СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 45, № 1, 1981

УДК 517.956

А. Н. ПЕРЕГУДОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Введение

В цилиндре $Q_\infty=(0, \infty)\times\Omega$, где Ω — ограниченная область n-мерного евклидова пространства R^n_x, $x=(x_1, \ldots, x_N)$, рассмотрим квазилинейные параболические системы вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=d_i\Delta u_i+F_i(u_1, \ldots, u_N), \quad d_i=\mathrm{const}>0, \quad i=1, \ldots, N, \tag{1}$$

с условиями

$$u_i(0, x)=u_i^0(x)\geqslant 0, \quad \left.\frac{\partial u_i}{\partial \nu}\right|_{(0,\infty)\times\partial\Omega}=0, \quad i=1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

(здесь и далее ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$).

Предполагаем, что функции F_i непрерывно дифференцируемы в пространстве R^N_u, $u=(u_1, \ldots, u_N)$, и при $u_1\geqslant 0, \ldots, u_N\geqslant 0$ выполнены следующие условия:

A. $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_i}\leqslant 0$;

B. $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}\geqslant 0$ при $i\neq j$, причем если $u_j>0$, то $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}>0$;

C. $F_i(0, 0, \ldots, 0)=0$;

Д. $\sum\limits_{i=1}^{N} F_i(u_1, \ldots, u_N)=0$.

Считаем также, что $u_i^0(x)\in\bar C_{2+\alpha}(\bar\Omega)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$ и выполнены условия согласования:

$$\left.\frac{\partial u_i^0}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Обозначения для пространств и классов Гёльдера $\bar C_{k+\alpha}$, $C^{k+\alpha}$ употребляются в том же смысле, в каком они употребляются в книге [1].

В работе ([2]) установлено, что при любом $T>0$ в цилиндре $Q_T=(0,\ T]\times\Omega$ существует единственное в $\bar{C}_{2+\alpha}(Q_T)$ решение $u=(u_1(t,\ x),\ \ldots,\ u_N(t,\ x))$ задачи (1), (2), причем оценки функций $u_1(t,\ x),\ldots,\ u_N(t,\ x)$ в норме $\bar{C}_{2+\alpha}(\Omega)$ не зависят от t.

В настоящей работе доказано, что при $t\to\infty$ функции $u_1(t,\ x),\ \ldots$ $\ldots,\ u_N(t,\ x)$ стремятся равномерно по Ω к константам $k_1\geqslant 0,\ \ldots,\ k_N\geqslant 0$ (соответственно), удовлетворяющим алгебраической системе

$$\begin{cases} F_i(k_1,\ \ldots,\ k_N)=0 \quad (i=1,2,\ \ldots,\ N), \\ k_1+\cdots+k_N=\mathcal{M}>0, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{M}=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_{\Omega}(u_1^0(x)+\cdots+u_N^0(x))\,dx,$$

а также дана оценка скорости стабилизации решения задачи (1), (2).

§ 1. Стабилизация решения задачи (1), (2) при $t\to\infty$

ЛЕММА 1. *Пусть* $t_0\geqslant 0$, *функции* $v_1(t,\ x),\ \ldots,\ v_N(t,\ x)$ *и* $\bar{v}_1(t,\ x),\ \ldots$ $\ldots,\ \bar{v}_N(t,\ x)$ *при любом* $T>t_0$ *принадлежат пространству* $\bar{C}_{2+\alpha}([t_0,\ T]\times\bar{\Omega})$ *и в области* $(t_0,\ \infty)\times\Omega$ *удовлетворяют системе* (1) *с условиями*:

$$v_i(t_0,\ x)\equiv v_i^0(x)\geqslant 0,\quad \left.\frac{\partial v_i}{\partial\nu}\right|_{(t_0,\infty)\times\partial\Omega}=0,\quad i=1,2,\ \ldots,\ N,$$

$$\bar{v}_i(t_0,\ x)\equiv\bar{v}_i^0(x)\geqslant 0,\quad \left.\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\nu}\right|_{(t_0,\infty)\times\partial\Omega}=0,\quad i=1,2,\ \ldots,\ N,$$

и пусть

$$\max_i\max_{x\in\bar{\Omega}}|v_i(t_0,\ x)-\bar{v}_i(t_0,\ x)|<\varepsilon\leqslant 1.$$

