



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. CliDąbrowski, Admissible p -adic L -functions of automorphic forms, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 8–12

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

March 18, 2025, 14:32:34



УДК 512.754

А. Домбровски

ДОПУСТИМЫЕ p -АДИЧЕСКИЕ L -ФУНКЦИИ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

Пусть M — мотив над Q . В настоящей статье формулируется гипотеза, согласно которой для каждого простого p существует $h(M)$ -допустимая мера μ на Gal_p , преобразование Меллина L_μ которой является C_p -аналитической функцией типа $o(\log^h)$, интерполирующей специальные значения L -функции мотива M в точках критической полосы. Здесь $h(M)$ обозначает число, которое измеряет разницу между арифметикой и геометрией мотива. В рассматриваемых в работе случаях выполнены условия типа алгебраичности (гипотеза Делиня). Для форм, модулярных над Q , доказано существование мотивов [1, 2], причем формулировка гипотезы на уровне мотивов вполне согласуется с уже известными частными результатами. Результаты А. А. Панчишкина [3] вполне подтверждают существование мотивов, связанных с модулярными формами Зигеля.

Мы проверяем гипотезу в случае симметрической степени мотива модулярной формы CM -типа, а также устанавливаем h -допустимость соответствующей меры (построенной А. А. Панчишкиным) в случае симметрического квадрата произвольной модулярной формы.

1. Формулировка гипотезы для мотивов над Q

Гипотеза. Для каждого $\varepsilon_0 = \pm 1$ существует C_p -аналитическая функция $L_p^{\varepsilon_0} : X_p \rightarrow C_p$, такая, что

(I) для всех (кроме, может быть, конечного числа) наборов $(m, \chi) \in \mathbb{Z} \times X_p^{\text{tors}}$, таких, что мотив $N = M(\chi)(m)$ критичен в $s=0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon(\chi) \cdot \nu$, $\nu = (-1)^m$, имеем

$$L_p^{\varepsilon_0}(\chi \chi_p^m) = A_p(N) \cdot \Lambda_\infty(N, 0) \cdot G(\chi)^{-d^{\varepsilon_0}(M)} \cdot \Omega(\varepsilon_0, M)^{-1};$$

(II) функция $L_p^{\varepsilon_0}(\chi)$ голоморфна на X_p , если $M^{k,k} = 0$; в противном случае существуют конечное подмножество $\Xi \subset X_p$ и целые числа $n(\xi) \in \mathbb{N}$, $\xi \in \Xi$, такие, что $\forall g_0 \in \text{Gal}_p$ функция $\prod_{\xi \in \Xi} (\chi(g_0) - \xi(g_0))^{n(\xi)} \cdot L_p^{\varepsilon_0}(\chi)$ голоморфна на X_p ;

(III) функция из (II) является голоморфной типа $o(\log^h)$ (и является преобразованием Меллина h -допустимой меры);

(IV) если $h \leq m^* - m_* + 1$, то условия (I), (II) однозначно определяют функцию $L_p^{\varepsilon_0}$;

(V) если мотив M h -допустим, то существует ограниченная C_p -аналитическая функция $L_p^{\varepsilon_0}$, удовлетворяющая условиям (I), (II), (IV).

Здесь использованы обозначения:

$$m_* = \max \{j | \exists j, k : j < k, h(j, k) \neq 0\} + 1,$$

$$m^* = \min \{j | \exists j, k : j > k, h(j, k) \neq 0\},$$

$$A_p(N) = \begin{cases} \prod_{i=d^{+(N)+1}}^d (1 - \chi(p) \alpha^{(i)}(p) \cdot p^{-m}) \prod_{i=1}^{d^{+(N)}} (1 - \chi(p)^{-1} \alpha^{(i)}(p)^{-1} \cdot p^{m-1}), \\ \prod_{i=1}^{d^{+(N)}} (p^m \cdot \alpha^{(i)}(p)^{-1})^{\text{ord}_p c(\chi)}, \quad p \nmid c(\chi), \end{cases} p \nmid c(\chi);$$

где обратные корни локального p -многочлена $L_p(M, X)^{-1}$ упорядочены следующим образом: $\text{ord}_p \alpha^{(1)}(p) \leq \text{ord}_p \alpha^{(2)}(p) \leq \dots \leq \text{ord}_p \alpha^{(d)}(p)$; $P_{N,p}$, P_H — многоугольники Ньютона и Ходжа мотива M ;

$$h = h(p, M) = [P_{N,p}(d^\pm) - P_H(d^\pm)] + 1,$$

где $[]$ — целая часть; если $P_{N,p}(d^\pm) = P_H(d^\pm)$, то мотив M называется p -допустимым, X_p — p -адическая аналитическая группа Ли всех p -адических характеров группы Gal_p .

