



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Бисли, А. Э. Гутерман, С. Йи, LP-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: граничные ранги, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2004, том 10, выпуск 2, 3–21

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

24 марта 2025 г., 03:20:17



LR-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: граничные ранги*

Л. Б. БИСЛИ

Государственный университет Юты
e-mail: lbeasley@math.usu.edu

А. Э. ГУТЕРМАН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: guterman@mmascience.ru

С.-Ч. ЙИ

Национальный университет Чангвая
e-mail: scyi@changwon.ac.kr

УДК 512.643

Ключевые слова: ранговые неравенства, эндоморфизмы матричных пространств, граничный ранг.

Аннотация

Получена характеристика линейных отображений матриц над полукольцами, сохраняющих множество упорядоченных наборов матриц, удовлетворяющих экстремальным ранговым свойствам для граничного и нулевого граничного рангов суммы и произведения матриц.

Abstract

L. B. Beasley, A. E. Guterman, S.-C. Yi, Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: term-rank and zero-term-rank, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 2, pp. 3–21.

We characterize linear operators on matrices over semirings that preserve the extremal cases in the bounds on term- and zero-term-ranks of sums and products of matrices.

1. Введение

Определение 1.1. Полукольцом \mathcal{S} называется алгебраическая система, состоящая из множества \mathcal{S} и двух бинарных операций: сложения и умножения, удовлетворяющих следующим аксиомам:

- \mathcal{S} является коммутативным моноидом по сложению (нейтральный элемент обозначается 0);

*Работа второго автора частично поддержана грантами РФФИ 02-01-00218, НШ-1910.2003.01 и INTAS YSF 03-55-1919.

- \mathcal{S} является полугруппой по умножению (если существует нейтральный элемент, то он обозначается 1);
- умножение дистрибутивно относительно сложения с двух сторон;
- $s0 = 0s = 0$ для всех $s \in \mathcal{S}$.

В этой статье мы предполагаем существование в полукольце \mathcal{S} единицы 1, отличной от 0.

Определение 1.2. Полукольцо называется *антинегативным*, если в нём только нулевой элемент имеет аддитивный обратный.

Определение 1.3. Полукольцо называется *цепным*, если множество \mathcal{S} является вполне упорядоченным с универсальными максимальным и минимальным элементами и операциями, заданными по правилам $a + b = \max\{a, b\}$ и $a \cdot b = \min\{a, b\}$.

Тривиальная проверка показывает, что цепное полукольцо коммутативно и антинегативно.

Пусть \mathcal{S} — полукольцо, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — множество всех $(m \times n)$ -матриц с элементами из полукольца \mathcal{S} .

Определение 1.4. *Линией* в матрице A называется строка или столбец матрицы A .

Следующие ранговые функции часто используются для решения различных задач в теории матриц над полукольцами.

Определение 1.5. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *граничный ранг k* ($t(A) = k$), если наименьшее число линий, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы матрицы A , равно k . Будем обозначать через $c(A)$ наименьшее число столбцов, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы матрицы A , и через $r(A)$ — наименьшее число строк, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы A .

Определение 1.6. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *нулевой граничный ранг k* ($z(A) = k$), если наименьшее число линий, необходимых для покрытия всех нулевых элементов A , равно k .

Пусть \mathcal{S} является подполукольцом некоторого поля. Тогда определена обычная функция матричного ранга $\rho(A)$ для любой матрицы $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Поведение функции ρ относительно матричного сложения и умножения устанавливается следующими классическими неравенствами:

неравенствами для суммы матриц:

$$|\rho(A) - \rho(B)| \leq \rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B),$$

неравенствами Сильвестра:

$$\rho(A) + \rho(B) - n \leq \rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$$

и неравенством Фробениуса:

$$\rho(AB) + \rho(BC) \leq \rho(ABC) + \rho(B),$$

где A, B, C — матрицы подходящих размеров с элементами из поля.

Арифметические свойства граничного и нулевого граничного рангов описываются следующими неравенствами, доказанными в [3]:

- 1) $t(A + B) \leq t(A) + t(B)$;
- 2) $t(A + B) \geq \max\{t(A), t(B)\}$;
- 3) $t(AB) \leq \min\{c(A), r(B)\}$;
- 4) $t(AB) \geq t(A) + t(B) - n$;
- 5) если \mathcal{S} содержится в полукольце неотрицательных вещественных чисел, то $\rho(AB) + \rho(BC) \leq t(ABC) + t(B)$;
- 6) $z(A + B) \geq 0$;
- 7) $z(A + B) \leq \min\{z(A), z(B)\}$;
- 8) $z(AB) \geq 0$;
- 9) $z(AB) \leq z(A) + z(B)$.

