Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Гомологии пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}$,
Фундамент. и прикл. матем., 2014, том 19, выпуск 1, 45–63

https://www.mathnet.ru/fpm1568

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
16 января 2026 г., 06:59:52

Гомологии пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}$*

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 515.1

Ключевые слова: пространства модулей, гомологии.

Аннотация

Мы рассматриваем открытое пространство $\mathcal{M}_{2,1}$ модулей комплексных кривых рода 2 с одной отмеченной точкой. На языке хордовых диаграмм мы описываем клеточную структуру пространства $\mathcal{M}_{2,1}$ и структуру примыкания клеток. Это позволяет нам построить матрицы граничных операторов и найти числа Бетти пространства $\mathcal{M}_{2,1}$ над $\mathbb{Q}$.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Homologies of moduli space $\mathcal{M}_{2,1}$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 45—63.

We consider the open moduli space $\mathcal{M}_{2,1}$ of complex curves of genus 2 with one marked point. Using the language of chord diagrams, we describe the cell structure of $\mathcal{M}_{2,1}$ and cell adjacency. This allows us to construct matrices of boundary operators and compute Betty numbers of $\mathcal{M}_{2,1}$ over $\mathbb{Q}$.

1. Введение

Мы будем говорить, что граф G правильно вложен в топологическую компактную ориентированную поверхность S, если его дополнение гомеоморфно двумерному диску. Если граф G правильно вложен в S и заданы длины его рёбер, то конструкция Дженкинса—Штребеля позволяет однозначно задать комплексную структуру на S (см. [4]). В дальнейшем мы будем считать, что сумма длин рёбер вложенного графа равна 1.

Обозначим через $\mathcal{M}_{2,1}$ открытое пространство модулей комплексных кривых рода 2 с одной отмеченной точкой. Топологический клеточный комплекс $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$, гомеоморфный пространству $\mathcal{M}_{2,1}$, имеет следующее комбинаторное описание (см. [1, гл. 4]). Рассмотрим множество всех попарно неизоморфных графов, правильно вложенных в S_2 — компактную топологическую поверхность рода 2.

*Работа была поддержана РФФИ, грант № 11-01-00465а.

© 2014 *Издательский дом «Открытые системы»*

Здесь изоморфизм понимается как изоморфизм вложенных графов, т. е. он должен сохранять циклический порядок рёбер при обходе каждой вершины против часовой стрелки.

Такому графу Γ с s рёбрами ставится в соответствие клетка Δ_Γ, изометричная стандартному симплексу $\{x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}^s \mid x_1 + \ldots + x_s = 1,\ x_1, \ldots, x_s > 0\}$. Здесь числа $x_1, \ldots, x_s$ — это длины рёбер графа Γ. Клетки старшей размерности 8 отвечают правильно вложенным тривалентным графам, т. е. графам, у которых степень каждой вершины равна 3. Правильно вложенный в S_2 тривалентный граф имеет шесть вершин и девять рёбер.

Если граф Γ' получен из графа Γ стягиванием ребра, то графу Γ' отвечает грань симплекса Δ_Γ.

Правильно вложенный граф Γ может иметь нетривиальную группу автоморфизмов. Действие этой группы определено и на симплексе Δ. Клетка пространства $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$ — это симплекс Δ, если соответствующий граф не имеет нетривиальных автоморфизмов, или симплекс Δ, факторизованный по действию этой группы.

Так определённое пространство $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$ *не компактно*. В этой работе мы найдём его гомологии над $\mathbb{Q}$.

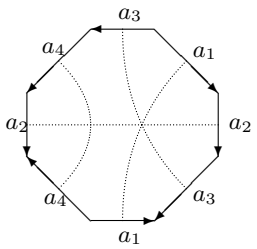
2. Графы, склейки и диаграммы

Топологическая поверхность S_2 с правильно вложенным тривалентным графом на ней реализуется при некоторых склейках 18-угольника. Здесь условие односвязности дополнения до графа выполняется автоматически, а условия тривалентности и рода дают девять попарно неизоморфных склеек (две склейки $2n$-угольника мы считаем изоморфными, если некоторый поворот $2n$-угольника переводит одну склейку в другую). Группа автоморфизмов графа — это циклическая группа тех поворотов склейки, которые переводят её в себя. Комбинаторика клеток старшей размерности описана в [2].

Стягиванию ребра графа отвечает удаление пары отождествляемых сторон соответствующей склейки. Так что клеткам размерности 7 отвечают склейки 16-угольников, а клеткам размерности 6 — склейки 14-угольников.

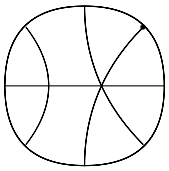
Перечислять склейки мы будем с помощью схем хордовых диаграмм.

Пример 1. Гауссово слово $a_1a_2a_3a_1^{-1}a_4a_2^{-1}a_4^{-1}a_3^{-1}$, описывающее склейку восьмиугольника



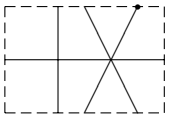
,

мы будем записывать как строку 12314243, а склейку представлять как хордовую диаграмму



,

упрощая её до схемы



.

Точкой на диаграмме (схеме) отмечено начало нумерации хорд (по часовой стрелке).

В приложениях 1—6 перечислены все схемы склеек, с которыми мы будем иметь дело. Склейка (и её схема) будет обозначаться $\gamma(k)_l$, где k — число рёбер соответствующего графа, а l — номер склейки в списке склеек $2k$-угольников. Для каждой склейки приведена схема её хордовой диаграммы, гауссово слово и группа автоморфизмов (если склейка имеет нетривиальную группу автоморфизмов). Гауссово слово задаёт нумерацию хорд схемы, которую мы будем называть *стандартной*.

Все перечисленные в приложениях хордовые диаграммы описывают кривую рода 2 с правильно вложенным графом. Каждая хордовая диаграмма $\gamma(k)_i$, $k = 8, 7, 6, 5, 4$, получена из некоторой хордовой диаграммы $\gamma(k+1)_j$ с помощью удаления одной из хорд.

Схема $\gamma(k)_i$ задаёт клетку размерности $k-1$ в пространстве модулей $\mathcal{M}_{2,1}$. $(k-2)$-мерную границу этой клетки образуют клетки, отвечающие тем схемам рода 2, которые получены из схемы $\gamma(k)_i$ удалением одной хорды.