Необходимые факты по теории мотивов и p -адического интегрирования изложены в [4, 5].

2. Симметрические степени мотивов вида $M(f)$

1. Специализация гипотезы для $\text{Sym}^r M(f)$. Пусть f — голоморфная, модулярная, параболическая, примитивная форма веса $\nu + 1 \geq 2$ с характером ψ кондуктора c_g , $\delta(f) = (2\pi i)^{-1} \cdot G(\psi)$, $\langle f, f \rangle$ — скалярное произведение Петерссона. Применяя лемму Делиня [6], получаем

$$c^\varepsilon(\text{Sym}^{2l+1} M(f)) = (\langle f, f \rangle \cdot \delta(f))^{\frac{1}{2} l(l+1)} \cdot c^\varepsilon(f)^{l+1}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

$$c^+(\text{Sym}^{2l} M(f)) = (\langle f, f \rangle \cdot \delta(f))^{\frac{1}{2} l(l+1)},$$

$$c^-(\text{Sym}^{2l} M(f)) = \delta(f)^{-l} \cdot c^+(\text{Sym}^{2l} M(f)), \quad l = 1, \dots$$

Кроме того, очевидно, что $d^\pm(\text{Sym}^{2l+1} M(f)) = l + 1$, $d^+(\text{Sym}^{2l} M(f)) = l + 1$, $d^-(\text{Sym}^{2l} M(f)) = l$.

Пусть $\alpha(p)$, $\beta(p)$ — корни локального p -многочлена мотива $M(f)$, $\text{ord}_p \alpha(p) \leq \text{ord}_p \beta(p)$. Тогда

$$h(\text{Sym}^r M(f)) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2} d^+ r \cdot \text{ord}_p \alpha(p) \right] + 1, & r \text{ четно}; \\ \left[\frac{1}{2} d^+ (r + 1) \cdot \text{ord}_p \alpha(p) \right] + 1, & r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Множитель A_p тоже можно переписать более явно:

$$A_p(\text{Sym}^{2l+1} \cdot) = \begin{cases} \prod_{i=0}^l [(1 - \alpha(p)^{2i-2l-1} \psi(p)^{2l-i+1} p^{(2l-i+1)\nu-m}) \times \\ \times (1 - \alpha(p)^{2i-2l-1} \psi(p)^{-i} p^{-i\nu+m-1})], \quad p \nmid c(\chi); \\ \left[p^{\frac{1}{2} (l+1)(2m-l\nu)} \cdot \alpha(p)^{-(l+1)\nu} \cdot \psi(p)^{-\frac{1}{2} l(l+1)} \right]^{\text{ord}_p c(\chi)}, \quad p \mid c(\chi), \end{cases}$$

$$A_p(\text{Sym}^{2l} \cdot) =$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^l [(1 - \alpha(p)^{-2i} \psi(p)^{l+1} p^{(l+1)v-m}) (1 - \alpha(p)^{-2i} \psi(p)^{i-1} p^{(i-1)v+m-1})] \times \\ \times (1 - (\psi(p) \cdot p^v)^{-l} \cdot p^{m-1})^{e(N)} \cdot ((1 - (\psi(p) p^v)^l) p^{-m})^{1-e(N)}, p \nmid c(\chi); \\ \frac{1}{(p^2)^{l[2m-(l-1)v]}} \cdot \alpha(p)^{-l(l+1)} \cdot \psi(p)^{-\frac{1}{2} l(l-1)} \text{ord}_p c(\chi) \times \\ \times (p^{m-lv} \cdot \psi(p)^{-l})^{e(N) \cdot \text{ord}_p c(\chi)}, p \mid c(\chi), \end{cases}$$

$$\text{здесь } e(N) = \begin{cases} 0, & d^+(N) = l; \\ 1, & d^+(N) = l+1. \end{cases}$$

2. З а м е ч а н и я. а) При $r=1$ получаем теорему Вишика [7]. б) При $r=2$ гипотеза доказана в обыкновенном случае в [8, 9] и в общем случае в п. 4 настоящей статьи. в) Случай $r=3$ тесно связан с тройными произведениями. Мотив $\text{Sym}^3 M(f)$ является подмотивом мотива $M(f) \otimes M(f) \otimes M(f)$; для $L_{f \otimes f \otimes f}$ доказана теорема о периодах [10] и найдено интегральное представление в терминах некоторого ряда Эйзенштейна—Зигеля рода 3, ограниченного на диагональ.

