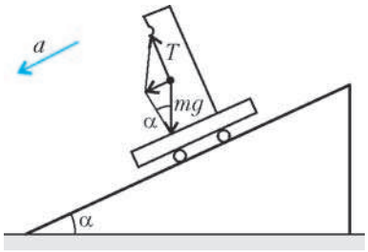

Рис. 7

жение равновесия будет таким, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением, что и тележка. На рисунке 7 видно, что это возможно, лишь когда нить маятника перпендикулярна наклонной плоскости.

13. $\operatorname{tg}\alpha > 0{,}75$.
14. Для таких винтов выполняется неравенство $2\pi r \gg h$, где r и h – радиус и шаг винта соответственно.
15. Одинаково, если не учитывать сопротивление воздуха; второй вагон, если сопротивление учитывать.
16. При движении в гору необходимо увеличить силу тяги, а при постоянной мощности двигателя это возможно лишь при уменьшении скорости автомобиля.
17. При выполнении указанного в задаче условия скорость цилиндра у основания плоскости в первом случае больше, так как во втором случае часть потенциальной энергии цилиндра будет преобразована в кинетическую энергию вращения.
18. Верхнее бревно (2) останется в равновесии при $\alpha < 30°$. В противном случае направление силы тяжести этого бревна пройдет левее точки опоры о нижнее бревно (1), и верхнее бревно скатится на борт.

Микроопыт

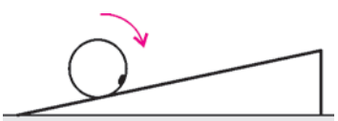
Рис. 8

Надо разместить цилиндр на наклонной плоскости так, как показано на рисунке 8, тогда он будет вести себя подобно игрушке «Ванька-встанька», когда момент силы тяжести относительно точки опоры заставляет фигурку разворачиваться, взбираясь вверх. Необходимо учесть, что при больших углах наклона плоскости цилиндр может начать проскальзывать по ней.

ЗАГАДКИ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

Задачи 1. Концом одной из полосок надо прикоснуться к разным местам второй полоски. Если первая полоска – магнит, она будет притягивать вторую в любом месте. Если же первая полоска немагнитная, она будет с наибольшей силой притягиваться к концам второй полоски, с меньшей силой – ближе к ее центру и совсем не будет притягиваться точно в центре (где северный и южный полюса магнита как бы уничтожают друг друга).
Задачи 2. Если есть компас, то магнитную полоску, которая является магнитом, нужно поднести к компасу и посмотреть, как она будет действовать на стрелку. Тот конец полоски, который притянул синий конец стрелки компаса, надо покрасить в красный цвет, а другой конец полоски (он притягивает красный конец стрелки) – в синий. Если компаса нет, то подвесьте магнит на нитке точно в центре (или положите на плавающий в воде предмет) и посмотрите, как он будет ориентироваться по сторонам света. Тот конец бруска, который смотрит на север, надо покрасить в синий цвет.

СОХРАНЕНИЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. $T = 240$ К. **2.** $\delta = 60\%$. **3.** $T = 224$ К.
4. $\delta = 10\%$. **5.** $k = 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

1. 26 км/ч.
Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O, хранилище, к которому побежал Мумбо, через M, а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U. Очевидно, что M находится выше по течению, чем O, а U ниже. Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $y/6$ часов, а Мумбо $x/11 + (x + y)/v$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $y/6 < x/11 + (x + y)/v$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $y/6 < y/11 + (y + y)/v$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26{,}4$ км/ч. Осталось проверить, что скорость реки могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $y/6 < x/11 + (x + y)/v$ положим $v = 26$ км/ч и равносильно преобразуем его к виду $y/x < 111/110$. Последнее возможно (например, при $y = 1{,}12$ км, $x = 1{,}11$ км), что и завершает решение.
2. Да.
Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \le a \le n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d, не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{b} - 1\right) = \left(\frac{n+1}{c} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{d} - 1\right)$. Убрав минус единицы и поделив затем на $n + 1$, получим равносильное равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Осталось подобрать удовлетворяющие ему дроби. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство $1 + 4 = 2 + 3$, поделенное на 12, дает $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.
5. Нет.
Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел делится на каждое из них и, следовательно, на каждый их делитель. Значит, если среди чисел, от которых находят НОК, есть четное, то НОК тоже будет четным. Разность двух четных чисел – число четное, а 2009 – нечетное. Значит, если такие шесть последовательных натуральных чисел существуют, то все четные числа среди них должны быть в одном НОКе. Среди шести последовательных натуральных чисел три четных и три нечетных, значит, один НОК будет находится от трех последовательных четных чисел, а другой – от трех последовательных нечетных чисел. Но среди трех последовательных как четных, так и нечетных чисел есть кратное трем. Следовательно, оба НОКа кратны трем, и их разность делится на 3. Но 2009 на 3 не делится. Значит, таких шести последовательных натуральных чисел не существует.
6. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. Равнобедренные треугольники EBK и KBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EK = KC$, а $\angle AEK = 180° - \angle BEK = 180° - \angle BKC = \angle CKD$. Кроме того, $KD = BD - BK = BA - BE = EA$. Следовательно, треугольники AEK и DKC равны. Далее, поскольку оба треугольника BEK и BAD – равнобедренные, $\angle BEK = 90° - \angle EBD/2 = \angle BAD$. Поэтому $AD \parallel EK$, откуда $\angle KAD = \angle EKA = \angle KCD$.
7. Первый.
Назовем кучки из одного ореха единицами, а из двух – двойками. Первый игрок должен придерживаться следующих правил: 1) если на доске есть единицы – убрать одну из них; 2) не брать из двоек. В остальном ходы первого могут быть любыми. Заметим, что число орехов в начале игры нечетно,