным Z-модулем постоянного ранга rln. Заметим, что $S^{-1}\,\mathrm{Hom}(H, A^l) \cong \mathrm{Hom}(H, Q^l)$ как $\mathcal{C}$-модули.

Пусть $a \in A$. Умножение слева на $\rho(a) \in \mathrm{Hom}(H, A)$ элементов из $\mathrm{Hom}(H, A^l)$ задает эндоморфизм Z-модуля $\mathrm{Hom}(H, A^l)$, обозначим его через ψ. Таким образом, определен характеристический многочлен $P(x) \in Z[x]$ эндоморфизма ψ. Эндоморфизм ψ продолжается

до эндоморфизма $\mathcal{C}$-модуля $\mathrm{Hom}(H, Q^l)$, обозначим его через ϕ. Заметим, что характеристический многочлен эндоморфизма ϕ совпадает с $P(x)$.

Так как отображение $\gamma_i : \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}} Q \to Q_i$, определенное по правилу $\gamma_i(c \otimes q) = c\pi_i(q)$, является изморфизмом $\mathcal{C}_i$-алгебр, то отображение $\zeta_i : \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(H, Q) \to \mathrm{Hom}(H, Q_i)$, определенное по правилу $\zeta_i(c \otimes f)(h) = \gamma_i(c \otimes f(h))$, — также изморфизм $\mathcal{C}_i$-алгебр. Следовательно, $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(H, Q^l) \cong \mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ как $\mathcal{C}_i$-модули.

Таким образом, для каждого i определен эндоморфизм $\phi_i = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_i} \otimes \phi$ свободного $\mathcal{C}_i$-модуля $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$. Заметим, что характеристический многочлен эндоморфизма ϕ_i равен $\pi_i^x(P)$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(H, Q^l)$ и $h \in H$, тогда для элемента $1 \otimes f \in \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(H, Q^l)$

$$\begin{aligned}\phi_i(1 \otimes f)(h) = (1 \otimes \phi(f))(h) = 1 \otimes \phi(f)(h) = 1 \otimes (\rho(a)f)(h) = \\ = 1 \otimes \sum \rho(a)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = \sum (1 \otimes h_{(1)}a)(1 \otimes f(h_{(2)})) = \\ = (1 \otimes \rho(a))(1 \otimes f)(h).\end{aligned}$$

Таким образом, эндоморфизм ϕ_i задается умножением слева на элемент $\zeta_i(1 \otimes \rho(a))$. Пусть $h \in H$, тогда $\zeta_i(1 \otimes \rho(a))(h) = \pi_i(ha) = h\pi_i(a) = \beta_0(1 \otimes \pi_i(a))(h)$. Значит, эндоморфизм ϕ_i задается умножением слева на элемент $1 \otimes \pi_i(a) \in \mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$.

Умножение слева на $\pi_i(a) \in Q_i$ элементов из Q_i задает эндоморфизм $\mathcal{C}_i^H$-модуля Q_i, обозначим его через η_i. Таким образом, для каждого i определен характеристический многочлен $G_i(x) \in \mathcal{C}_i^H[x]$ эндоморфизма η_i. Заметим, что характеристический многочлен эндоморфизма $\mathrm{id} \otimes \eta_i$ модуля $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$ над кольцом $\mathcal{C}_i$ совпадает с многочленом $G_i(x)$. Так как $\mathrm{Hom}(H, Q_i^l)$ является свободным левым $\mathcal{C}_i \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i$-модулем ранга p_i, то характеристический многочлен эндоморфизма ϕ_i совпадает с $G_i^{p_i}(x)$. Таким образом, $\pi_i^x(P)(x) = G_i^{p_i}(x)$. Значит, коэффициенты характеристического многочлена эндоморфизма ϕ_i являются инвариантными. Пусть $c_k \in Z$ коэффициент многочлена $P(x)$ перед степенью x^k, тогда для любых $h \in H$ и $i \in \overline{1,m}$

$$\pi_i(hc_k - \varepsilon(h)c_k) = h\pi_i(c_k) - \varepsilon(h)\pi_i(c_k) = 0.$$

Так как $\bigcap\limits_i \ker(\pi_i) = 0$, то $c_k \in Z^H$. Таким образом, $P(x) \in Z^H[x]$, причем $P(\rho(a)) = 0$. Так как $P(a) = P(\rho(a))(1) = 0$, значит, элемент a цел над Z^H. Следовательно, алгебра A цела над подалгеброй центральных инвариантов Z^H. □

Заметим, что второй случай из работы [8] также может быть обобщен на случай H-модульной PI-алгебры, которая имеет конечное число H-первичных идеалов с нулевым пересечением.

