А. Б. Муравник, Об асимптотике решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 4, 538–548

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 538–548

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.8

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. **А. Б. Муравник**

1. Введение. В настоящей работе исследуется задача Коши для дифференциально-разностного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x-h,t),$$

где $\mathcal{M}$ – конечное множество векторов $\mathbf{R}^n$, параллельных координатным осям (либо любой другой ортогональной системе векторов), коэффициенты a_h вещественны. Такие уравнения возникают, в частности, в моделях нелинейной оптики (см. [1–3]), а также представляют и чисто теоретический интерес как уравнения с неклассическими младшими членами (см., например, [4–11] и приведенную там библиографию); напомним, что, как известно из [12], в параболическом случае влияние младших членов может иметь принципиальное значение.

Будет исследовано поведение решения задачи Коши для указанного уравнения при $t\to\infty$ и доказано, что для дифференциально-разностных уравнений, в отличие от классического случая дифференциальных уравнений (см., например, [13, 14]), имеет место не стабилизация решений, а принципиально более общее явление, описываемое теоремами о близости решений. Однако в некоторых частных случаях (при более жестких условиях на дифференциально-разностный оператор) справедливы и теоремы о стабилизации решений.

2. Задача Коши. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n\times(0,+\infty)$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} u(x+b_{jk}h_j,t), \tag{1}$$

где $h_j \overset{\text{def}}{=} (h_{j1},\ldots,h_{jn})$ – взаимно ортогональные (при $j=\overline{1,n}$) в $\mathbf{R}^n$ векторы единичной длины, $a_{jk},b_{jk}\in(-\infty,+\infty)$, $k=\overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,n}$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим начальное условие

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

с непрерывной и ограниченной в $\mathbf{R}^n$ начальной функцией u_0. Без ограничения общности можно считать, что вектор h_j совпадает по направлению с j-й пространственной координатой, $j=\overline{1,n}$. Тогда функция

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbf{R}^n} u_0(x-2\eta\sqrt{t}) \prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\infty} \exp\left\{-z^2+t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right\} \cos\left(2\eta_j z+t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right) dz\,d\eta \tag{3}$$

удовлетворяет (в классическом смысле) задаче (1), (2); в этом можно убедиться непосредственной подстановкой. Кроме того, можно показать, что при каждом положительном T решение (3) ограничено в $\mathbf{R}^n\times[0,T]$, а из [4] известно, что существует не более одного решения задачи (1), (2), обладающего указанным свойством. Таким образом, функция (3) является единственным решением задачи (1), (2), ограниченным в каждом слое $\mathbf{R}^n\times[0,T]$.

3. Асимптотические свойства решений. Будем считать (не ограничивая общности), что для любого $j\in\{1,\ldots,n\}$ (конечная) числовая последовательность $\{a_{jk}\}_{k=1}^{m_j}$ упорядочена по неубыванию. Для каждого $j\in\{1,\ldots,n\}$ обозначим $\min\limits_{a_{jk}>0} k$ через m_j^0; для тех j, при которых $a_{jk} < 0$ для любых $k \in \{1, \ldots, m_j\}$, в качестве m_j^0 возьмем $m_j + 1$. Обозначим через L дифференциально-разностный оператор, стоящий в правой части уравнения (1). Наряду с этим оператором важную роль в дальнейшем исследовании будет играть оператор $\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{L}u \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} u(x + b_{jk}h_j, t).$$

Пусть $R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} I - \mathcal{L}$, и рассмотрим вещественную часть его символа (или, что то же самое, символ оператора $R + R^*$)

$$\operatorname{Re} R(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} + |\xi|^2 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} \cos b_{jk}\xi_j$$

(см. [15, § 8]). Назовем $R(\xi)$ положительно-определенным, если существует такое положительное число C, что $\operatorname{Re} R(\xi) \geq C|\xi|^2$ для любого ξ из $\mathbf{R}^n$. По аналогии с дифференциальными операторами (см., например, [16, с. 66, 78]) оператор R, обладающий указанным свойством, можно назвать сильно эллиптическим во всем пространстве оператором второго порядка. Отметим, однако, что, как и в случае ограниченной области (см. [15, § 9]), сильная эллиптичность дифференциального и дифференциально-разностного операторов различается существенным образом, поэтому влияние разностных членов имеет принципиальное значение.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть оператор $R(\xi)$ положительно определен. Тогда для любого x из $\mathbf{R}^n$*