Склейку $2n$-угольника (схему склейки) мы называем симметричной, если её группа автоморфизмов нетривиальна. Эта группа является циклической группой вращений $2n$-угольника. Так как стороны $2n$-угольника (хорды диаграммы) пронумерованы, то образующий элемент группы автоморфизмов задаёт некоторую перестановку из S_n. Мы будем называть склейку (схему) *чётно-симметричной*, если эта перестановка чётна, и *нечётно-симметричной* в противном случае.

Клетку пространства $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$ мы будем называть *простой*, если она является симплексом. Клетку (факторизованный симплекс) мы будем называть *особой чётной*, если соответствующая склейка чётно-симметрична, и *особой нечётной* в противном случае.

Топологическое пространство $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$ состоит из следующих клеток (см. приложения 1—6):

— 9 клеток размерности 8: 3 простые, 5 получены факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, а одна — по действию группы $\mathbb{Z}_3$ (все особые клетки здесь чётные);
— 29 клеток размерности 7: 24 простые, 4 получены факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, а одна — по действию группы $\mathbb{Z}_4$ (только эта клетка — $\delta(7)_{20}$ — является особой нечётной);
— 52 клеток размерности 6: 41 простая, 11 получены факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$ (из этих клеток две — $\delta(6)_{39}$ и $\delta(6)_{40}$ — являются особыми чётными, остальные особые нечётные);
— 45 клеток размерности 5: 37 простые, 5 получены факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, одна — по действию группы $\mathbb{Z}_3$, одна — по действию группы $\mathbb{Z}_4$ и одна — по действию группы $\mathbb{Z}_6$ (из этих клеток две — $\delta(5)_{39}$ и $\delta(5)_{41}$ — являются особыми чётными, остальные особые нечётные);
— 21 клетки размерности 4: 14 простые, 5 получены факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, одна — по действию группы $\mathbb{Z}_5$ и одна — по действию группы $\mathbb{Z}_{10}$ (из этих клеток лишь одна — $\delta(4)_{19}$ — является особой нечётной, остальные особые чётные);
— 4 клеток размерности 3: 2 простые, одна получена факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$ и одна — по действию группы $\mathbb{Z}_8$ (здесь клетка $\delta(4)_1$ является особой чётной, а клетка $\delta(4)_4$ — особой нечётной).

Эйлерова характеристика открытого пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}$ равна $9 - 29 + 52 - 45 + 21 - 4 = 4$, его «орбифолдическая» эйлерова характеристика равна

$$\left(3+\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(24+\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(41+\frac{11}{2}\right)-\left(37+\frac{5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+$$
$$+\left(14+\frac{5}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)-\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{120},$$

что согласуется с формулой из [3].

3. Гомологии

Сначала объясним, что такое индуцированная нумерация.

Определение 1. Схему, полученную из схемы γ удалением i-й хорды, мы будем обозначать $\gamma[i]$. Нумерация хорд схемы $\gamma[i]$ определяется следующим образом: если в схеме γ хорда c имеет номер $j < i$, то в схеме $\gamma[i]$ эта хорда имеет тот же номер; если в схеме γ хорда c имеет номер $j > i$, то в схеме $\gamma[i]$ эта хорда имеет номер $j - 1$. Так определённая нумерация хорд схемы $\gamma[i]$ будет называться *индуцированной*. Мы будем использовать обозначения $\gamma[i]_{\mathrm{ind}}$ и $\gamma[i]_{\mathrm{st}}$ (т. е. «стандартная»), если это будет необходимо.

Пусть схеме γ отвечает клетка δ. Тогда клетку, отвечающую схеме $\gamma[i]$, мы будем обозначать $\delta[i]$.

Замечание 1. Так как $\gamma[i] = \gamma(p)_q$ для некоторых p и q, то схема $\gamma[i]$ имеет как индуцированную, так и стандартную нумерацию. Как правило, они не совпадают.

Определение 2. Пусть $C_k = C_k(\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}, \mathbb{Q})$ — пространство k-мерных цепей с рациональными коэффициентами. Граничный оператор $\partial_k \colon C_k \to C_{k-1}$ ставит в соответствие клетке $\delta(k)_i$ цепь $\sum\limits_{j=1}^{k+1} \alpha_j \delta(k)_i[j] \in C_{k-1}$. Коэффициенты α_j определены следующими условиями.

1. Пусть клетка $\delta(k)_i$ и клетка $\delta(k)_i[j]$ простые. Отождествление схем $\gamma(k+1)_i[j]_{\mathrm{ind}}$ и $\gamma(k+1)_i[j]_{\mathrm{st}}$ требует некоторой перенумерации хорд схемы $\gamma(k+1)_i[j]_{\mathrm{ind}}$, т. е. определяет перестановку из $\sigma \in \mathrm{S}_k$ чётности p, $p = 0, 1$. Теперь положим $\alpha_j = (-1)^{j+p-1}$.
2. Пусть клетка $\delta(k)_i$ простая, а клетка $\delta(k)_i[j]$ особая чётная — симплекс, факторизованный по действию циклической группы порядка m. Отождествление схем $\gamma(k+1)_i[j]_{\mathrm{st}}$ и $\gamma(k+1)_i[j]_{\mathrm{ind}}$ перестановку $\sigma \in \mathrm{S}_k$ однозначно не определяет, но все такие перестановки имеют одну и ту же чётность p. Теперь положим $\alpha_j = (-1)^{j+p-1} m$.
3. Пусть клетка $\delta(k)_i$ простая, а клетка $\delta(k-1)_i[j]$ особая нечётная. В этом случае положим $\alpha_j = 0$.
4. Пусть клетка $\delta(k)_i$ особая чётная и на схеме $\gamma(k+1)_i$ (симплексе $\Delta(k)_i$) действует циклическая группа $\mathbb{Z}_r$. Тогда j-я хорда либо принадлежит орбите кардинальности r, либо сама образует орбиту. В первом случае удаление хорды даёт несимметричную схему и коэффициент α_j вычисляется как в пункте 1. Во втором случае на схеме $\gamma(k+1)_i[j]$ (и на соответствующем симплексе) действует циклическая группа $\mathbb{Z}_q$, причём r делит q. Если схема $\gamma(k+1)_i[j]$ чётно-симметричная, то $\alpha_j = (-1)^{n+p-1} q/r$, где чётность p вычисляется как выше. Если же эта схема нечётно-симметричная, то $\alpha_j = 0$.
5. Пусть клетка $\delta(k)_i$ особая нечётная и на схеме $\gamma(k+1)_i$ (симплексе $\Delta(k)_i$) действует циклическая группа $\mathbb{Z}_r$. Рассмотрим орбиты этого действия на схеме. Если j-я хорда принадлежит орбите кардинальности больше 1, то положим $\alpha_j = 0$. Если же j-я хорда сама образует орбиту, то схема $\gamma(k+1)_i[j]$ нечётно-симметричная и на ней действует циклическая группа $\mathbb{Z}_q$, где r делит q. Тогда $\alpha_j = (-1)^{j+p-1} q/r$.