Предложение 3.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная алгебра, которая имеет конечное число H-первичных идеалов $\{P_i\}_{i=1}^n$ таких, что $\bigcap P_i = 0$, Z — подалгебра алгебры A, которая содержится в центре алгебры A и целозамкнута в центре кольца частных алгебры A. Тогда если алгебра A является конечно порожденным Z-модулем и $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_Z(z)A$ для любого $z \in Z$, то алгебра A цела над подалгеброй $Z^H = A^H \cap Z$.*

Доказательство. Пусть A является конечно порожденным Z-модулем и $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_Z(z)A$ для любого $z \in Z$, $\{P_i\}_{i \in \overline{1,m}}$ — минимальные H-первичные идеалы алгебры A. Тогда $\bigcap P_i = 0$. Обозначим $A_i = A/P_i$ $Q_i = Q_H(A_i)$. В силу предложения 3.1 кольцо частных алгебры A изоморфно $Q = AS^{-1}$, где S — множество неделителей нуля в Z. Обозначим $\mathcal{C}' = ZS^{-1}$. Таким образом, центр алгебры Q совпадает с $Z(A)S^{-1} = Z(A)\mathcal{C}'$, обозначим его

через $\mathcal{C}$. Также из доказательства теоремы 2.3 следует $Q = \prod_{i=1}^{m} Q_i$. Значит, $1_Q = \sum_{i=1}^{m} e_i$, где e_i — центральные ортогональные идемпотенты в Q. Тогда в силу целозамкнутости Z в $\mathcal{C}$ элементы $e_i \in Z$. Следовательно, $A = \prod_{i=1}^{m} A_i$, $Z = \prod_{i=1}^{m} Z_i$ и $S = \prod_{i=1}^{m} S_i$, где $Z_i = Z/P_i \cap Z$, S_i — множество неделителей нуля в Z_i. Так как $Q = AS^{-1}$, то $Q_i = A_i S_i^{-1}$. Заметим, что для каждого i, $1 \le i \le m$, алгебра A_i является конечно порожденным Z_i-модулем, причем подалгебра Z_i целозамкнута в центре алгебры Q_i. Таким образом, достаточно показать, что для каждого i, $1 \le i \le m$, алгебра A_i цела над подалгеброй Z_i^H.

Пусть i, $1 \le i \le m$, и $a \in A_i$. Обозначим $\mathcal{C}_i = Z(Q_i)$, $\mathcal{C}_i' = Z_i S_i^{-1} \subseteq \mathcal{C}_i$. Так как алгебра Q_i имеет конечную размерность над полем центральных инвариантов $\mathcal{C}_i^H$, то существует многочлен $P(x) \in \mathcal{C}_i^H[x]$ минимальной степени такой, что $P(a) = 0$. Покажем, что коэффициенты многочлена $P(x)$ целы над Z_i.

Пусть M — максимальный идеал алгебры Q_i. Обозначим $\overline{Q}_i = Q_i/M$, $\mathcal{F} = Z(\overline{Q}_i)$, $\overline{A}_i = A_i/M \cap A_i$, $\overline{Z}_i = Z_i/M \cap Z_i \subseteq \mathcal{F}$, $\pi_M : Q_i \to \overline{Q}_i$ — каноническая проекция. Зададим на $\operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$ структуру левого $\overline{Z}_i$-модуля по правилу $(zf)(h) = zf(h)$, где $z \in \overline{Z}_i$, $f \in \operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$, $h \in H$. Аналогичным образом на $\operatorname{Hom}(H, \overline{Q}_i)$ зададим структуру левого $\pi_M(\mathcal{C}_i')$-модуля. Заметим, что $\operatorname{Hom}(H, \overline{Q}_i) = S_i^{-1} \operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$.

Умножение слева на $\pi_M \circ \rho(a) \in \operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$ элементов из $\operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$ задает эндоморфизм конечно порожденного $\overline{Z}_i$-модуля $\operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$, обозначим его через ψ_M. Эндоморфизм ψ_M продолжается до эндоморфизма $\pi_M(\mathcal{C}_i')$-модуля $\operatorname{Hom}(H, \overline{Q}_i)$, обозначим его через ϕ_M. Пусть элементы $\{f_1, \ldots, f_r\}$ порождают $\operatorname{Hom}(H, \overline{A}_i)$ как $\overline{Z}_i$-модуль. Тогда существуют $z_{k,l} \in Z_i$ такие, что $\phi_M(f_k) = \sum_{l=1}^{r} \pi_M(z_{k,l}) f_l$. Обозначим через B матрицу составленную из элементов $\pi_M(z_{k,l})$, а через $G_M(x) \in \overline{Z}_i[x]$ — характеристический многочлен матрицы B. Заметим, что в силу теоремы Гамильтона–Кэли $G_M(\phi_M) = G_M(\psi_M) = 0$. Так как эндоморфизм ϕ_M задается умножением слева на $\pi_M \circ \rho(a)$, то $G_M(\pi_M \circ \rho(a)) = 0$. Обозначим $K = M \cap A_i$. По лемме 2.2 идеал K является первичным, причем $K_H = 0$. Заметим, что $\pi_M \circ \rho(a) = \beta_K(1 \otimes a)$, где $\beta_K : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}_i^H} Q_i \to \operatorname{Hom}(H, \overline{Q}_i)$ — вложение H-модульных алгебр из леммы 1.4. Таким образом, $G_M(1 \otimes a) = 0$. Так как $\pi_M^x(P)(1 \otimes a) = 1 \otimes P(a) = 0$, то многочлен $G_M(x)$ делится на многочлен $\pi_M^x(P)(x)$. Значит, каждый корень многочлена $\pi_M^x(P)(x)$ цел над $\overline{Z}_i$. Следовательно, каждый коэффициент многочлена $\pi_M^x(P)(x)$ также цел над $\overline{Z}_i = \pi_M(Z_i)$. Обозначим через $q_k \in \mathcal{C}_i^H$ коэффициент многочлена $\pi_M^x(P)(x)$ перед x^k. Таким образом, для каждого максимального идеала M алгебры Q_i и для каждого $k \in \overline{0, \deg(P) - 1}$ существует многочлен $R_{k,M}(x) \in Z_i[x]$ такой, что $R_{k,M}(q_k) \subseteq M$.

