С. В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, том 10, выпуск 4, 93–94

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10. вып. 4, 1976, 93—94.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДИНАМИКИ n-МЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

С. В. Манаков

Как выяснил В. И. Арнольд [1], уравнения Эйлера свободного вращения твердого тела имеют естественные аналоги на произвольных алгебрах Ли. Например, если u — алгебра Ли группы $O(n)$, т. е. алгебра вещественных кососимметрических матриц $n \times n$ с обычной операцией коммутирования, и A — линейный оператор в u, $A: u \to u$, $\Omega \in u$, $A\Omega = M$, то уравнения Эйлера — Арнольда имеют вид

$$\dot{M} = [M, \Omega]. \tag{1}$$

Из (1) следует, что собственные числа матрицы M сохраняются во времени, т. е. следы степеней M являются интегралами движения, $I_k = \operatorname{tr} M^{2k}$ $\left(k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. На каждом инвариантном многообразии, выделяемом этими условиями, (1) представляет собой гамильтонову систему (см. [1]).

Интересным примером уравнений Эйлера на группе $O(n)$ является уравнение свободного вращения n-мерного твердого тела. В этом случае $A\Omega = J \cdot \Omega + \Omega \cdot J$, где J — симметричная положительно определенная матрица (тензор инерции), которую всегда можно считать диагональной, и (1) переписывается в виде

$$J\dot{\Omega} + \dot{\Omega}J = [J, \Omega^2]. \tag{2}$$

Уравнение (2) при произвольном n впервые рассматривал А. С. Мищенко [2], обнаруживший серию нетривиальных квадратичных интегралов уравнения (2) вида $C_s = \sum_{k=0}^{s} \operatorname{tr}(\Omega J^k \Omega J^{s-k+1})$ $(0 \leqslant s \leqslant n-2;\ s \neq 1)$. C_s функционально независимы и, как показал Л. А. Дикий [3], инволютивны. При $n = 4$ в силу теоремы Лиувилля интегралов Мищенко достаточно для доказательства полной интегрируемости уравнений Эйлера четырехмерного твердого тела; однако эффективное решение задачи, т. е. описание движения явными формулами, даже для $n = 4$ отсутствует. Одако имеет место следующая

Т е о р е м а. *Уравнение* (2) *при любом* n *имеет* $N(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{n(n-1)}{4}$ *однозначных интегралов движения, а его общее решение выражается через* θ-*функции римановых поверхностей.*

Доказательство основывается на следующей основной лемме.

Л е м м а. *Уравнения Эйлера динамики* n-*мерного твердого тела* (2) *имеют при любом* n *представление в форме Лакса на матрицах, линейно зависящих от произвольного* $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\frac{d}{dt}(M + J^2\lambda) = [M + J^2\lambda, \Omega + J\lambda]. \tag{3}$$

Уравнение (3) означает, что полиномы $P_k(\lambda) = \operatorname{tr}(M + J^2\lambda)^k$ $(k = 2, \ldots, n)$ не зависят от времени. Таким образом, коэффициенты $P_k(\lambda)$ — суть интегралы движения. Из кососимметричности M и симметричности J следует, что коэффициент $P_k(\lambda)$ при λ^s отличен от нуля, только если s имеет ту же четность, что и k; подсчет $N(n)$ при этом не вызывает затруднений.

Доказательство второй части теоремы состоит из ссылки на теорему Дубровина (см. § 2 главы 3 обзора [4]), утверждающую, что любое уравнение вида $[a\dot{V}] = [[aV], [bV]]$, где a, b — произвольные диагональные матрицы, а V — любая матрица с нулевыми элементами на диагонали, интегрируется в θ-функциях римановых поверхностей. Поскольку при вещественных a и b множество симметричных матриц V является инвариантным многообразием этого уравнения, можно положить $a = J^2$, $b = J$,

$$[aV] = M, \qquad [bV] = \Omega. \tag{4}$$

Замечание 1. Теорема переносится без изменений на любое уравнение Эйлера на группе $O(n)$, если отображение $A\colon u \to u$, $A\Omega = M$, задается формулами (4). В координатной записи:

$$M_{ij} = \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}\,\Omega_{ij}.$$

Замечание 2. При выполнении (4) уравнение (1) представляет собой «стационарную точку» $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0\right)$ интегрируемого с помощью метода обратной задачи рассеяния уравнения $M_t - \Omega_x = [M, \Omega]$ (см. [5]). Механизм интегрирования стационарных точек таких систем был открыт С. П. Новиковым (см. [4]) на примере уравнения Кортевега — де Фриза и обобщен Дубровиным на матричные системы.

Замечание 3. Теорема Дубровина содержит утверждение о полной интегрируемости гамильтоновой системы уравнений для матрицы V. Однако при ограничении на симметричные матрицы использованная Дубровиным симплектическая форма вырождается. Поэтому вопрос об интегрируемости уравнений Эйлера требует специального обсуждения. Очевидно, что при сужении на орбиту коприсоединенного представления число «выживающих» интегралов движения в точности равно половине размерности орбиты при любом n. Нетрудно убедиться, что все они находятся в инволюции (ср. [3]). Однако доказательство функциональной независимости найденных интегралов автору не известно.

Автор благодарен С. П. Новикову и Л. Д. Фаддееву за полезное обсуждение.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР

Поступило в редакцию 6 мая 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., «Наука», 1974. 2. Мищенко А. С., Функц. анализ **4**, вып. 3 (1970), 73—78. 3. Дикий Л. А., Функц. анализ **6**, вып. 4 (1972), 83—84. 4. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., УМН **XXXI**, вып. 1 (187), (1976), 55—136. 5. Захаров В. Е., Манаков С. В., Точная теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах, препринт ИЯФ 74—41, Новосибирск, 1974.