Замечание 2. Объединение особых нечётных клеток образует подкомплекс в $\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{comb}}$.

В приложениях приведены матрицы граничных отображений.

Теорема 1. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

Доказательство. Пусть γ — некоторая $(k+1)$-схема. Рассмотрим хорды с номерами i и j. Нам нужно доказать, что коэффициент при $\gamma[i][j]$ в $\partial^2(\gamma)$ равен нулю. Если схемы γ, $\gamma[i]$, $\gamma[j]$ и $\gamma[i][j]$ простые, то утверждение вытекает из аналогичного результата для симплициальных гомологий. Это означает,

что (если отвлечься от условий 2—5) знаки переходов $\gamma \to \gamma[i] \to \gamma[i][j]$ и $\gamma \to \gamma[j] \to \gamma[j][i]$ противоположны. Таким образом, осталось учесть условия симметрии. Разберём два типичных случая.

1. Схемы γ, $\gamma[i]$ и $\gamma[i][j]$ простые, а схема $\gamma[j]$ нечётно-симметричная. Пусть φ — образующая группы симметрий схемы $\gamma[j]$, а $i = i_1, \ldots, i_m$ — орбита i-й хорды (здесь m чётно, а $i_2 = \varphi(i_1)$, $i_3 = \varphi^2(i_1), \ldots$). Симметрия φ задаёт новую нумерацию на схеме $\gamma[j]$, в которой i_1-я хорда получает номер i_2. Теперь новая индуцированная нумерация на схеме $\gamma[i][j]$ после удаления i_2-й (бывшей i_1-й) хорды совпадает со старой индуцированной нумерацией на $\gamma[j][i_2]$. Осталось отметить, что в обоих случаях происходит умножение на $(-1)^{i_2-1}$ и что перестановка, отвечающая φ, нечётна.

2. Схемы γ и $\gamma[i]$ просты, схема $\gamma[j]$ нечётно-симметричная, а схема $\gamma[i][j]$ чётно-симметричная. Как выше, пусть φ — образующая группы симметрий схемы $\gamma[j]$, а $i = i_1, \ldots, i_m$ — орбита i-й хорды. Все схемы $\gamma[i_1][j], \ldots, \gamma[i_m][j]$ изоморфны некоторой схеме $\gamma(k)_s$. Пусть p_s — чётность перенумерации от $\gamma[i_s][j]_{\mathrm{st}}$ к $\gamma[i_s][j]_{\mathrm{ind}}$. Очевидно, что $m/2$ этих p_k — нули, а $m/2$ — единицы. $\square$

Сформулируем основной результат работы.

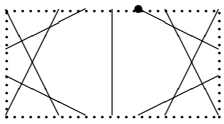
Теорема 2. *Обозначим через M_i матрицу граничного оператора ∂_i. Имеем*

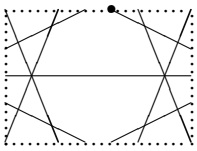
$$\mathrm{rk}(M_8) = 8, \quad \mathrm{rk}(M_7) = 20, \quad \mathrm{rk}(M_6) = 27, \quad \mathrm{rk}(M_5) = 17, \quad \mathrm{rk}(M_4) = 3.$$

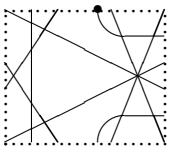
Таким образом, числа Бетти равны

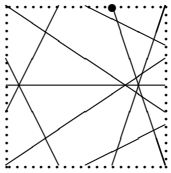
$$b_8 = 1, \quad b_7 = 1, \quad b_6 = 5, \quad b_5 = 1, \quad b_4 = 1, \quad b_3 = 1.$$

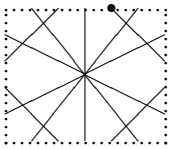
Приложение 1. Схемы девятирёберных склеек

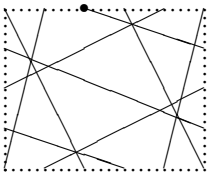
$\gamma(9)_1$: 
123142345678697895 $\mathbb{Z}_2$

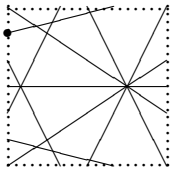
$\gamma(9)_2$: 
123145235678649789 $\mathbb{Z}_2$

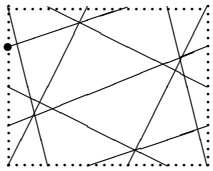
$\gamma(9)_3$: 
123145623678497589

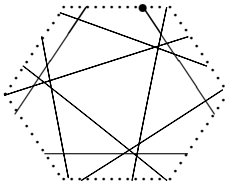
$\gamma(9)_4$: 
123145672378495869

$\gamma(9)_5$: 
123145647812895697 $\mathbb{Z}_2$

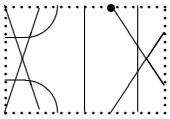
$\gamma(9)_6$: 
123415624785973689 $\mathbb{Z}_2$

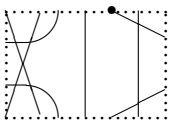
$\gamma(9)_7$: 
123415672485968379

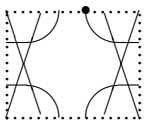
$\gamma(9)_8$: 
123415673859682479 $\mathbb{Z}_2$