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\exp\left\{ -t \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} \right\} u(x,t) - w\left(\frac{x_1 + q_1 t}{p_1}, \ldots, \frac{x_n + q_n t}{p_n}, t \right) \right] = 0, \tag{4}$$

где $w(x,t)$ – ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией

$$u_0(p_1x_1, \ldots, p_nx_n), \quad p_j = \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} b_{jk}^2 \right)^{1/2}, \quad q_j = \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} b_{jk}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы $p_1, \ldots, p_n$ определены корректно и отличны от нуля. Возьмем произвольное $j \in \{1, \ldots, n\}$. Из условия теоремы следует, что $\sum_{k<m_j^0} a_{jk} + \xi_j^2 - \sum_{k<m_j^0} a_{jk} \cos b_{jk}\xi_j \geq C\xi_j^2$ для любого положительного ξ_j (условие положительной определенности, в котором $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$ положены равными нулю). Отсюда получаем, что

$$C\xi_j^2 \leq \xi_j^2 + \sum_{k<m_j^0} a_{jk}(1 - \cos b_{jk}\xi_j) = \xi_j^2 + 2\sum_{k<m_j^0} a_{jk} \sin^2 \frac{b_{jk}\xi_j}{2} = \xi_j^2 + \frac{\xi_j^2}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 \left(\frac{\sin(b_{jk}\xi_j/2)}{b_{jk}\xi_j/2} \right)^2,$$

значит,

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 \left(\frac{\sin(b_{jk}\xi_j/2)}{b_{jk}\xi_j/2} \right)^2 \geq C$$

для любого $\xi_j > 0$. Докажем, что $(1/2)\sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 > -1$. Действительно, предположим обратное: $(1/2)\sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 \leq -1$, тогда для любого $\xi_j > 0$

$$C \leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 \left(\frac{\sin(b_{jk}\xi_j/2)}{b_{jk}\xi_j/2} \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 \left[\left(\frac{\sin(b_{jk}\xi_j/2)}{b_{jk}\xi_j/2} \right)^2 - 1 \right].$$

Однако в силу конечности суммы можно выбрать столь малое положительное ξ_j, что последнее выражение не превзойдет $C/2$. Полученное противоречие и доказывает положительность $(1/2)\sum_{k<m_j^0} a_{jk} b_{jk}^2 + 1$, следовательно, p_j определено и положительно.

Теперь докажем две предварительные леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 для любого* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty \exp\left\{ -z^2 + t \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} \left(\cos \frac{b_{jk} z}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right\} \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} \sin \frac{b_{jk} z}{\sqrt{t}} \right) dz -$$

$$- \frac{\sqrt{\pi}}{2p_j} \exp\left\{ -\frac{(2\eta - q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2} \right\} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty$$

равномерно по $\eta \in \mathbf{R}^1$.

Доказательство. Прежде всего возьмем произвольное $j \in \{1, \ldots, n\}$ и переобозначим m_j через m, m_j^0 через m_0, p_j через p, q_j через q, a_{jk} через a_k, b_{jk} через b_k, $k = \overline{1, m}$. Теперь для любого вещественного η и любого положительного t

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2p} \exp\left\{ -\frac{(2\eta - q\sqrt{t})^2}{4p^2} \right\} = \int\limits_0^\infty e^{-p^2 z^2} \cos(2\eta - q\sqrt{t}) z \, dz,$$

тогда, используя для сокращения записи обозначение

$$E_s(t, z) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{ -2t \sum_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{b_k z}{2\sqrt{t}} \right\},$$

запишем интеграл I в виде

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-z^2} \left(\cos 2\eta z \left[E_s(t,z) \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) - \exp\{(1-p^2)z^2\} \cos(qz\sqrt{t}) \right] + \right.$$

$$\left. + \sin 2\eta z \left[E_s(t,z) \sin\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) - \exp\{(1-p^2)z^2\} \sin(qz\sqrt{t}) \right] \right) dz \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2.$$