Тогда при любом $t>t_0$

$$\max_i\max_{x\in\bar{\Omega}}|v_i(t,\ x)-\bar{v}_i(t,\ x)|\leqslant c_1\varepsilon^{\frac{1}{n+1}},$$

где, как и всюду далее, через c_i *обозначаются не зависящие от* t *константы.*

Доказательство. В области $(t_0,\ \infty)\times\Omega$ рассмотрим функции $w_i(t,\ x)\in\bar{C}_{2+\alpha}([t_0,\ \infty)\times\bar{\Omega})$, удовлетворяющие системе (1) с условиями

$$w_i(t_0,\ x)=v_i^0(x)+\varepsilon,\quad \left.\frac{\partial w_i}{\partial\nu}\right|_{(t_0,\infty)\times\partial\Omega}=0,\quad i=1,2,\ \ldots,\ N. \tag{1.1}$$

Заметим, что в силу теоремы 2 из ([2]) в области $(t_0,\ \infty)\times\Omega$ существует единственное решение задачи (1), (1.1) из $\bar{C}_{2+\alpha}((t_0,\ \infty)\times\Omega)$, причем оценки функций $w_i(t,\ x)$ в норме $\bar{C}_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ не зависят от t.

В силу сделанных предположений $v_i^0(x) \leqslant w_i(t_0, x)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, а значит, по лемме 1 из [2], $\bar{v}_i(t, x) \leqslant w_i(t, x)$ при любом $t > t_0$. Из условия Д и однородности граничных условий (2) следует равенство:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1(t, x) + \cdots + u_N(t, x))\, dx = 0, \tag{1.2}$$

которое получится, если сложить уравнения системы (1) и проинтегрировать по Ω полученную сумму. Очевидно, равенство вида (1.2) справедливо и для функций $v_i(t, x)$, $\bar{v}_i(t, x)$ и $w_i(t, x)$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} (w_i(t, x) - \bar{v}_i(t, x))\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} (v_i^0(x) - \bar{v}_i^0(x) + \varepsilon)\, dx \leqslant 2N\varepsilon \operatorname{mes} \Omega.$$

Теперь, учитывая независимость от t оценок функций $w_i(t, x)$ и $\bar{v}_i(t, x)$ в норме $\bar{C}_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ и применяя интерполяционное неравенство (лемма 2.3 из [3]), получаем, что при $t \geqslant t_0$, $\varepsilon \leqslant 1$

$$\max_i \max_{x \in \bar{\Omega}} |w_i(t, x) - \bar{v}_i(t, x)| \leqslant c_2 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} + c_3\varepsilon \leqslant c_4 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}. \tag{1.3}$$

Аналогично доказывается, что при $t \geqslant t_0$

$$\max_i \max_{x \in \bar{\Omega}} |w_i(t, x) - v_i(t, x)| \leqslant c_5 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}. \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) и следует доказываемая лемма.

Из леммы 1 вытекает, что каждое неотрицательное стационарное решение системы (1) устойчиво.

ЛЕММА 2. *Пусть $k_1, \ldots, k_N$ и $k_1', \ldots, k_N'$ — неотрицательные константы, удовлетворяющие неравенствам $k_1 < k_1'$, $k_2 \leqslant k_2', \ldots, k_j \leqslant k_j'$, $k_{j+1} \geqslant k'_{j+1}, \ldots, k_N \geqslant k_N'$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{j} F_i(k_1, \ldots, k_N) > \sum_{i=1}^{j} F_i(k_1', \ldots, k_N').$$

Доказательство. Поскольку $k_1' > k_1 \geqslant 0$, в силу условий В, Д при любом $y \in (k_1, k_1']$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{j} F_i(y, k_2', \ldots, k_N') = \sum_{i=j+1}^{N} -\frac{\partial}{\partial y} F_i(y, k_2', \ldots, k_N') < 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{j} F_i(k_1', \ldots, k_N') < \sum_{i=1}^{j} F_i(k_1, k_2', \ldots, k_N').$$

Но, в силу А, Д, В, при любых $u_1 \geqslant 0, \ldots, u_N \geqslant 0$

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \sum_{i=1}^{j} F_i(u_1, \ldots, u_N) \leqslant 0 \text{ при } m \leqslant j$$

и

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \sum_{i=1}^{j} F_i(u_1, \ldots, u_N) \geqslant 0 \text{ при } m > j;$$