2. Предварительные результаты

Мы будем использовать следующие обозначения для семейств матриц, возникающих в экстремальных случаях в вышеперечисленных неравенствах:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X + Y) = t(X) + t(Y)\}; \\ \mathcal{T}_2(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X + Y) = \max\{t(X), t(Y)\}\}; \\ \mathcal{T}_3(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = \min\{r(X), c(Y)\}\}; \\ \mathcal{T}_4(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = t(X) + t(Y) - n\}; \\ \mathcal{T}_5(\mathcal{S}) &= \{(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^3 \mid t(XYZ) + t(Y) = \rho(XY) + \rho(YZ)\}; \\ \mathcal{Z}_1(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X + Y) = \min\{z(X), z(Y)\}\}; \\ \mathcal{Z}_2(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X + Y) = 0\}; \\ \mathcal{Z}_3(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = 0\}; \\ \mathcal{Z}_4(\mathcal{S}) &= \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = z(X) + z(Y)\}. \end{aligned}$$

Определение 2.1. Преобразование T сохраняет множество \mathcal{P} , если из $X \in \mathcal{P}$ следует, что $T(X) \in \mathcal{P}$, или, если \mathcal{P} является множеством упорядоченных пар [троек], предполагается, что из условия $(X, Y) \in \mathcal{P}$ [$(X, Y, Z) \in \mathcal{P}$] следует, что $(T(X), T(Y)) \in \mathcal{P}$ [$(T(X), T(Y), T(Z)) \in \mathcal{P}$].

Определение 2.2. Преобразование T строго сохраняет множество \mathcal{P} , если $X \in \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $T(X) \in \mathcal{P}$, или, если \mathcal{P} является множеством упорядоченных пар [троек], $(X, Y) \in \mathcal{P}$ [$(X, Y, Z) \in \mathcal{P}$] эквивалентно $(T(X), T(Y)) \in \mathcal{P}$ [$(T(X), T(Y), T(Z)) \in \mathcal{P}$].

Определение 2.3. Матрица $X \circ Y$ обозначает произведение Адамара, т. е. элемент (i, j) матрицы $X \circ Y$ есть $x_{i,j}y_{i,j}$.

Определение 2.4. Преобразование T называется (P, Q, B) -оператором, если существуют матрицы перестановки P и Q и матрица B без нулевых элементов, такие что $T(X) = P(X \circ B)Q$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, или, если $m = n$, $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Как было доказано в [3], неравенства 1–9 точны и неуплучшаемы.

Естественный вопрос состоит в характеристизации случаев равенства в рассматриваемых неравенствах. Даже для матриц над полями это открытый вопрос (см. [12, 13, 16, 17]). Структура матричных многообразий, возникающих в качестве экстремальных случаев в этих неравенствах, неизвестна ни над полями, ни над полукольцами. Стандартный способ выбора элементов таких многообразий состоит в применении линейных преобразований, сохраняющих данное многообразие, к семействам матриц, заведомо ему принадлежащих. Классификация аналогичных преобразований матриц над полями была получена в [1, 4, 6, 11]. Исследование соответствующей проблемы над полукольцами было начато в работе [2], где предпочтение было отдано факторизационному рангу. Эта работа является продолжением [2]. Она посвящается изучению линейных преобразований, сохраняющих экстремальные случаи в ранговых неравенствах для граничного и нулевого граничного рангов. Другие результаты по теории линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты над полями и кольцами, можно найти в работе [15] и приведённых там ссылках. Граничный и нулевой граничный ранги подробно изучаются в [10, 14]. В частности, линейные отображения, сохраняющие граничные ранги, изучались в [5, 7–9].

Определение 2.5. Пусть \mathcal{S} — не обязательно коммутативное полукольцо. Преобразование $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ называется *линейным*, если оно аддитивно и, кроме того, $T(\alpha X) = \alpha T(X)$ и $T(X\alpha) = T(X)\alpha$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $\alpha \in \mathcal{S}$.

Определение 2.6. Матрица A *мажорирует* матрицу B , если из $b_{i,j} \neq 0$ следует, что $a_{i,j} \neq 0$, что обозначается $A \geq B$ или $B \leq A$.