Представим интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-z^2} \cos 2\eta z \left[E_s(t,z) \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) - \exp\{(1-p^2)z^2\} \cos(qz\sqrt{t}) \right] dz =$$

$$= \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\infty \stackrel{\text{def}}{=} I_{3,\delta} + I_{4,\delta}.$$

Возьмем произвольное положительное ε. Вначале оценим интеграл $I_{4,\delta}$. Модуль второго слагаемого его подынтегральной функции не превосходит $e^{-p^2 z^2}$; рассмотрим теперь ее первое слагаемое. Имеем

$$2t \sum_{k=1}^m a_k \sin^2 \frac{b_k z}{2\sqrt{t}} = 2t \sum_{k=1}^m a_k \frac{\sin^2(b_k z/(2\sqrt{t}))}{b_k^2 z^2/(4t)} \frac{b_k^2 z^2}{4t} =$$

$$= \frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2 \left(\frac{\sin(b_k z/(2\sqrt{t}))}{b_k z/(2\sqrt{t})}\right)^2 = \frac{z^2}{2}\left(\sum_{k<m_0} + \sum_{k\ge m_0}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{z^2}{2}(S_1 + S_2),$$

следовательно, указанное слагаемое подынтегральной функции по абсолютной величине не превосходит величины $\exp\{-z^2 - (z^2/2)(S_1 + S_2)\}$. Как доказано выше, справедлива оценка $-(1/2)\sum_{k<m_0} a_k b_k^2 < 1$, а значит, и оценка $-(1/2)\sum_{k<m_0} a_k b_k^2 < 1 - \mu$ с некоторым $\mu \in (0,1)$, поэтому $-S_1/2 < 1 - \mu$ в силу отрицательности каждого a_k в последней сумме. Поэтому показатель последней экспоненты можно представить в виде

$$-z^2 - \frac{z^2}{2}S_1 - \frac{z^2}{2}S_2 < -\frac{z^2}{2}(2\mu + S_2).$$

Таким образом, исследуемая подынтегральная функция по абсолютной величине не превосходит величины $2e^{-\gamma z^2}$, где

$$\gamma = \min\left(p^2, \mu + \frac{1}{2}\inf_{\substack{z>0\\ t>0}} S_2\right) = \min(p^2, \mu)$$

в силу положительности каждого a_k в последней сумме, т.е. $\gamma > 0$, поэтому можно выбрать такое положительное число δ, что $|I_{4,\delta}| < \varepsilon/4$. Зафиксируем это δ и оценим интеграл $I_{3,\delta}$. Разность в квадратных скобках его подынтегрального выражения равна

$$E_s(t,z)\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos(qz\sqrt{t})\right] + \cos(qz\sqrt{t})\left[E_s(t,z) - \exp\{(1-p^2)z^2\}\right]. \tag{5}$$

Оценим второе слагаемое суммы (5). Имеем

$$E_s(t,z) - \exp\{(1-p^2)z^2\} = E_s(t,z) - \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2\right\}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k\left(\frac{b_k^2 z^2}{2} - 2t\sin^2\frac{b_k z}{2\sqrt{t}}\right)\right\} - 1\right],$$

$$\frac{b_k^2 z^2}{2} - 2t\sin^2\frac{b_k z}{2\sqrt{t}} = \frac{b_k^2 z^2}{2} - \frac{b_k^2 z^2}{2}\left(\frac{2\sqrt{t}}{b_k z}\right)^2 \sin^2\frac{b_k z}{2\sqrt{t}} = \frac{b_k^2 z^2}{2}\left[1 - \left(\frac{\sin(b_k z/(2\sqrt{t}))}{b_k z/(2\sqrt{t})}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{b_k^2 z^2}{2}\left(1 + \frac{\sin(b_k z/(2\sqrt{t}))}{b_k z/(2\sqrt{t})}\right)\left(1 - \frac{\sin(b_k z/(2\sqrt{t}))}{b_k z/(2\sqrt{t})}\right).$$