значит,

$$\sum_{i=1}^{j} F_i(k_1', \ldots, k_N') < \sum_{i=1}^{j} F_i(k_1, k_2', \ldots, k_N') \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{j} F_i(k_1, \ldots, k_j, k_{j+1}', \ldots, k_N') \leqslant \sum_{i=1}^{j} F_i(k_1, \ldots, k_N).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *При любом* $\mathcal{M} > 0$ *существует неотрицательное решение алгебраической системы*

$$\begin{cases} F_i(y_1, \ldots, y_N) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \\ y_1 + \cdots + y_N = \mathcal{M}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Omega_{N-1}' = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_N): \ y_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{N} y_i = \mathcal{M} \right\}$$

и предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и такая точка $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0N}) \in \Omega'_{N-1}$, что

$$\sum_{i=1}^{N} |F_i(y_0)| = \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{N} |F_i(y)| \geqslant \varepsilon$$

для любого $y \in \Omega'_{N-1}$. Не нарушая общности, можно считать, что $F_i(y_0) < 0$ при $i \leqslant j$ $(0 < j < N)$, $F_i(y_0) = 0$ при $j < i \leqslant j + l$ $(0 \leqslant l < N - j)$ и $F_i(y_0) > 0$ при $j + l < i \leqslant N$. Из условия $F_1(y_0) < 0$ и В, С следует, что $y_{01} > 0$. Очевидно, существует такое $\delta > 0$, что $y_0^\delta = (y_{01} - \delta, y_{02}, \ldots, y_{0N} + \delta) \in \Omega'_{N-1}$ и $F_i(y_0^\delta) < 0$ при $i \leqslant j$, $F_i(y_0^\delta) > 0$ при $j + l < i \leqslant N$. Можно считать, что $F_i(y_0^\delta) < 0$ при $j < i \leqslant j + l_1$ $(0 \leqslant l_1 \leqslant l)$ и $F_i(y_0^\delta) \geqslant 0$ при $j + l_1 < i \leqslant N$ (этого всегда можно добиться соответствующим изменением нумерации функций F_i и их аргументов). Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} |F_i(y_0^\delta)| = -\sum_{i=1}^{j+l_1} F_i(\ {}_0^\delta) + \sum_{i=j+l_1+1}^{N} F_i(y_0^\delta).$$

По лемме 2

$$\sum_{i=1}^{j+l_1} F_i(y_0^\delta) > \sum_{i=1}^{j+l_1} F_1(y_0),$$

а значит,

$$\sum_{i=j+l_1+1}^{N} F_i(y_0^\delta) < \sum_{i=j+l_1+1}^{N} F_i(y_0).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{N} |F_i(y_0^\delta)| = -\sum_{i=1}^{j+l_1} F_i(y_0^\delta) + \sum_{i=j+l_1+1}^{N} F_i(y_0^\delta) <$$
$$< -\sum_{i=1}^{j+l_1} F_i(y_0) + \sum_{i=j+l_1+1} F_i(y_0) = \sum_{i=1}^{N} |F_i(y_0)|.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 4. *Неотрицательное решение системы* (1.5) *единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $k=(k_1, \ldots k_N)$ и $k'=(k_1', \ldots, k_N')$ — два не равных между собой неотрицательных решения системы (1.5). Поскольку $\sum_{i=1}^{N} k_i = \sum_{i=1}^{N} k_i' = \mathscr{M}$ и $k \neq k'$, то можно считать, что $k_1 < k_1'$, $k_2 \leqslant k_2'$, $\ldots$, $k_j \leqslant k_j'$, $k_{j+1} \geqslant k_{j+1}'$, $\ldots$, $k_N \geqslant k_N'$ $(0 < j < N)$. Но по лемме 2

$$\sum_{i=1}^{j} F_i(k) > \sum_{i=1}^{j} F_i(k'),$$

что противоречит предположению

$$\sum_{i=1}^{j} F_i(k) = \sum_{i=1}^{j} F_i(k') = 0.$$

Лемма доказана.

На интервале (t_0, ∞) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = F_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_N) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.6}$$

с условиями

$$\bar{u}_i(t_0) = \bar{u}_i^0 \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i^0 = \mathscr{M}. \tag{1.7}$$

Очевидно, задача (1.6), (1.7) является частным случаем задачи (1), (2), а значит, она имеет единственное решение $\bar{u}_1(t)\geqslant 0, \ldots, \bar{u}_N(t)\geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \bar{u}_i(t)\equiv\mathcal{M}$.