Определение 2.7. Если A и B — матрицы, причём $A \geq B$, то $A \setminus B$ обозначает матрицу C , где

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } b_{i,j} \neq 0, \\ a_{i,j} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обозначает центр полукольца \mathcal{S} . Будем предполагать, что $m \leq n$. Пусть I_n — тождественная $(n \times n)$ -матрица, $J_{m,n}$ — $(m \times n)$ -матрица, все элементы которой — единицы, $O_{m,n}$ — нулевая $(m \times n)$ -матрица. Мы будем опускать нижние индексы для обозначения размеров матриц, если это не приводит к недоразумениям, и будем писать I, J, O соответственно. Пусть $E_{i,j}$ обозначает матрицу, у которой на (i, j) -м месте стоит единица, а все остальные элементы нулевые, такая матрица называется *клеткой*. Пусть R_i обозначает матрицу, у которой i -я строка целиком состоит из единиц, а на всех остальных позициях находятся нули, C_j обозначает матрицу, у которой j -й столбец целиком состоит

из единиц, а на всех остальных позициях находятся нули. Мы обозначаем через $|A|$ число ненулевых элементов в матрице A . Пусть $A[i, j | k, l]$ обозначает (2×2) -подматрицу A , которая лежит на пересечении i -й и j -й строк с k -м и l -м столбцами.

Приведём без доказательства некоторые результаты, доказанные в [2], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 2.8 ([2, теорема 2.14]). Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейный оператор. Следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) отображение T является биективным;
- 2) отображение T является сюръективным;
- 3) существуют перестановка σ на множестве $\{(i, j) \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ и обратимые элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, такие что $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$.

Замечание 2.9. Непосредственно проверяется, что при $m = 1$ или $n = 1$ все рассматриваемые линейные преобразования являются (P, Q, B) -операторами, а если $m = n = 1$, то (P, P^t, B) -операторами.

Далее мы будем предполагать, что $m, n \geq 2$.

Лемма 2.10 ([2, лемма 2.16]). Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейное преобразование, отображающее линии в линии, задаваемое формулой $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$, где σ является перестановкой на множестве $\{(i, j) \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ и $b_{i,j} \in \mathcal{S}$ — некоторые ненулевые элементы, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда T является (P, Q, B) -оператором.

3. Граничный ранг

Напомним, что

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X + Y) = t(X) + t(Y)\}.$$

Теорема 3.1. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Доказательство. Легко видеть, что все (P, Q, B) -операторы сохраняют граничный ранг. Следовательно, они сохраняют множество \mathcal{T}_1 .

По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Покажем, что отображение T переводит линии в линии. Допустим, что образы двух клеток лежат в одной линии, тогда как сами клетки не лежат, т. е. пусть

существуют такие клетки $E_{i,j}, E_{k,l}$, что $t(E_{i,j} + E_{k,l}) = 2$, а $t(T(E_{i,j} + E_{k,l})) = 1$. Тогда $(E_{i,j}, E_{k,l}) \in \mathcal{T}_1$, однако $(T(E_{i,j}), T(E_{k,l})) \notin \mathcal{T}_1$ — противоречие. Таким образом, отображение T переводит линии в линии. Следовательно, по лемме 2.10 отображение T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — перестановочные матрицы подходящих размеров, элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы. \square

Для некоторых классов полуколец теорема 3.1 может быть усилена следующим образом.

Теорема 3.2. Пусть \mathcal{S} — конечное антинегативное или произвольное цепное полукольцо. Линейное отображение $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда T является (P, Q, B) -оператором, где элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ не являются делителями нуля.

Доказательство. Если все элементы $b_{i,j}$ не являются делителями нуля, то любой (P, Q, B) -оператор сохраняет граничный ранг и, следовательно, строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$.

Пусть отображение T строго сохраняет множество \mathcal{T}_1 , \mathcal{S} — конечное антинегативное полукольцо с 1 или цепное полукольцо. Непосредственная проверка показывает, что существуют такие положительные целые $\alpha > \beta$, что $\alpha \cdot 1_{\mathcal{S}} = \beta \cdot 1_{\mathcal{S}}$. В [8] доказано, что в конечном полукольце существует степень T , являющаяся идемпотентом. Аналогичное доказательство справедливо для цепных полуколец. В самом деле, согласно определениям умножения и сложения в цепном полукольце, элементы каждой степени данной матрицы A содержатся в множестве элементов A . Поэтому множество различных матриц среди степеней A является конечным. Следовательно, существуют положительные целые s и t , такие что для всех $p, q > s$, $p \equiv q \pmod{t}$ справедливо, что $A^p = A^q$. В частности, $A^{st} = A^{2st}$. Следовательно, у каждого оператора над цепным полукольцом найдётся идемпотентная степень. В обоих случаях обозначим $L = T^d$ и $L^2 = L$. Легко проверяется, что L строго сохраняет множество \mathcal{T}_1 .