Для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $k = \overline{1,m}$ существует такое положительное $\delta_{1,k}$, что для любого $x \in (-\delta_{1,k}, \delta_{1,k})$ $|(\sin x)/x - 1| < \varepsilon_1/(m|a_k|b_k^2\delta^2)$; с другой стороны, $|(\sin x)/x + 1| < 3$ для всех x; значит, $|a_k|\,|b_k^2 z^2/2 - 2t\sin^2(b_k z/(2\sqrt{t}))| < 3\varepsilon_1/(2m)$ для любых $t > (b_k\delta/(2\delta_{1,k}))^2$ и $z \in [0,\delta]$. Выберем ε_1 настолько малым, что $e^{3\varepsilon_1/2}, e^{-3\varepsilon_1/2} \in (1 - \varepsilon e^{-\delta^2}/(4\sqrt{\pi}), 1 + \varepsilon e^{-\delta^2}/(4\sqrt{\pi}))$. Тогда

$$\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2\right\} = \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k<m_0} a_k b_k^2 - \frac{z^2}{2}\sum_{k\ge m_0} a_k b_k^2\right\} \le \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k<m_0} a_k b_k^2\right\} \le e^{z^2} \le e^{\delta^2}$$

для любого $z \in [0,\delta]$, а значит, при указанных z и при $t > \max\limits_{1\le k\le m}(b_k\delta/(2\delta_{1,k}))^2$

$$|\cos(qz\sqrt{t})[E_s(t,z) - \exp\{(1-p^2)z^2\}]| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\pi}} = \frac{\varepsilon}{8}\left(\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\right)^{-1}. \tag{6}$$

Теперь оценим первое слагаемое выражения (5). Имеем

$$\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos(qz\sqrt{t}) = \cos\left(q\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right) - \cos(qz\sqrt{t}) =$$

$$= \cos(q\sqrt{t}z)\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right) - 1\right] - \sin(q\sqrt{t}z)\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right), \quad (7)$$

$$t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z = \sum_{k=1}^{m} a_k\left(t\sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - b_k\sqrt{t}z\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \sqrt{t}z\left(\frac{\sqrt{t}}{b_k z}\sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - 1\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k (b_k z)^2 \frac{\sqrt{t}}{b_k z}\left(\frac{\sin(b_k z/\sqrt{t})}{b_k z/\sqrt{t}} - 1\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$, то для любых положительного ε_1 и $k = \overline{1,m}$ существует такое положительное число T_k, что для любых $t > T_k$, $z \in [0,\delta]$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sqrt{t}}{b_k z}\left(\frac{\sin(b_k z/\sqrt{t})}{b_k z/\sqrt{t}} - 1\right)\right| < \frac{\varepsilon_1}{m|a_k|b_k^2\delta^2}.$$

Следовательно, для любого $t > \max\limits_{1\le k\le m} T_k$ имеет место оценка

$$\left|\sin(q\sqrt{t}z)\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right)\right| < |\sin\varepsilon_1|.$$

Далее,

$$\left|\cos(q\sqrt{t}z)\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right) - 1\right]\right| =$$

$$= \left|-2\cos(q\sqrt{t}z)\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right)\right]\right| \le 2\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - q\sqrt{t}z\right)\right].$$

Выбрав достаточно большое t, последнее выражение можно, как и выше, сделать меньше $2\sin^2(\varepsilon_1/2)$ независимо от $z \in [0,\delta]$. Таким образом, выбирая ε_1 настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $|\sin\varepsilon_1| + 2\sin^2(\varepsilon_1/2) < \varepsilon e^{-\delta^2}/(4\sqrt{\pi})$, получаем, учитывая неравенство

$$E_s(t,z) \le \exp\left\{-2t\sum_{k<m_0} a_k \sin^2\frac{b_k z}{2\sqrt{t}}\right\} \le \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k<m_0} a_k b_k^2\right\} \le e^{z^2},$$

что, начиная с некоторого t, модуль выражения (5) не превосходит величины

$$\frac{\varepsilon}{4}\left(\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\right)^{-1}.$$

Значит, существует такое положительное число T, что для любого $t > T$ справедлива оценка $|I_{3,\delta}| < \varepsilon/4$, откуда с учетом оценки интеграла $I_{4,\delta}$ получаем оценку $|I_1| < \varepsilon/2$.