Пусть $\{M_j\}_{j \in \overline{1,s}}$ — максимальные идеалы алгебры Q_i, тогда $\bigcap_j M_j = J$, где J — радикал Джекобсона алгебры Q_i. Существует $l > 0$ такое, что $J^l = 0$. Обозначим $H_k(x) = \Big(\prod_{j=1}^{s} R_{k,M_j}(x) \Big)^l$. Тогда $H_k(q_k) = 0$ для каждого $k \in \overline{0, \deg(P) - 1}$. Значит, коэффициенты многочлена $P(x)$ целы над Z_i. В силу целозамкнутости Z_i в алгебре $\mathcal{C}_i$ многочлен $P(x) \in Z_i^H$. Таким образом, элемент a цел над Z_i^H. Следовательно, для каждого $i \in \overline{1, m}$ алгебра A_i цела над подалгеброй Z_i^H и алгебра A цела над подалгеброй Z^H.

Литература

[1] Sweedler M.E. *Hopf algebras* (Benjamin, New York, 1969).

[2] Бурбаки Н. *Коммутативная алгебра* (Мир, М., 1971).
[3] Montgomery S. *Hopf algebras and their actions on rings* (CBMS Reg. Conf. Ser. Math. 85, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993).
[4] Skryabin S.M. *Invariants of finite Hopf algebras*, Advances in Math. **183** (2), 209–239 (2004).
[5] Артамонов В.А. *Инварианты алгебр Хопфа*, Вестн. МГУ. Сер. 1, матем. механ., №4, 45–49 (1996); Исправление Вестн. МГУ. Сер. 1, матем. механ., №2, 64 (1997).
[6] Zhu Shenglin. *Integrality of module algebras over its invariants*, J. Algebra **180** (1), 187–205 (1996).
[7] Тоток А.А. *Об инвариантах конечномерных точечных алгебр Хопфа*, Вестн. МГУ. Сер. 1, матем. механ., №3, 31–34 (1997).
[8] Etingof P. *Galois bimodules and integrality of* PI *comodule algebras over invariants*, J. of noncommutative geometry **9** (2), 567–602 (2015).
[9] Еряшкин М.С. *Инварианты действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида*, Изв. вузов. Матем., №8, 14–22 (2011).
[10] Еряшкин М.С. *Кольца Мартиндейла и H-модульные алгебры, обладающие инвариантными характеристическими многочленами*, Сиб. матем. журн. **53** (4), 822–838 (2012).
[11] Cohen M. *Smash products, inner actions and quotient rings*, Pacific J. Math. **125** (1), 45–66 (1986).
[12] Montgomery S., Schneider H.J. *Prime ideals in Hopf Galois extensions*, Israel J. Math. **112** (1), 187–235 (1999).
[13] Passman D. *Infinite crossed products* (Academic Press, London, 1989).
[14] Skryabin S.M. *Structure of H-semiprime artinian algebras*, Algebr. Represent. Theor., **14** (5), 803–822 (2011).
[15] Lomp C. *A central closure construction for certain algebra extensions. Applications to Hopf actions*, J. Pure Appl. Algebra **198** (1–3), 297–316 (2005).
[16] Robson J.C., Small L.W. *Liberal extensions*, Proc. London Math. Soc. **42** (1), 87–103 (1981).
[17] McConnell J.C., Robson J.C. *Noncommutative Noetherian rings* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001).
[18] Атья М., Макдональд И. *Введение в коммутативную алгебру* (Мир, М., 1972).
[19] Larson R.G., Sweedler M.E. *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*, Amer. J. Math. **91** (1), 75–94 (1969).

М.С. Еряшкин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Mikhail.Eryashkin@gmail.com

M.S. Eryashkin

Invariants and rings of quotients of H-semiprime H-module algebra satisfying a polynomial identity

Abstract. We consider an action of a finite-dimensional Hopf algebra H on a PI-algebra. We prove that an H-semiprime H-module algebra A has a Frobenius artinian classical ring of quotients Q if A has a finite set of H-prime ideals with zero intersection. The ring of quotients Q is an H-semisimple H-module algebra and finitely generated module over the subalgebra of central invariants. Moreover, if the algebra A is projective module of constant rank over its center then A is integral over the subalgebra of central invariants.

Keywords: Hopf algebras, invariant theory, PI-algebras, rings of quotients.

M.S. Eryashkin

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Mikhail.Eryashkin@gmail.com