В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина, Об автоморфной сводимости для наборов элементов свободных групп,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 3, 52–55

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

75-летию Альфреда Львовича
Шмелькина посвящается

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05+512.543.72

ОБ АВТОМОРФНОЙ СВОДИМОСТИ ДЛЯ НАБОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ СВОБОДНЫХ ГРУПП

В. Г. Дурнев (Ярославль), О. В. Зеткина (Ярославль),
А. И. Зеткина (Ярославль)

Аннотация

Устанавливается, что проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы F_2 ранга два сводится к вопросу о разрешимости уравнений над этой группой.

Ключевые слова: свободная группа, автоморфизм, уравнение над группой.

Библиография: 6 названий.

ON AUTOMORPHIC REDUCIBILITY FOR SETS ELEMENTS OF FREE GROUPS

V. G. Durnev (Yaroslavl), O. V. Zetkina (Yaroslavl),
A. I. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

Establish that the problem of reducibility for automorphic stencils free group F_2 of rank two is a matter of solvability of equations over this group.

Keywords: free group, automorphism, equation over group.

Bibliography: 6 titles.

Проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы была сформулирована и решена топологическими методами в 1936 году Уайтхедом [1]. Решение методами комбинаторной теории групп было предложено Рапапорт [2] и упрощено Хиггинсом и Линдоном [3].

Напомним формулировку проблемы автоморфной сводимости:

по произвольным двум наборам $(u_1, \ldots, u_n)$ *и* $(v_1, \ldots, v_n)$ *элементов свободной группы определить, существует ли такой автоморфизм* φ *этой группы, что* $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} \varphi(u_i) = v_i$.

Если в формулировке проблемы автоморфной сводимости заменить автоморфизм φ группы на ее эндоморфизм φ, то мы получим *проблему эндоморфной сводимости для наборов элементов руппы.*

В настоящей заметке показывается, что проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы F_2 ранга два сводится к проблеме разрешимости в этой группе одного уравнения с пятью неизвестными, разрешенного относительно неизвестных. Это открывает возможность применения для ее решения результатов Г. С. Маканина [4].

Теорема 1. *По любым двум наборам* $(u_1, \ldots, u_n)$ *и* $(v_1, \ldots, v_n)$ *элементов свободной группы* F_2 *со свободными образующими* a *и* b *можно построить уравнение, разрешенное относительно неизвестных, вида*

$$W(x, y, u, v, z) = [a, b]$$

такое, что существует автоморфизм φ *группы* F_2 *такой, что* $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} \varphi(u_i) = v_i$ *тогда и только тогда, когда это уравнение имеет решение в группе* F_2.

Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Уравнение* $w(x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1$ *имеет решение в свободной группе* F_2 *тогда и только тогда, когда в этой группе имеет решение следующее уравнение*

$$w^4(x_1, \ldots, x_n, u, v)[u, v] = [a, b].$$

Доказательство. Если уравнение $w(x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1$ имеет решение g_1, ..., g_n в свободной группе F_2, то g_1, ..., g_n, a, b – решение уравнения

$$w^4(x_1, \ldots, x_n, u, v)[u, v] = [a, b].$$

Обратно, пусть g_1, ..., g_n, α, β – решение уравнения

$$w^4(x_1, \ldots, x_n, u, v)[u, v] = [a, b].$$

А. А. Вдовина в статье [5] доказала, в частности, что равенство $[u, v][s, t] = w^4$ влечет в свободной группе F_2 равенство $w = 1$. Поэтому равенство

$$w^4(g_1, \ldots, g_n, \alpha, \beta)[\alpha, \beta] = [a, b]$$

влечет равенства $w(g_1, \ldots, g_n, \alpha, \beta) = 1$ и $[\alpha, \beta] = [a, b]$.