Интеграл I_2 оценивается аналогично. Выражение в квадратных скобках подынтегральной функции запишем в виде суммы

$$[E_s(t,z) - \exp\{(1-p^2)z^2\}]\sin(qz\sqrt{t}) + E_s(t,z)\left[\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) - \sin(qz\sqrt{t})\right];$$

первое из этих слагаемых оценивается точно так же, как и (6). Оценим второе слагаемое:

$$\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) - \sin(qz\sqrt{t}) = \sin\left(qz\sqrt{t} + t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t}\right) - \sin(qz\sqrt{t}) =$$

$$= \sin(qz\sqrt{t})\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t}\right) - 1\right] + \cos(qz\sqrt{t})\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{hz}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t}\right),$$

а это выражение оценивается точно так же, как и (7). Итак, существует такое положительное T, что $|I_2| < \varepsilon/2$ для любого $t > T$. Лемма доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 для любого* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *существует такое* M_j, *зависящее только от коэффициентов* $a_{j1}, \ldots, a_{jm_j}, b_{j1}, \ldots, b_{jm_j}$, *что неравенство*

$$\left|\int_0^\infty \exp\left\{-z^2 + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)\right\}\cos\left(yz - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz\right| \le \frac{M_j}{y^2}$$

выполняется для любых $y \in (0, +\infty)$, $t \in [1, +\infty)$.

Доказательство. Прежде всего возьмем произвольное $j \in \{1, \ldots, n\}$ и переобозначим m_j через m, m_j^0 через m_0, p_j через p, q_j через q, a_{jk} через a_k, b_{jk} через b_k, $k = \overline{1, m}$. Достаточно оценить одно из двух слагаемых последнего интеграла (второе слагаемое оценивается аналогично), например:

$$\int_0^\infty \exp\left\{-z^2 + t\sum_{k=1}^{m} a_k\left(\cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}} - 1\right)\right\}\cos yz \cos\left(q\sqrt{t}z - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right)dz$$

или, что равносильно,

$$\int_0^\infty E_c(z,t)\cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right)\cos yz\, dz,$$

где использовано обозначение $E_c(z,t) \overset{\text{def}}{=} \exp\{-z^2 + (1/t^2)\sum_{k=1}^m a_k(\cos b_k zt - 1)\}$. В результате двукратного интегрирования по частям получаем, что последний интеграл равен $J \overset{\text{def}}{=} -y^{-2}\int_0^\infty g''(z)\cos yz\, dz$, где

$$g(z) = E_c(z,t)\cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right)$$

(легко проверить, что внеинтегральные члены обращаются в нуль). Поэтому достаточно показать, что при произвольных фиксированных значениях (векторных) параметров a, b, удовлетворяющих условиям теоремы 1, интеграл J ограничен равномерно по $t > 0$. Для этого вычислим производные

$$g'(z) = -\frac{1}{t}E_c(z,t)\left[\left(2tz + \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \sin b_k zt\right)\cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right)\sum_{k=1}^{m} a_k b_k(1 - \cos b_k zt)\right] =$$

$$= \frac{1}{t}E_c(z,t)\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\left[\sin\left(\frac{qz}{t} - b_k zt - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right) - \sin\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt\right)\right] - \right.$$

$$-2zt\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr),$$

$$g''(z)=\frac{1}{t}E_c(z,t)\biggl(-2z-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\biggr)\biggl(\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\biggl[\sin\biggl(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)-$$

$$-\sin\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr]-2zt\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr)+$$

$$+\frac{1}{t}E_c(z,t)\biggl(\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\biggl[\biggl(\frac{q}{t}-b_kt-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\biggr)\cos\biggl(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)-$$

$$-\biggl(\frac{q}{t}-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\biggr)\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr]-2t\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)+$$

$$+2tz\sin\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggl(\frac{q}{t}-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\biggr)\biggr).$$

Так как

$$\exp\biggl\{\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k(\cos b_kzt-1)\biggr\}\le\exp\biggl\{\frac{1}{t^2}\sum_{k<m_0}a_k(\cos b_kzt-1)\biggr\}\le\exp\biggl\{-2\sum_{k<m_0}a_k\biggr\},$$