3. Случай мотивов $\text{Sym}^r M(f)$ CM -типа

0. Пусть λ — характер Гекке веса v мнимого квадратичного поля K . Тогда $\lambda \mapsto f = f_\lambda$ — модулярная форма веса $v+1$, при этом $L(s, \lambda) = L(s, f)$. Пусть $M(f^{(r)}) = \text{Res}_{K/\mathbb{Q}}[\lambda^r]$, где $[\lambda^r]$ — мотив ранга 1 над K , ассоциированный с λ^r , $f^{(r)}$ — модулярная форма веса $rv+1$, соответствующая характеру Гекке λ^r , так что имеет место равенство $L(s, f^{(r)}) = L(s, \lambda^r)$. Выполняются следующие равенства мотивов:

$$\text{Sym}^{2l+1} M(f) = \bigoplus_{i=0}^l M(f^{(2l-2i+1)}) (\psi^i) (-iv), \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\text{Sym}^{2l} M(f) = \bigoplus_{i=0}^{l-1} M(f^{(2l-2i)}) (\psi^i) (-iv) \oplus [\psi^l] (-lv), \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

1. П е р и о д ы. Справедливы формулы:

$$c^e(f^{(2k+1)}) = \langle f, f \rangle^k \cdot c^e(f),$$

$$c^+(f^{(2k)}) = \langle f, f \rangle^k, \quad c^-(f^{(2k)}) = G(\psi)^{-1} \cdot \langle f, f \rangle^k.$$

Имеет место теорема о периодах для $\text{Sym}^r M(f)$, поскольку она верна для мотивов модулярных форм и мотивов вида $[\psi^i]$.

2. Существование p -адических L -функций для $\text{Sym}^r M(f)$, где f — CM -типа, вытекает из разложений (1), (2), теоремы Вишика и результатов Куботы—Леопольдта—Ивасава. Проверим ч. I гипотезы. Рассмотрим случай нечетной степени (случай четной степени разбирается аналогично).

3. Имеем $\prod_{i=0}^l [c^e(f^{(2l-2i+1)}) G(\psi)^{-i} (2\pi i)^{-iv}] = c^e(\text{Sym}^{2l+1} M(f))$. Проверим еще, что

$$A_p(\text{Sym}^{2l+1} M(f)) = \prod_{i=0}^l A_p \left(\underbrace{M(f^{(2l-2i+1)}) (\psi^i) (-iv)}_{=: \tilde{M}_i} \right). \quad (3)$$

Действительно,

$$\alpha(\tilde{M}_i) = \alpha(p)^{2l-2i+1} \cdot \psi(p)^i \cdot p^{iv},$$

$$\beta(\tilde{M}_i) = \alpha(p)^{2i-2l-1} \cdot \psi(p)^{2l-i+1} \cdot p^{(2l-i+1)v},$$

$$A_p(\tilde{M}_i) = (1 - \alpha(p)^{2i-2l-1} \cdot \psi(p)^{2l-i+1} \cdot p^{(2l-i+1)v}) \times \\ \times (1 - \alpha(p)^{2i-2l-1} \cdot \psi(p)^{-i} \cdot p^{-iv-1}),$$

откуда получаем равенство (3).

4. Проверим ч. III гипотезы. Из работы Вишика следует, что p -адическая L -функция, соответствующая мотиву $M(f)$, имеет тип $o(\log^{\text{ord}_p \alpha(p)})$. Однако $L_p(\text{Sym}^r M(f), \cdot)$ является произведением таких p -адических L -функций (и, быть может, p -адической L -функции типа Куботы—Леопольдта—Ивасава), так что из сказанного выше следует, что она имеет тип $o(\log^h)$, где $h = h(\text{Sym}^r M(f))$.

5. Существование соответствующей h -допустимой меры μ вытекает из следующей леммы.

Л е м м а. Пусть μ_1 (соответственно μ_2) — h_1 (соответственно h_2)-допустимая мера на Gal_p . Тогда $\mu_1 * \mu_2$ является $(h_1 + h_2)$ -допустимой мерой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что если μ — h -допустимая мера, то $\left| \int_{a+(m)} (x-a)^i \Big|_p = o(|m|_p^{i-h}) \right.$ для любого i .

Остальные части гипотезы вытекают из разложений (1), (2), результатов Вишика и Куботы—Леопольдта—Ивасава.