ЛЕММА 5. *Компоненты* $\bar{u}_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ *решения задачи* (1.6), (1.7) *при* $t\to\infty$ *стремятся соответственно к константам* $k_i\geqslant 0$, *удовлетворяющим системе* (1.5).

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(t)\equiv V(\bar{u}(t))$, где $V(u)=|\bar{u}_1-k_1|+\ldots+|\bar{u}_N-k_N|$. Она непрерывна по Липшицу и в каждой точке $t>t_0$ имеет правую производную. Фиксируем $t_1>t_0$ и покажем, что

$$\left.\frac{dG(t)}{dt}\right|_{t_1+0}<0,$$

если $\bar{u}(t_1)=(\bar{u}_1(t_1), \ldots, \bar{u}_N(t_1))\neq k=(k_1, \ldots, k_N)$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{N}\bar{u}_i(t_1)=$ $=\sum\limits_{i=1}^{N}k_i=\mathcal{M}$ и $\bar{u}(t_1)\neq k$, то можно считать, что

$$\bar{u}_1(t_1)>k_1, \ldots, \bar{u}_j(t_1)>k_j,\ \bar{u}_{j+1}(t_1)=k_{j+1}, \ldots, \bar{u}_{j+l}(t_1)=k_{j+l},$$
$$\bar{u}_{j+l+1}(t_1)<k_{j+l+1}, \ldots, \bar{u}_N(t_1)<k_N \qquad (0<j<N,\ 0\leqslant l<N-j).$$

Тогда

$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{t_1+0}=\left(\frac{d\bar{u}_1}{dt}+\cdots+\frac{d\bar{u}_j}{dt}+\left|\frac{d\bar{u}_{j+1}}{dt}\right|+\cdots+\left|\frac{d\bar{u}_{j+l}}{dt}\right|-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{d\bar{u}_{j+l+1}}{dt}-\cdots-\frac{d\bar{u}_N}{dt}\right)\right|_{t=t_1}=F_1(\bar{u}(t_1))+\cdots+F_j(\bar{u}(t_1))+$$
$$+|F_{j+1}(\bar{u}(t_1))|+\cdots+|F_{j+l}(\bar{u}(t_1))|-F_{j+l+1}(\bar{u}(t_1))-\cdots-F_N(\bar{u}(t_1)).$$

Так как $\bar{u}_i(t_1)>k_i$ при $0<i\leqslant j$, $\bar{u}_i(t_1)=k_i$ при $j<i\leqslant j+l$ и $\bar{u}_i(t_1)<k_i$ при $j+l<i\leqslant N$, то по лемме 2

$$\sum_{i=1}^{j}F_i(\bar{u}(t_1))+\sum_{i=j+1}^{j+l}|F_i(\bar{u}(t_1))|-\sum_{i=j+l+1}^{N}F_i(\bar{u}(t_1))<$$
$$<\sum_{i=1}^{j}F_i(k)+\sum_{i=j+1}^{j+l}|F_i(k)|-\sum_{i=j+l+1}^{N}F_i(k)=0.$$

В силу произвольности t_1 получаем, что $\left.\dfrac{dG}{dt}\right|_{t+0}<0$ при любом $t>t_0$.

Нетрудно проверить, что функция $V(\bar{u})$ является функцией Ляпунова в смысле определения, данного в работе ([4]). Применяя теорему 7 из ([4]), получаем доказываемую лемму.

В области $(t_0, \infty)\times\Omega$ рассмотрим функции $\tilde{u}_i(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ из $\bar{C}_{2+\alpha}((t_0, T]\times\Omega)$ при любом $T>t_0$, удовлетворяющие системе (1) с условиями:

$$\tilde{u}_i(t_0, x) = f_i(x) \geqslant 0, \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\right|_{(t_0,\infty)\times\partial\Omega} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$
$$f_i(x) \in \bar{C}_{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \left.\frac{\partial f_i}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.8}$$

Такие функции существуют, поскольку существует единственное решение задачи (1), (1.8) из $\bar{C}_{2+\alpha}([t_0, \infty)\times\bar{\Omega})$ (см. ([2])).