а интегралы

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^2\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)dz,\quad \int\limits_0^\infty e^{-z^2}\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)dz,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k^2\cos\biggl(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)dz$$

ограничены равномерно по $t>0$, поэтому для оценки интеграла J достаточно оценить следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\biggl|\biggl(\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\biggr)\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\biggl[\sin\biggl(\frac{qz}{t}-b_ktz-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)-$$

$$-\sin\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\biggl[\biggl(\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt-\frac{q}{t^2}\biggr)\cos\biggl(\frac{qz}{t}-b_ktz-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)+$$

$$+\biggl(\frac{q}{t^2}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\biggr)\cos\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\biggr]-$$

$$-2z\sin\biggl(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\biggr)\frac{1}{t}\biggl(q-\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\biggr)\biggr|dz. \qquad (8)$$

Поскольку
$$q-\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt=\sum_{k=1}^{m}a_kb_k(1-\cos b_kzt)=2\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin^2\frac{b_ktz}{2},$$
а интегралы
$$\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2}\,dz=\frac{b_k^2}{4}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left(\frac{\sin^2(b_ktz/2)}{b_ktz/2}\right)^2z^2\,dz\le\frac{b_k^2}{4}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz,$$
$$\int\limits_0^\infty \frac{z}{t}e^{-z^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2}\,dz\le\int\limits_0^\infty ze^{-z^2}\frac{|\sin(b_ktz/2)|}{t}dz=\frac{|b_k|}{2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}\left|\frac{\sin(b_ktz/2)}{b_ktz/2}\right|dz\le\frac{|b_k|}{2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz$$
ограничены равномерно по $t>0$, то оценка интеграла (8) сводится к оценке интеграла
$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left|\left(\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt-b_ktz\right)\right]\right|dz.$$
В последнем интеграле выражение в квадратных скобках равно
$$2\sin^2\frac{b_ktz}{2}\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)+\sin b_ktz\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right),$$
поэтому для его оценки достаточно оценить интегралы от функций
$$e^{-z^2}\frac{z}{t}\sin^2\frac{b_ktz}{2},\qquad e^{-z^2}\frac{|\sin b_ktz|}{t^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2},\qquad e^{-z^2}\frac{|\sin b_ktz|}{t^2}|\sin b_ktz|,\qquad e^{-z^2}\frac{z}{t}|\sin b_ktz|.$$
Первые три из этих интегралов сводятся к интегралам, оцененным выше, а последний равен $|b_k|\int_0^\infty z^2e^{-z^2}|(\sin b_ktz)/(b_ktz)|\,dz\le|b_k|\int_0^\infty z^2e^{-z^2}\,dz$, т.е. ограничен равномерно по $t>0$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ – произвольная точка $\mathbf{R}^n$. Тогда
$$w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{p_1},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{p_n},t\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\left(\prod_{j=1}^{n}p_j\right)^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\frac{(2\eta_j+q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}\right\}u_0(x_1^0-2\eta_1\sqrt{t},\dots,x_n^0-2\eta_n\sqrt{t}\,)\,d\eta.$$
Отсюда
$$\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}\right\}u(x_0,t)-w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{p_1},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{p_n},t\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}u_0(x_1^0-2\eta_1\sqrt{t},\dots,x_n^0-2\eta_n\sqrt{t}\,)\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\exp\left\{-z^2+t\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}-1\right)\right\}\times\right.$$

$$\times\cos\left(2\eta_j z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz - \left(\prod_{j=1}^{n} p_j\right)^{-1}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\frac{(2\eta_j+q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}\right\}\Bigg]\,d\eta.$$

Заменой переменных $y_j = 2\eta_j + q_j\sqrt{t}$ $(j=\overline{1,n})$ последнее выражение приводится к виду

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} u_0(x_1^0 - q_1 t - y_1\sqrt{t},\ldots,x_n^0 - q_n t - y_n\sqrt{t})\times$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-z^2 + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)\right\}\cos\left(y_j z - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz -\right.$$

$$\left. - \prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-y_j^2/(4p_j^2)}\right]dy = \frac{1}{\pi^n}\left(\int\limits_{Q(A)} + \int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus Q(A)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} J_1 + J_2, \qquad (9)$$

где A – положительный параметр, $Q(A)$ – куб с ребром длины A и центром в начале координат.