Тогда по теореме А. И. Мальцева [6] α и β – свободные образующие свободной группы F_2, поэтому существует автоморфизм φ свободной группы F_2 такой, что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

Применив автоморфизм φ к равенству $w(g_1, \ldots, g_n, \alpha, \beta) = 1$, получим

$$w(\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n), a, b) = 1.$$

Значит уравнение $w(x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1$ имеет решение. $\square$

Доказательство. теоремы. А. И. Мальцев в работе [6] доказал, что

U и V – свободные образующие свободной группы F_2 со свободными образующими a и b тогда и только тогда, когда на группе F_2 истинна формула

$$(\exists z)(z[U, V]z^{-1} = [a, b] \vee z[U, V]z^{-1} = [a, b]^{-1}.$$

Поэтому для двух наборов $(u_1(a, b), \ldots, u_n(a, b))$ и $(v_1(a, b), \ldots, v_n(a, b))$ элементов свободной группы F_2 существует автоморфизм φ этой группы такой, что

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \varphi(u_i(a, b)) = v_i(a, b)$$

тогда и только тогда, когда на группе F_2 истинна формула

$$(\exists x, y, z) \mathop{\&}_{i=1}^{n} u_i(x, y) = v_i(a, b) \,\&\, \bigvee_{\varepsilon \in \{-1, 1\}} z[x, y]z^{-1} = [a, b]^{\varepsilon}. \tag{1}$$

Г. Гуревич [4] построил такое групповое слово $D(x, y, a, b)$, что для произвольных двух элементов g и h свободной группы F_2 справедлива эквивалентность

$D(g, h, a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $g = 1 \vee h = 1$.

А. И. Мальцев и Г. Гуревич [4] построили несколько примеров таких групповых слов $C(x, y, a, b)$, что для произвольных двух элементов g и h свободной группы F_2 справедлива эквивалентность

$C(g, h, a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $g = 1 \,\&\, h = 1$.

Используя указанные слова $D(x, y, a, b)$ и $C(x, y, a, b)$, мы из формулы (1) удалим знаки дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции & и получим формулу вида

$$(\exists x, y, z) U(x, y, z, a, b) = 1$$

такую, что

для наборов $(u_1(a, b), \ldots, u_n(a, b))$ и $(v_1(a, b), \ldots, v_n(a, b))$ элементов свободной группы F_2 существует автоморфизм φ этой группы такой, что

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \varphi(u_i(a, b)) = v_i(a, b)$$

тогда и только тогда, когда на группе F_2 истинна формула

$$(\exists x, y, z) U(x, y, z, a, b) = 1. \tag{2}$$

Воспользовавшись леммой, получаем

для наборов $(u_1(a,b),\ldots,u_n(a,b))$ и $(v_1(a,b),\ldots,v_n(a,b))$ элементов свободной группы F_2 существует автоморфизм φ этой группы такой, что

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\&}}\varphi(u_i(a,b)) = v_i(a,b)$$

тогда и только тогда, когда в этой группе имеет решение следующее уравнение

$$U^4(x,y,z,u,v)[u,v] = [a,b].$$

□

Обозначим через F_5 свободную группу ранга 5, свободные образующие которой ради удобства обозначим через a, b, c, d и e.

Уравнение вида

$$W(x,y,z,u,v) = g(a,b)$$

имеет решение в группе F_2 тогда и только тогда, когда оно имеет решение в группе F_5. Кроме того, уравнение указанного вида имеет решение в группе F_5 тогда и только тогда, когда существует эндоморфизм ψ этой группы такой, что

$$\psi(W(a,b,c,d,e)) = g(a,b).$$

Следствие 1. *Проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы F_2 ранга 2 сводится к проблеме эндоморфной сводимости для элементов свободной группы F_5 ранга 5.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whitehead J. H. C. On equivalent sets of elements in a free group // Ann. of Math. 1936. Vol. 37. P. 782—800.

2. Rapaport E. S. On free groups and their automorphisms // Acta Math. 1958. Vol. 99. P. 139—163.

3. Higgins P. J. Equivalence of elements under automorphisms of a free group // J. London Math. Soc. 1974. Vol. 8. P. 254—258.

4. Маканин, Г. С. Уравнения в свободной группе // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1982. Т. 46, №6. С. 1199—1273.

5. Вдовина А. А. Произведение коммутаторов и квадратов в свободной группе // Третья международная конференция по алгебре: сборник тезисов. Красноярск: Изд-во КрГУ, 1993. С. 66—67.

6. Мальцев А. И. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, №5. С. 45—50.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Поступило 18.09.2013