ЛЕММА 6. *Если не все функции $f_i(x)$ — константы, то существуют такие константы $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, что при любом $t>t_0+\delta_1$*

$$\sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\bar{\Omega}} \tilde{u}_i(t, x) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\bar{\Omega}} f_i(x) - \delta_2. \tag{1.9}$$

Доказательство. В лемме 2 из ([2]) доказано, что при $t>t_0$

$$\sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\bar{\Omega}} \tilde{u}_i(t, x) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\bar{\Omega}} f_i(x).$$

Пусть функции $\bar{u}_i(t)$ удовлетворяют системе (1.6) с условиями $\bar{u}_i(t_0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} f_i(x)$. По лемме 1 из ([2]) $\bar{u}_i(t)\geqslant\tilde{u}_i(t, x)$ при $t>t_0$. Пусть $f_j(x)\neq\mathrm{const}$. Справедливо равенство:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)}{\partial t} = d_i\Delta(\bar{u}_j-\tilde{u}_j) +$$
$$+(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)\int_0^1 \frac{\partial F_j}{\partial u_j}(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{j-1}, \tau\bar{u}_j+(1-\tau)\tilde{u}_j, \bar{u}_{j+1}, \ldots, \bar{u}_N)\,d\tau +$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\int_0^1 \frac{\partial F_j}{\partial u_k}(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{k-1}, \tau\bar{u}_k+(1-\tau)\tilde{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_N)\,d\tau.$$

Учитывая, что $\bar{u}_k\geqslant\tilde{u}_k$, из условий A, B, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_j-\tilde{u}_j) \geqslant d_j\Delta(\bar{u}_j-\tilde{u}_j) - O_j(t, x)(\bar{u}_j-\tilde{u}_j), \tag{1.10}$$

где $V_j(t, x)\geqslant 0$.

Фиксируем $\delta_1>0$ и покажем, что в цилиндре $Q_{\delta_1}=(t_0, t_0+\delta_1]\times\Omega$ функция $(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)$ не может принимать нулевые значения. Предположим противное. Пусть в некоторой точке $(t_0, x_0)\in Q_{\delta_1}$ $(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)(t_0, x_0)=0$; это означает, что

$$(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)(t_0, x_0) = \min_{(t,x)\in\bar{Q}_{\delta_1}}(\bar{u}_j-\tilde{u}_j).$$

К функции $\bar{u}_j-\tilde{u}_j$ применим аналог теоремы 7 из [5] (вариант леммы о нормальной производной с неравенством (1.10), которая доказывается точно так же, как и теорема 7 в [5]). Следовательно, если $x_0\in\partial\Omega$, то $\left.\frac{\partial(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)}{\partial\nu}\right|_{(t_0,x_0)}<0$, что противоречит условию $\left.\frac{\partial(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0$. Значит, $x_0\notin\partial\Omega$ и (t_0, x_0) — точка внутреннего минимума функции $\bar{u}_j-\tilde{u}_j$ в Q_{δ_1}. Но в этом случае из теоремы 5, § 2, гл. II в [1] следует, что $(\bar{u}_j-\tilde{u}_j)\equiv 0$ в Q_{δ_1}, а это противоречит предположению $f_j\neq\mathrm{const}$. Следовательно, существует такая константа $\delta_2>0$, что

$$\bar{u}_j(t_0+\delta_1)-\max_{x\in\bar{\Omega}}\tilde{u}_j(t_0+\delta_1, x)\geqslant\delta_2>0.$$

Отсюда, учитывая, что при любом $t>t_0$

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{u}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\bar{\Omega}}f_i(x),$$

получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\bar{\Omega}}\tilde{u}_i(t_0+\delta_1, x)\leqslant\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\bar{\Omega}}f_i(x)-\delta_2. \tag{1.11}$$

Согласно лемме 2 из [2] при $t>t_0+\delta_1$

$$\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\bar{\Omega}}\tilde{u}_i(t, x)\leqslant\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\bar{\Omega}}\tilde{u}_i(t_0+\delta_1, x). \tag{1.12}$$

Из (1.11), (1.12) и следует доказываемая лемма.