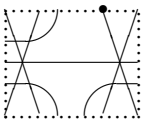
$\gamma(9)_9$: 
123451672586937849 $\mathbb{Z}_3$

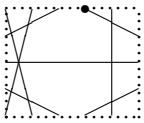
Приложение 2. Схемы восьмирёберных склеек

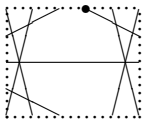
$\gamma(8)_1$: 
1231234567586784

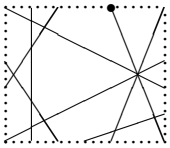
$\gamma(8)_2$: 
1213234567586784

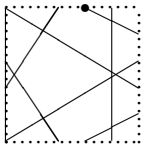
$\gamma(8)_3$: 
1231423456758678 $\mathbb{Z}_2$

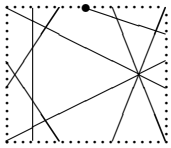
$\gamma(8)_4$: 
1234124567538678

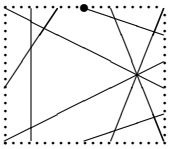
$\gamma(8)_5$: 
1213424567538678

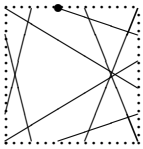
$\gamma(8)_6$: 
1231423567548678

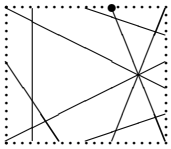
$\gamma(8)_7$: 
1234512567386478

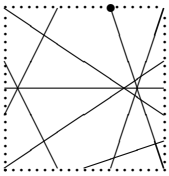
$\gamma(8)_8$: 
1213452568386478

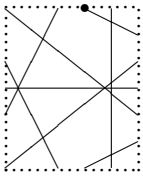
$\gamma(8)_9$: 
1231452367486578

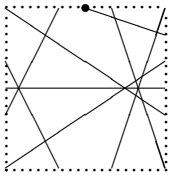
$\gamma(8)_{10}$: 
1231456236748578

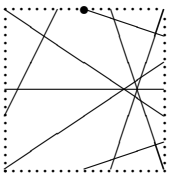
$\gamma(8)_{11}$: 
1231456236748758

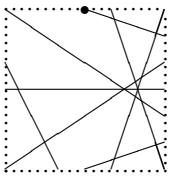
$\gamma(8)_{12}$: 
1231456236784758

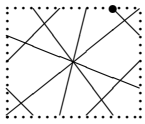
$\gamma(8)_{13}$: 
1234561267384768

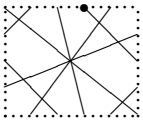
$\gamma(8)_{14}$: 
1213456267384758

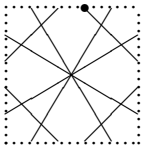
$\gamma(8)_{15}$: 
1231456237384768

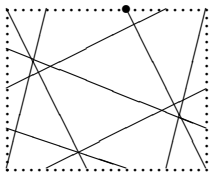
$\gamma(8)_{16}$: 
1231456723748568

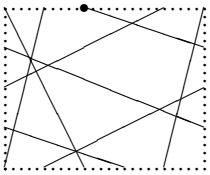
$\gamma(8)_{17}$: 
1231456723784586

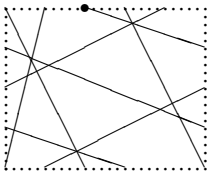
$\gamma(8)_{18}$: 
1213453672784586 $\mathbb{Z}_2$

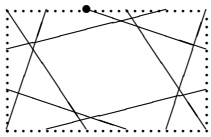
$\gamma(8)_{19}$: 
1231454672378586 $\mathbb{Z}_2$

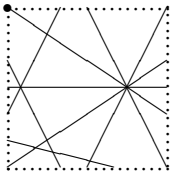
$\gamma(8)_{20}$: 
1231456472378568 $\mathbb{Z}_4$

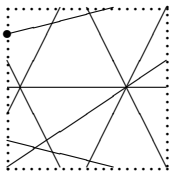
$\gamma(8)_{21}$: 
1234513674862578

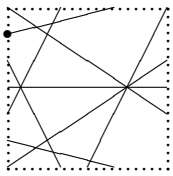
$\gamma(8)_{22}$: 
1231453674862578

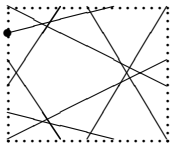
$\gamma(8)_{23}$: 
1231452674863578

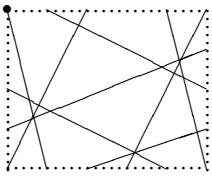
$\gamma(8)_{24}$: 
1234152467586378 $\mathbb{Z}_2$

$\gamma(8)_{25}$: 
1234561374857286

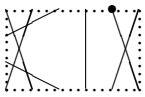
$\gamma(8)_{26}$: 
1231456374857268

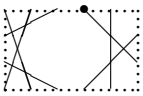
$\gamma(8)_{27}$: 
1231456274857368

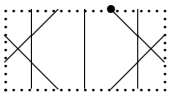
$\gamma(8)_{28}$: 
1234156247586738

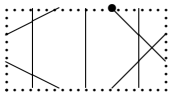
$\gamma(8)_{29}$: 
1234562748571368

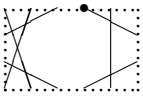
Приложение 3. Схемы семирёберных склеек

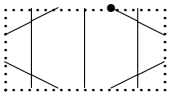
$\gamma(7)_1$: 
12123456475673

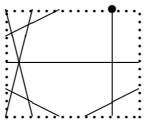
$\gamma(7)_2$: 
12312345647567

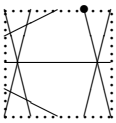
$\gamma(7)_3$: 
12312345675674 $\mathbb{Z}_2$

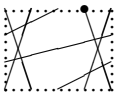
$\gamma(7)_4$: 
12312345657674

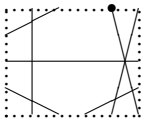
$\gamma(7)_5$: 
12132345647567

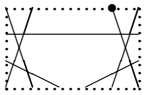
$\gamma(7)_6$: 
12132345657674 $\mathbb{Z}_2$