Пусть $\varepsilon > 0$. В выражении (9) каждый внутренний (одномерный) интеграл является ограниченной функцией переменных y_j, t. Действительно, показатель экспоненты в подынтегральном выражении не превосходит величины

$$-z^2 + t\sum_{k<m_0} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right) =$$

$$= -z^2 + t\sum_{k<m_0} a_{jk}\left(\frac{\sin(b_{jk}z/(2\sqrt{t}))}{b_{jk}z/(2\sqrt{t})}\right)^2\left(\frac{b_{jk}z}{2\sqrt{t}}\right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} -z^2\left[1 + \frac{1}{2}\sum_{k<m_0} a_{jk}b_{jk}^2\left(\frac{\sin\alpha_{z,t}}{\alpha_{z,t}}\right)^2\right],$$

которая, поскольку в последней сумме все коэффициенты a_{jk} отрицательны, в свою очередь не превосходит $-z^2(1 + (1/2)\sum_{k<m_0} a_{jk}b_{jk}^2) \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma z^2$, где $\gamma > 0$ в силу условия теоремы. Тогда из леммы 2 следует, что каждый из указанных (одномерных) интегралов ограничен сверху по модулю функцией $g_j(\eta_j) \stackrel{\text{def}}{=} M_j/(1+\eta_j^2)$ с некоторой положительной постоянной M_j. Теперь, используя ограниченность функции u_0, выберем такое A, что $J_2 < \varepsilon/2$ для любого t из $[1,+\infty)$. Зафиксируем выбранное A и рассмотрим интеграл J_1. В силу леммы 1 и ограниченности внутренних интегралов выражения (9) разность в квадратных скобках выражения (9) стремится к нулю при $t\to\infty$ равномерно относительно $y\in\mathbf{R}^n$. Действительно, в силу леммы 1 существует такое положительное T, что для любых $t\in(T,+\infty)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$ и $\eta_j\in(-\infty,+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_0^\infty \exp\left\{-z^2 + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)\right\}\cos\left(2\eta_j z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz -\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}\exp\left\{-\frac{(2\eta_j + q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}\right\}\right| < \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}A^n\sup|u_0|}$$

(заметим, что в лемме 1 не накладывается никаких условий на знаки коэффициентов b_{jk}). Значит, последнее неравенство верно и для η_j, равного $(y_j - q_j\sqrt{t})/2$ при любом вещественном y_j. Следовательно, для любого t из $(T,+\infty)$ имеем

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-z^2 + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)\right\}\cos\left(y_j z - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz -\right.$$

$$-\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-y_j^2/(2p_j^2)}\Bigg| \le \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}A^n\sup|u_0|},$$

что в силу произвольности выбора x_0 и доказывает теорему.

Замечание 1. Экспоненциальный вес, возникающий в доказанных теоремах о близости решений, обусловлен не наличием в уравнении разностных членов, а диссипативностью задачи. Указанный вес сохраняется и в классическом случае: при обращении всех коэффициентов b_{jk} в нуль предельное соотношение (4) обращается в тождественное (при всех t) равенство. Дело в том, что добавление в параболическое уравнение младших членов (более точно, членов нулевого порядка) выводит решение за пределы класса ограниченных функций (даже в случае ограниченной начальной функции), а умножение его на соответствующий экспоненциальный (по t) вес возвращает решение в указанный класс.

Отметим, что теоремы о близости решений, вообще говоря, являются более сильными, чем теоремы о стабилизации. Поэтому и доказанная теорема 1 устанавливает более общий характер поведения решения при $t \to \infty$, нежели стабилизация. Стоит, однако, указать важный частный случай, в котором имеет место классическая поточечная стабилизация решения: это случай, когда оператор L симметричен. В этом случае мы можем применить известный результат Репникова–Эйдельмана (см. [13]): необходимым и достаточным условием стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (обозначим это решение через $v(x,t)$) является выполнение для ограниченной начальной функции (обозначенной здесь через $v_0(x)$) предельного соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^n}\int\limits_{|x|<t} v_0(x)\,dx = l, \tag{10}$$