4. $\text{Sym}^2 f$, общий случай

Проверим h -допустимость меры, построенной А. А. Панчишкиным [8]; все обозначения следуют работе [8] и п. 2 настоящей статьи.

0. Используя интегральное представление и теорию Аткина—Ленера, докажем, что нормализованные распределения $D_s^{c\pm}$ можно записать в виде конечной суммы:

$$D_{s,M}^{c\pm}(\chi) = \gamma(M') \cdot \sum_i l(n_i) v^c(M'n_i, s, \chi).$$

Можно доказать, что

$$v^{c\pm}(M'n, s, \chi) \equiv \sum_i A_i \chi(y_i) y_i^{s-k+1} \int_{Z_{S(N_0)}^x} \chi x_p^{s-k+1} d\mu^\pm(c, \cdot), \pmod{M^n}, \quad (4)$$

$$M' | M^n,$$

где $y_i \in Z_{S(N_0)}^x$; A_i p -ограничены; $M, M' \in \mathbf{N}$, причем

$$M_0 c(\chi) | M, M_0^2 c(\chi) | M' \text{ и } \gamma(M') = o(|M|_p^{-2 \text{ord}_p \alpha(p)}) \text{ при } M' = M^2.$$

1. Легко доказывается, что существуют C_p -линейные формы $D^{c\pm}: \mathcal{G}^{m^*-m_*}(\text{Gal}_p) \rightarrow C_p$, такие, что

$$\int_{a+(M)} x_p^j dD^{c\pm} = \int_{a+(M)} dD_{j+1}^{c\pm}$$

при $j = 0, 1, \dots, m^* - m_* - 1$.

Теорема. Для $D^{c\pm}$ выполнено следующее условие роста:

$$\sup_{a \in \text{Gal}_p} \left| \int_{a+(M)} (x-a)^r dD^{c\pm} \right|_p = o(|M|_p^{r-2 \text{ord}_p \alpha^{(p)}}), \quad r = 0, 1, \dots$$

Доказательство (набросок). Имеем

$$\int_{a+(M)} (x-a)^r dD^{c\pm} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-a)^{r-j} \int_{a+(M)} dD_{j+1}^{c\pm}.$$

Достаточно рассмотреть число

$$A = \gamma(M') \sum \binom{r}{j} (-a)^{r-j} \frac{1}{h(M)} \sum_{\chi \bmod M} \chi^{-1}(a) v^{c\pm}(M'n, j, \chi).$$

Из сравнения (4) получаем

$$A \equiv \gamma(M') \alpha^{r-k+1} \int_{\alpha^{-1}+(M)} x^{1-k} (x - \alpha \alpha^{-1})^r d\mu^{\pm}(c, \cdot).$$

Так как $x^{1-k} d\mu^{\pm}(c, \cdot)$ является ограниченной мерой, то последний интеграл имеет порядок $o(|M|_p^k)$. Теперь выберем $M' = M^2$. Теорема доказана.

5. З а м е ч а н и е. С модулярной формой Зигеля можно гипотетически связать мотив над Q и, рассуждая, как в п. 4, можно доказать h -допустимость построенной в работе [3] меры.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Панчишкину за постоянное внимание к работе и многочисленные беседы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jannsen U. Mixed motives and algebraic K -theory//Lect. Notes Math. 1990. 1400.
2. Scholl A. J. Motives for modular forms//Invent. math. 1990. 100 419—430.
3. Panchishkin A. A. Non-archimedean automorphic L -functions//Lect. Notes Math. 1991. 1471.
4. Coates J. On p -adic L -functions//Sém. Bourbaki N 701. Astérisque. 1989. 177—178. 33—58.
5. Panchishkin A. A. Convolutions of Hilbert modular forms, motives and p -adic zeta functions. Preprint MPI. N 43. Bonn, 1990.
6. Deligne P. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales//Proc. Symp. Pure Math. 1979. 33(2). 313—346.
7. Вишик М. М. Непархимедовы меры, связанные с рядами Дирихле//Матем. сб. 1976. 99. 248—260.
8. Panchishkin A. A. Über Nichtarchimedische Symmetrische Quadrate von Spitzenformen. Preprint MPI. N 52. Bonn, 1989.
9. Schmidt C. G. The p -adic L -functions attached to Rankin convolutions of modular forms//J. reine. und angew. Math. 1986. 368. 201—220.
10. Garret P. B., Harris M. Special values of triple product L -functions. Preprint. 1989.

Поступила в редакцию
17.06.91