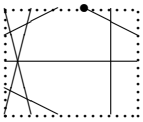
$\gamma(7)_7$: 
12313456427567

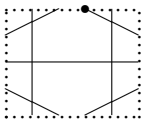
$\gamma(7)_8$: 
12312456437567

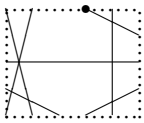
$\gamma(7)_9$: 
12341245637567 $\mathbb{Z}_2$

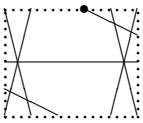
$\gamma(7)_{10}$: 
12341245653767

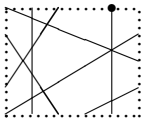
$\gamma(7)_{11}$: 
12341245675367

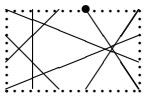
$\gamma(7)_{12}$: 
12132456437567

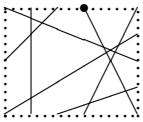
$\gamma(7)_{13}$: 
12134245653767 $\mathbb{Z}_2$

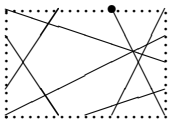
$\gamma(7)_{14}$: 
12134245675367

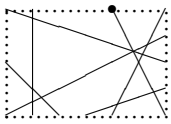
$\gamma(7)_{15}$: 
12314235675467 $\mathbb{Z}_2$

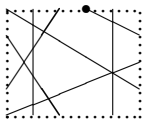
$\gamma(7)_{16}$: 
12341456275367

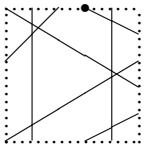
$\gamma(7)_{17}$: 
12341256375467

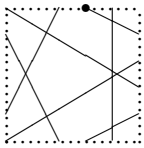
$\gamma(7)_{18}$: 
12345125637467

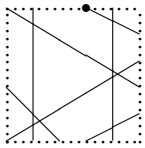
$\gamma(7)_{19}$: 
12345125637647

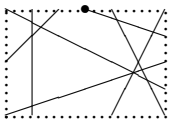
$\gamma(7)_{20}$: 
12345125673647

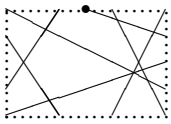
$\gamma(7)_{21}$: 
12134256375467

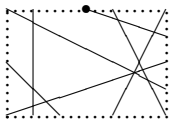
$\gamma(7)_{22}$: 
12134525637467

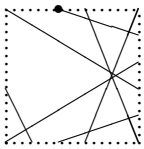
$\gamma(7)_{23}$: 
12134525637647

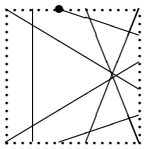
$\gamma(7)_{24}$: 
12134525673647

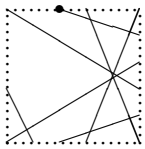
$\gamma(7)_{25}$: 
12314523647567

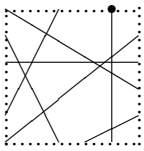
$\gamma(7)_{26}$: 
12314523647657

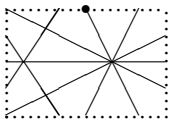
$\gamma(7)_{27}$: 
12314523674657

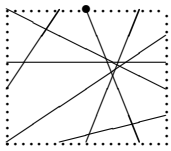
$\gamma(7)_{28}$: 
12314562364757

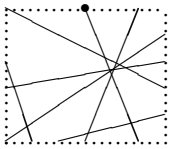
$\gamma(7)_{29}$: 
12314562367457

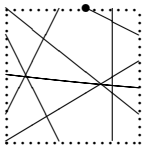
$\gamma(7)_{30}$: 
12314562367475

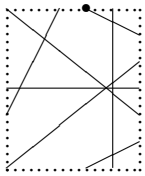
$\gamma(7)_{31}$: 
12345156273647

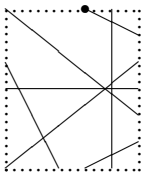
$\gamma(7)_{32}$: 
12345126374657

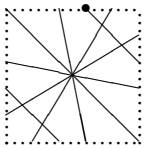
$\gamma(7)_{33}$: 
12345612637457

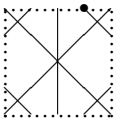
$\gamma(7)_{34}$: 
12345612673475

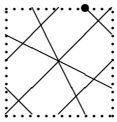
$\gamma(7)_{35}$: 
12134526374657

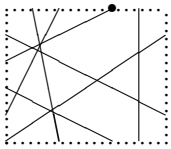
$\gamma(7)_{36}$: 
12134562637457

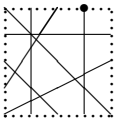
$\gamma(7)_{37}$: 
12134562673475

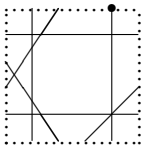
$\gamma(7)_{38}$: 
12314567237456 $\mathbb{Z}_2$

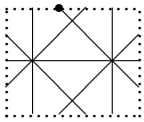
$\gamma(7)_{39}$: 
12134356267475 $\mathbb{Z}_2$

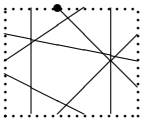
$\gamma(7)_{40}$: 
12134536267457 $\mathbb{Z}_2$

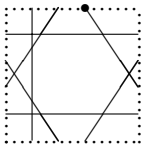
$\gamma(7)_{41}$: 
12342563751467

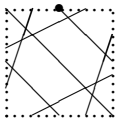
$\gamma(7)_{42}$: 
12341563752467

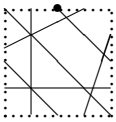
$\gamma(7)_{43}$: 
12341356475267

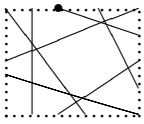
$\gamma(7)_{44}$: 
12345136472567 $\mathbb{Z}_2$

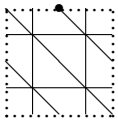
$\gamma(7)_{45}$: 
12345136476256

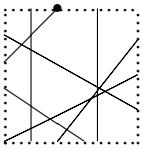
$\gamma(7)_{46}$: 
12314356475267

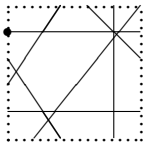
$\gamma(7)_{47}$: 
12314536476257 $\mathbb{Z}_2$