где l – некоторая вещественная постоянная. Отсюда получаем

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1, оператор L симметричен, $l \in \mathbf{R}^1$. Тогда равенство*

$$\lim_{t\to\infty}\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}\right\}u(x,t) = l \tag{11}$$

справедливо для любого $x \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^n\prod_{j=1}^{n}p_j}\int\limits_{\sum_{j=1}^{n}x_j^2/p_j^2<t^2} u_0(x)\,dx = l. \tag{12}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в силу симметричности оператора L его можно представить (см. [15, лемма 8.2]) в следующем виде: $Lu = \Delta u + \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x-h,t)$, где $\mathcal{M}$ – такое конечное множество векторов $\mathbf{R}^n$, что для любого h, принадлежащего $\mathcal{M}$, вектор $-h$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$ и $a_h = a_{-h}$ для любого h из $\mathcal{M}$. Отсюда $q_1 = \ldots = q_n = 0$. Теперь остается применить к функции $w(x,t)$ указанную теорему о стабилизации из работы [13].

Замечание 2. Из следствия 1 видно, что в дифференциально-разностном случае поверхности, ограничивающие области осреднения начальной функции, фигурирующие в условии стабилизации решения, вообще говоря, уже не являются сферами: они обращаются в эллипсоиды. Напомним, что в классическом случае дифференциальных уравнений такой эффект возникает, если заменить оператор Лапласа эллиптическим оператором с различными коэффициентами при различных вторых производных $\sum_{j=1}^{n} p_j^2\,\partial^2/\partial x_j^2$.

Замечание 3. В условии следствия 1 требование симметричности оператора L можно ослабить, заменив его требованием ортогональности $a_j \perp b_j$ для любого $j \in \{1,\ldots,n\}$, где векторы $a_j = (a_{j1},\ldots,a_{jm_j})$, $b_j = (b_{j1},\ldots,b_{jm_j})$.

Из работы [14] известно, что если на функцию $v_0(x)$ наложить более сильное, чем (10), условие, а именно $\lim\limits_{t\to\infty}(2\pi^{n/2}t^n)^{-1}n\Gamma(n/2)\int_{|x|<t}v_0(x+y)\,dx = l$ равномерно по $y \in \mathbf{R}^n$, то имеет место равномерная стабилизация функции $v(x,t)$. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Пусть равенство (12) с заменой* $u_0(x)$ *на* $u_0(x+y)$ *выполняется равномерно по* $y \in \mathbf{R}^n$ *и выполнены условия теоремы 1. Тогда равенство (11) справедливо при любом* $x \in \mathbf{R}^n$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке ИНТАС (проект 00-136) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00256).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Razgulin A.V.* // Chaos in Optics. Proceedings SPIE. 1993. V. 2039. P. 342–352.
2. *Vorontsov M.A., Iroshnikov N.G., Abernathy R.L.* // Chaos, Solitons, and Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.
3. *Skubachevskii A.L.* // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.
4. *Борок В.М., Житомирский Я.И.* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 3. С. 515–518.
5. *Inone A., Miyakawa T., Yoshida K.* // J. Differ. Equat. 1977. V. 24. № 3. P. 383–396.
6. *Рабинович В.С.* // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 6. С. 1032–1038.
7. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E.* // J. Math. Anal. and Applications. 1984. V. 102. № 1. P. 38–57.
8. *Desch W., Schappacher W.* // J. Differ. Equat. 1985. V. 59. № 1. P. 80–102.
9. *Власов В.В.* // Изв. вузов. Математика. 1996. № 1. С. 22–44.
10. *Скубачевский А.Л.* // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. Вып. 1. С. 169–170.
11. *Скубачевский А.Л., Шамин Р.В.* // Мат. заметки. 1999. Т. 66. Вып. 1. С. 145–153.
12. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3. С. 3–145.
13. *Репников В.Д., Эйдельман С.Д.* // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 2. С. 298–301.
14. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 2. С. 297–311.
15. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
16. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М., 1985.

Московский государственный авиационный институт
(технический университет) им. Серго Орджоникидзе

Поступила в редакцию
04.04.2002 г.