ТЕОРЕМА 1. *Компоненты $u_i(t, x)$ решения задачи* (1), (2) *при $t\to\infty$ стремятся по норме $C_0(\bar{\Omega})$ соответственно к константам $k_i\geqslant 0$, удовлетворяющим системе* (1.5) *при*

$$\mathcal{M}=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int_{\Omega}(u_1^0(x)+\cdots+u_N^0(x))\,dx.$$

Доказательство. Семейство $u_1(t, x), \ldots, u_N(t, x)$ ограничено в норме $\bar{C}_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, а значит, компактно в норме $\bar{C}_{2+\alpha_1}(\bar{\Omega})$ $(\alpha_1<\alpha)$; отсюда следует, что существует последовательность $\{t_m\}$ такая, что $t_m\to\infty$ при $m\to\infty$ и $u_i(t_m, x)\to f_i(x)$ по норме $\bar{C}_{2+\alpha_1}(\bar{\Omega})$. Очевидно, $f_i(x)\in\bar{C}_{2+\alpha_1}(\bar{\Omega})$,

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}f_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}u_i^0(x)\,dx,$$

$f_i(x)\geqslant 0$ и $\left.\frac{\partial f_i}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0.$

Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ (выбор будет сделан ниже) существует такой номер m_ε, что при $m \geqslant m_\varepsilon$

$$\max_i \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_i(t_m, x) - f_i(x)| < \varepsilon < 1. \tag{1.13}$$

В области $(t_{m_\varepsilon}, \infty) \times \Omega$ рассмотрим функции $\overline{\overline{u}}_i(t, x)$, удовлетворяющие системе (1) с условиями (1.8). Если не все $f_i(x)$ — константы, то по лемме 6 существуют δ_1, δ_2 такие, что

$$\sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{\overline{u}}_i(t, x) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \overline{\Omega}} f_i(x) - \delta_2$$

при $t > t_{m_\varepsilon} + \delta_1$. Из леммы 1 и неравенства (1.13) следует, что при $t > t_{m_\varepsilon}$

$$\max_i \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_i(t, x) - \overline{\overline{u}}_i(t, x)| < c_1 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \overline{\Omega}} u_i(t, x) < c_1 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \Omega} f_i(x) - \delta_2$$

при $t > t_{m_\varepsilon} + \delta_1$. Выберем ε так, чтобы $c_1 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} < \frac{\delta_2}{2}$, тогда при $t > t_{m_\varepsilon} + \delta_1$

$$\sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \overline{\Omega}} u_i(t, x) < \sum_{i=1}^{N} \max_{x \in \overline{\Omega}} f_i(x) - \frac{\delta}{2},$$

что противоречит предположению $u_i(t_m, x) \to f_i(x)$ при $m \to \infty$.

Таким образом, показано, что $f_i \equiv k_i' = \text{const}$ и функции $\overline{\overline{u}}_i(t, x) \equiv \equiv \overline{\overline{u}}_i(t)$ являются решением системы (1.6) с условиями

$$\overline{\overline{u}}_i(t_{m_\varepsilon}) = k_i', \text{ где } k_i' \geqslant 0,$$
$$\sum_{i=1}^{N} k_i' = \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_{\Omega} (u_1^0(x) + \cdots + u_N^0(x))\, dx.$$

Так как по лемме 5 $\overline{\overline{u}}_i(t) \to k_i$ при $t \to \infty$ и

$$\max_i \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_i(t, x) - \overline{\overline{u}}_i(t)| < c_1 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}$$

при $t > t_a$, то в силу произвольности ε получаем, что $u_i(t_m, x) \to k_i$ при $m \to \infty$ по норме $\overline{C}_0(\overline{\Omega})$.

Покажем теперь, что $u_i(t, x) \to k_i$ при $t \to \infty$. По доказанному выше, для любого $\delta > 0$ существует такое $m(\delta)$, что

$$\max_i \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_i(t_{m(\delta)}, x) - k_i| < \delta^{n+1},$$

В силу леммы 1 при любом $t > t_{m(\delta)}$

$$\max_i \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_i(t, x) - k_i| < \text{const} \cdot \delta,$$

где const не зависит от δ. Теорема доказана.