$\gamma(7)_{48}$: 
12314536746257

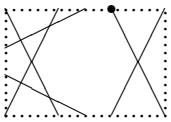
$\gamma(7)_{49}$: 
12314256475367

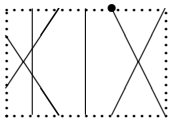
$\gamma(7)_{50}$: 
12314526746357 $\mathbb{Z}_2$

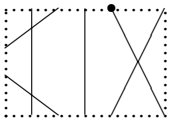
$\gamma(7)_{51}$: 
12345263746157

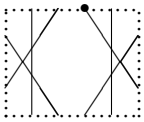
$\gamma(7)_{52}$: 
12345136475627

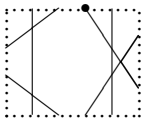
Приложение 4. Схемы шестирёберных склеек

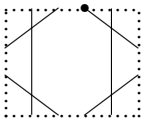
$\gamma(6)_1$: 
121234536456

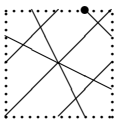
$\gamma(6)_2$: 
121234564563

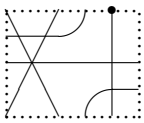
$\gamma(6)_3$: 
121234546563

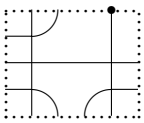
$\gamma(6)_4$: 
123123456456 $\mathbb{Z}_2$

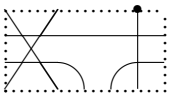
$\gamma(6)_5$: 
123123454656

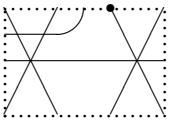
$\gamma(6)_6$: 
121323454656 $\mathbb{Z}_2$

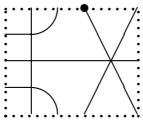
$\gamma(6)_7$: 
121345326456

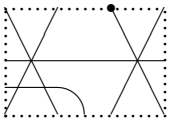
$\gamma(6)_8$: 
123134526456

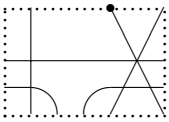
$\gamma(6)_9$: 
123134542656

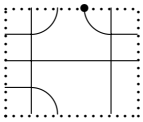
$\gamma(6)_{10}$: 
123134564256

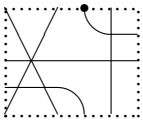
$\gamma(6)_{11}$: 
123124536456

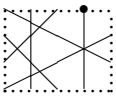
$\gamma(6)_{12}$: 
123124543656

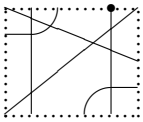
$\gamma(6)_{13}$: 
123124564356

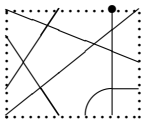
$\gamma(6)_{14}$: 
123412456536

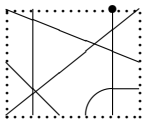
$\gamma(6)_{15}$: 
121324543656

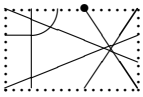
$\gamma(6)_{16}$: 
121324564356

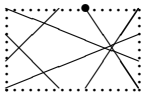
$\gamma(6)_{17}$: 
123145264356

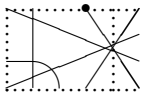
$\gamma(6)_{18}$: 
123414526356

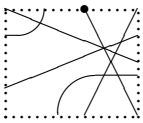
$\gamma(6)_{19}$: 
123414526536

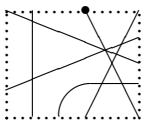
$\gamma(6)_{20}$: 
123414562536

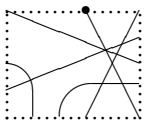
$\gamma(6)_{21}$: 
123412536456

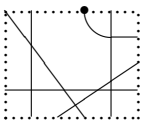
$\gamma(6)_{22}$: 
123412536546

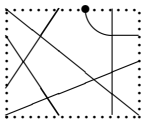
$\gamma(6)_{23}$: 
123412563546

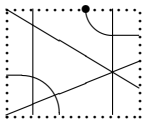
$\gamma(6)_{24}$: 
123451253646

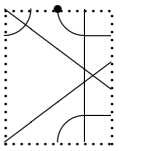
$\gamma(6)_{25}$: 
123451256346

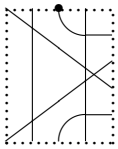
$\gamma(6)_{26}$: 
123451256364

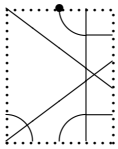
$\gamma(6)_{27}$: 
121342536456

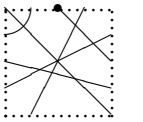
$\gamma(6)_{28}$: 
121342536546

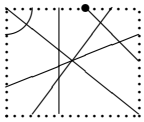
$\gamma(6)_{29}$: 
121342563546

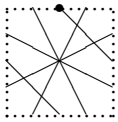
$\gamma(6)_{30}$: 
121345253646

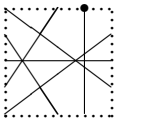
$\gamma(6)_{31}$: 
121345256346

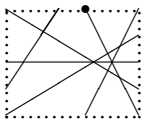
$\gamma(6)_{32}$: 
121345256364

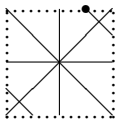
$\gamma(6)_{33}$: 
123145234656

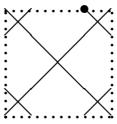
$\gamma(6)_{34}$: 
123145236465

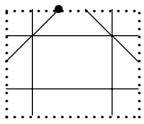
$\gamma(6)_{35}$: 
123145623645 $\mathbb{Z}_2$

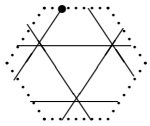
$\gamma(6)_{36}$: 
123415263546

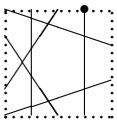
$\gamma(6)_{37}$: 
123451236456

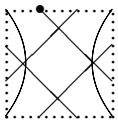
$\gamma(6)_{38}$: 
121345626345 $\mathbb{Z}_2$

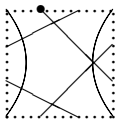
$\gamma(6)_{39}$: 
121343525646 $\mathbb{Z}_4$

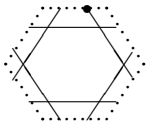
$\gamma(6)_{40}$: 
123425365146

$\gamma(6)_{41}$: 
1234256351461 $\mathbb{Z}_3$

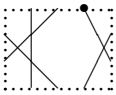
$\gamma(6)_{42}$: 
123145364256

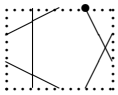
$\gamma(6)_{43}$: 
123413546256 $\mathbb{Z}_2$

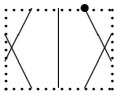
$\gamma(6)_{44}$: 
123413546526

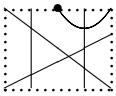
$\gamma(6)_{45}$: 
123143546526 $\mathbb{Z}_6$

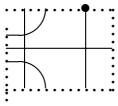
Приложение 5. Схемы пятирёберных склеек

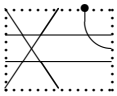
$\gamma(5)_1$: 
1212345345

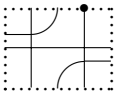
$\gamma(5)_2$: 
1212343545

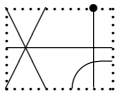
$\gamma(5)_3$: 
1212345453 $\mathbb{Z}_2$

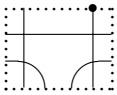
$\gamma(5)_4$: 
1213425345

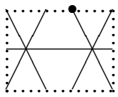
$\gamma(5)_5$: 
1213432545

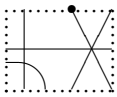
$\gamma(5)_6$: 
1213453245

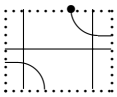
$\gamma(5)_7$: 
1231342545 $\mathbb{Z}_2$

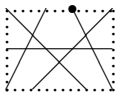
$\gamma(5)_8$: 
1231345345

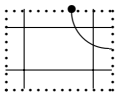
$\gamma(5)_9$: 
1231345425

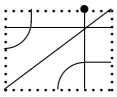
$\gamma(5)_{10}$: 
1231245345 $\mathbb{Z}_2$

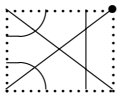
$\gamma(5)_{11}$: 
1231245435

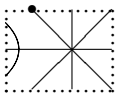
$\gamma(5)_{12}$: 
1213245435 $\mathbb{Z}_2$

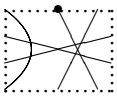
$\gamma(5)_{13}$: 
1231425345

$\gamma(5)_{14}$: 
1231425435

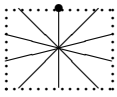
$\gamma(5)_{15}$: 
1234142535

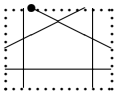
$\gamma(5)_{16}$: 
1234145253

$\gamma(5)_{17}$: 
1234123545

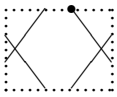
$\gamma(5)_{18}$: 
1234125345

$\gamma(5)_{19}$:
1213452534 $\mathbb{Z}_2$

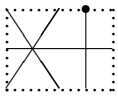
$\gamma(5)_{20}$: 
1234512345 $\mathbb{Z}_{10}$

$\gamma(5)_{21}$: 
1231435425 $\mathbb{Z}_5$

Приложение 6. Схемы четырёхрёберных склеек

$\gamma(4)_1$: 
12123434 $\mathbb{Z}_2$

$\gamma(4)_2$:
12132434

$\gamma(4)_3$: 
12134234

$\gamma(4)_4$:
12341234 $\mathbb{Z}_8$

Приложение 7. Транспонированная матрица отображения $\partial_8 : C_8 \to C_7$

$$\begin{pmatrix}
00100 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0000 \\
00\hat{1}10 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0000 \\
000\hat{1}0 & \hat{1}10\hat{1}1 & \hat{1}1000 & 00000 & 00000 & 0000 \\
00000 & 0000\hat{1} & 1\hat{1}101 & \hat{1}1000 & 00000 & 0000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 1\hat{1}000 & 00000 & 0000 \\
00000 & 00010 & 00000 & 00000 & 1\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 & 0000 \\
00000 & 00000 & 00\hat{1}0\hat{1} & 00000 & 01100 & 11\hat{1}0 \\
00000 & 0\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00010 & \hat{1}\hat{1}01 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0000 & 001\hat{1}
\end{pmatrix}$$

Замечание 3. Для экономии места через $\hat{1}$ мы обозначили число -1. Этого соглашения о записи отрицательных элементов матриц мы будем придерживаться и дальше.

Приложение 8. Транспонированная матрица отображения $\partial_7\colon C_7 \to C_6$

$$
\begin{pmatrix}
1\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
2000\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
01000 & 00\hat{1}000 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00001 & 0100\hat{1} & 0\hat{1}0\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
\\
0\hat{1}000 & 00100 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 10000 & 01\hat{1}1\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00001 & 00010 & 10000 & 1\hat{1}1\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 10000 & 01000 & 0000\hat{1} & 1\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 01100 & 00000 & 00100 & 0000\hat{1} & 001\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
\\
00000 & 01000 & 01000 & 00010 & 00000 & \hat{1}010\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00\hat{1}00 & 01000 & 00001 & 00000 & 0\hat{1}01\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 001\hat{1}1 & 00000 & 00000 & 0\hat{1}1\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 01\hat{1}10 & 00000 & 1000\hat{1} & 1\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0000\hat{1} & 1\hat{1}000 & 01\hat{1}10 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
\\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 & 00110 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 & 00110 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00100 & 00000 & 0100\hat{1} & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0000\hat{1} & 00000 & 1000\hat{1} & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
\\
00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{1}000 & 00001 & 00000 & 00000 & 00000 & 01101 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0000 & 10000 & \hat{1}0000 & 00000 & 10001 & 10\hat{1}00 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 10000 & 0\hat{1}000 & 10000 & 00000 & \hat{1}1000 & 00110 & 00 \\
00000 & 00000 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 001000 & \hat{1}00\hat{1}0 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{2}010 & 00000 & \hat{1}\hat{1}001 & 00000 & 1\hat{1} \\
\\
00000 & 00000 & 00000 & 100\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 0000\hat{1} & 00000 & 00000 & \hat{1}0\hat{1}00 & 11 \\
00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0100 & 00000 & 00000 & 00001 & 00000 & 0\hat{1}100 & 001000 & \hat{1}0 \\
00000 & 00000 & 00000 & 0000\hat{1}0 & 00001 & 00000 & 00000 & 00000 & 00101 & 00010 & 01 \\
00000 & 00000 & 00000 & 0100\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{1}000 & 00010 & 01
\end{pmatrix}
$$