§ 2. Оценка скорости стабилизации

Пусть выполнены все условия теоремы 1, и пусть функции F_i дважды непрерывно дифференцируемы в пространстве R_u^N. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое* $\lambda > 0$, *что*

$$\max_i \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_i(t, x) - k_i| \leqslant ce^{-\lambda t},$$

где константы c *и* λ *зависят от* n, N, F_i, *области* Ω *и оценок функций* $u_i(t, x)$ в норме $\overline{C}_{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. По теореме 1 для любого $\gamma > 0$ существует такое $T(\gamma) > 0$, что при $t > T(\gamma)$

$$\max_i \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_i(t, x) - k_i| < \gamma.$$

Разлагая правые части по формуле Тейлора, получаем:

$$\frac{\partial (u_i - k_i)}{\partial t} = d_i\Delta(u_i - k_i) + \sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right|_{u=k} (u_j - k_j) + R^i, \tag{2.1}$$

где

$$R^i = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i(\theta u + (1-\theta)k)}{\partial u_j \partial u_l} (u_j - k_j)(u_l - k_l).$$

Заметим, что в силу условия B, $k_i > 0$, следовательно, все элементы матрицы $\left\{\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}\right\}$ отличны от нуля. В работе ([2]) доказано, что в этом случае общее решение линейной системы

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j} y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

представляет собой однопараметрическое семейство $y_1 = \alpha_1\tau, \ldots, y_N = \alpha_N\tau$, где $\alpha_i > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 1$ (этого всегда можно добиться соответствующей заменой в системе (1)).

Умножим каждое i-е уравнение системы (2.1) на функцию $(u_i - k_i)$, проинтегрируем по Ω и сложим полученные равенства; тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)^2\,dx=\int\limits_{\Omega}\Bigg[-\sum_{i=1}^{N}d_i\,|(u_i-k_i)_x|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}(u_j-k_j)(u_i-k_i)+\sum_{i=1}^{N}R^i(u_i-k_i)\Bigg]dx\leqslant$$

$$\leqslant-\min_i\frac{d_i}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\left|\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)_x\right|\right)^2dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}(u_j-k_j)(u_i-k_i)+\sum_{i=1}^{N}R^i(u_i-k_i)\right]dx.$$

Заметим, что $\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)\right)dx=0$, следовательно, по неравенству Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left|\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)_x\right|\right)^2dx\geqslant\mu\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)\right)^2dx.$$

В предложении 3 из ([2]) доказано, что

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}(u_j-k_j)(u_i-k_i)\leqslant0,$$

причем равенство нулю возможно только тогда, когда

$$u_1-k_1=u_2-k_2=\cdots=u_N-k_N.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма

$$-\mu\min_i\frac{d_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}(u_j-k_j)\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}(u_i-k_i)(u_j-k_j)$$

отрицательно определена, а значит, существует такое $\lambda_1>0$, что

$$-\mu\min_i\frac{d_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}(u_j-k_j)\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i(k)}{\partial u_j}(u_i-k_i)(u_j-k_j)\leqslant$$

$$\leqslant-\lambda_1\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)^2.$$

Предполагая, что $t>T(\gamma)$, получаем неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)^2\,dx\leqslant-\lambda_1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)^2\,dx+\gamma c_1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(u_i-k_i)^2\,dx.$$

Выберем γ так, чтобы $\gamma c_1<\frac{\lambda_1}{2}$, тогда при $t>T(\gamma)$

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(u_i(t,x)-k_i)^2\,dx\leqslant\operatorname{mes}\Omega N\gamma^2e^{-\lambda_1(t-T(\gamma))}.$$

Теперь, используя независимость от t оценок функций $u_i(t, x)$ в норме $\bar{C}_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ и интерполяционное неравенство (лемма 2.3 из ([3])), получаем доказываемую теорему.

В заключение выражаю глубокую благодарность С. Н. Кружкову за постоянное внимание к работе.

Поступило
19.IX.1980

Литература

1 **Фридман А.**, Уравнения с частными производными параболического типа, М., «Мир», 1968.

2 **Перегудов А. Н.**, Вторая краевая задача для квазилинейных параболических систем типа систем химической кинетики, ЖВМ и МФ, № 1 (1981).

3 **Кружков С. Н.**, Нелинейные уравнения с частными производными, ч. 2, М., Изд-во МГУ, 1970.

4 **Йосидзава Т.**, Функция Ляпунова и ограниченность решений, Сб. переводов «Математика», 9 : 5 (1965), 95—126.

5 **Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.**, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Успехи матем. наук, 17, вып. 3 (1952), 3—146.

Технический редактор *Т. И. Васильева*

Сдано в набор 04.11.80 Подписано к печати 29.12.80 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 21,0 Уч.-изд. л. 18,1 Бум. л. 7,5 Тираж 1864 экз. Зак. 5202

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10