Приложение 9. Матрица отображения $\partial_6 \colon C_6 \to C_5$

$$
\begin{pmatrix}
11002 & 0\hat{1}100 & 01000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00\hat{1}00 & 00010 & 0000\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
000\hat{1}0 & 00001 & 000\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & \hat{1}0000 & 001000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
000\hat{2}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00010 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 01000 & 01000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}01 & 00000 & 0000\hat{1} & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 0\hat{1}00\hat{1} & 00000 & 10110 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 01100 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 01000 & 00010 & \hat{1}0000 & 00001 & 10000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}00 & \hat{1}0000 & 00 \\
00000 & 00\hat{1}00 & 10000 & 0\hat{1}10\hat{1} & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}00 & 00000 & 00 \\
00000 & 0000\hat{1} & 00010 & 00000 & 010\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00100 & \hat{1}0000 & 01000 & 00001 & 0\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 & 00 \\
00000 & 00001 & 0\hat{1}000 & 00011 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0010 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00110 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 010\hat{1}0 & 00000 & 10000 & 11000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0000 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 10000 & 00000 & 10 \\
00000 & 00000 & 00000 & 10000 & 01000 & 00000 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & 00100 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0000 & 00100 & 00000 & 10000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}00 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 10000 & 00010 & 00000 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0010 & \hat{1}\hat{1} \\
00000 & 00000 & 00000 & 01100 & 00001 & 00000 & 01000 & 00000 & 00000 & 00000 & 1\hat{1} \\
00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{1}010 & 00000 & 10000 & 0\hat{1}000 & 00000 & 0000\hat{1} & 00000 & 01 \\
00000 & 00000 & 00000 & 01001 & 00000 & 01000 & 01000 & 00000 & \hat{1}0001 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 11000 & 00000 & 00001 & 00000 & 10\hat{1}01 & \hat{1}0000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0100 & 00000 & 0000\hat{1} & 00000 & 00000 & 00100 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 10100 & 00000 & 00001 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}00 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}\hat{1}0 & 00000 & 001000 & 00001 & 0\hat{1}000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 0010\hat{1} & 0000\hat{1} & 01020 & 00110 & 00000 & 01000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00011 & 00000 & 00001 & 00001 & 10000 & 00000 & 00000 & 11 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{1}\hat{1}00 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 010\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 11001 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00110 & 00000 & 00000 & 00010 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0000\hat{1} & \hat{1}0\hat{1}00 & 10000 & 01000 & 10001 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 1100\hat{1} & 10000 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 10001 & 00000 & 10000 & 00000 & 10 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00020 & 00000 & 00000 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0\hat{1}01 & 000\hat{1}0 & \hat{1}1 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 30000 & 00300 & 30 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0010\hat{1} & 00\hat{1}10 & 0\hat{1} \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00010 & 00001 & 00 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00\hat{1}01 & 001\hat{1}0 & 01 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 03000 & 00
\end{pmatrix}
$$

Приложение 10. Матрица отображения $\partial_5 \colon C_5 \to C_4$

$$
\begin{pmatrix}
00\hat{2}01 & 00\hat{1}0\hat{1} & 10110 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00100 & 100\hat{1}0 & 01001 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
0000\hat{2} & \hat{4}0000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 01100 & 00010 & 01000 & 000\hat{1}0 & 110\hat{1}0 & 10000 & 00000 & 0\hat{1}000 \\
00000 & 00010 & 00001 & 00000 & 00000 & 00001 & 0\hat{1}000 & 00010 & 00000 \\
\\
00000 & 0\hat{1}001 & 00000 & 1\hat{1}10\hat{1} & 00000 & 00000 & \hat{1}01\hat{1}0 & 00000 & 01000 \\
00000 & 000\hat{2}0 & 00000 & 00220 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00\hat{1}0\hat{1} & 01000 & 00\hat{1}01 & 11000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00010 \\
00000 & 000\hat{1}0 & 00001 & 000\hat{1}\hat{1} & 000\hat{1}\hat{1} & 00000 & 00000 & 00001 & 000\hat{2}0 \\
00000 & 00000 & \hat{2}0\hat{2}00 & 00000 & 20\hat{2}00 & 00000 & 00000 & 00002 & 00000 \\
\\
00000 & 00000 & 0\hat{1}0\hat{1}0 & \hat{1}0000 & 01110 & \hat{1}0000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}0 \\
00000 & 00000 & 0000\hat{2} & 00000 & 00002 & 20000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 0\hat{2}\hat{1}0\hat{1} & 00010 & 10000 & 00000 & \hat{2}0000 & 11000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 010\hat{1}0 & 00001 & 00000 & 00000 & 10002 & 02000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00110 & 0000\hat{1} & \hat{1}0001 & 01000 & 00000 & 00000 \\
\\
00000 & 00000 & 00000 & 000\hat{1}\hat{1} & 00011 & 00001 & 01000 & 0000\hat{2} & \hat{1}0010 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 12100 & 010\hat{1}0 & 001\hat{1}00 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & \hat{1}0100 & 0\hat{1}0\hat{1}0 & 00\hat{1}\hat{1}0 & 21000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00100 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0a000 & 00000 \\
\\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 05050
\end{pmatrix}
$$

Здесь в предпоследней строке в позиции $(20, 37)$ на том месте, где стоит a, на самом деле находится число -10.

Приложение 11. Матрица отображения $\partial_5 \colon C_4 \to C_3$

$$
\begin{pmatrix}
24100 & 0\hat{1}\hat{2}\hat{2}1 & 21000 & 00000 & 0 \\
00000 & 010\hat{2}0 & 0\hat{1}11\hat{1} & 10000 & \hat{1} \\
00010 & 10100 & 10000 & 0\hat{1}000 & 0 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0
\end{pmatrix}
$$

Литература

[1] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.

[2] Кочетков Ю. Ю. Пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}$ и $\mathcal{M}_{3,1}$ // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, № 2. — С. 48—56.

[3] Harer J., Zagier D. The Euler characteristic of the moduli space of curves // Invent. Math. — 1986. — Vol. 85. — P. 457—485.

[4] Kontzevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and matrix Airy function // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 147, no. 1. — P. 1—23.