Заметим, что если $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ и $(X, X) \in \mathcal{T}_1$, то $X = O$. Следовательно, если $A \neq O$, то $L(A) \neq O$, так как L строго сохраняет \mathcal{T}_1 .

Предположим, что существует такой индекс i , $1 \leq i \leq m$, что $L(R_i)$ не мажорируется R_i . Тогда существуют такая пара индексов (r, s) , что $E_{r,s} \leq L(R_i)$, тогда как $E_{r,s} \not\leq R_i$. Легко видеть, что $(R_i, E_{r,s}) \in \mathcal{F}_1$ и существует матрица $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ с $x_{r,s} = 0$, такая что $L(R_i) = aE_{r,s} + X$ для некоторого $0 \neq a \in \mathcal{S}$. Тогда $(R_i, E_{r,s}) \in \mathcal{T}_1$, $L(R_i) = aE_{r,s} + X$, здесь $x_{r,s} = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} L(\beta R_i + (\alpha - \beta)aE_{r,s}) &= L(\beta R_i) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = \\ &= L^2(\beta R_i) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = L(\beta L(R_i)) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = \\ &= L(\beta(aE_{r,s} + X)) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = L(\beta aE_{r,s} + \beta X) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = \\ &= L(\beta X) + L(\beta aE_{r,s}) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = L(\beta X) + L(\beta aE_{r,s} + (\alpha - \beta)aE_{r,s}) = \\ &= L(\beta X) + L(\alpha aE_{r,s}) = L(\alpha X) + L(\alpha aE_{r,s}) = L(\alpha(X + aE_{r,s})) = \\ &= L(\alpha L(R_i)) = L^2(\alpha R_i) = L(\alpha R_i) = L(\beta R_i). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\beta R_i, (\alpha - \beta)aE_{r,s}) \in \mathcal{T}_1$, однако

$$L(\beta R_i) + L((\alpha - \beta)aE_{r,s}) = L(\beta R_i + (\alpha - \beta)aE_{r,s}) = L(\beta R_i).$$

Следовательно, $(L(\beta R_i), L((\alpha - \beta)aE_{r,s})) \notin \mathcal{T}_1$ — противоречие.

Мы установили, что $L(R_i) \leq R_i$ для всех i . Аналогично, $L(C_j) \leq C_j$ для всех j . Рассматривая матрицу $E_{i,j}$, которая мажорируется как R_i , так и C_j , имеем, что $L(E_{i,j}) \leq E_{i,j}$. В силу антинегативности \mathcal{S} получаем, что T отображает клетки в клетки с весами, или $|T(E_{i,j})| = 1$ для всех i, j , и все элементы $T(J)$ ненулевые.

Следовательно, T индуцирует перестановку σ на множестве индексов $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, т. е. $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для некоторых скаляров $b_{i,j}$. Из линейности T следует, что $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$.

Повторяя доказательство теоремы 3.1, получим, что T является (P, Q, B) -оператором. \square

Напомним, что

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X + Y) = \max(t(X), t(Y))\}.$$

Теорема 3.3. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_2(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Доказательство. По теореме 2.8 имеем, что T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ — обратимые элементы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Предположим, что образы двух клеток не лежат в одной линии, тогда как клетки лежат. Пусть $E_{i,j}, E_{i,l}$ — такие клетки, т. е. $T(E_{i,j}), T(E_{i,l})$ не лежат в одной линии. Это означает, что $t(T(E_{i,j} + E_{i,l})) = 2$. Тогда $(E_{i,j}, E_{i,l}) \in \mathcal{T}_2$, но $(T(E_{i,j}), T(E_{i,l})) \notin \mathcal{T}_2$ — противоречие. Следовательно, T^{-1} отображает линии в линии. По лемме 2.10 отсюда следует, что T^{-1} является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы. Следовательно, T также имеет такой вид.

Все (P, Q, B) -операторы сохраняют граничный ранг, а значит, и множество $\mathcal{T}_2(\mathcal{S})$. \square

Напомним, что

$$\mathcal{T}_3(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = \min\{r(X), c(Y)\}\}.$$

Теорема 3.4. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_3(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда существуют матрица перестановки $P \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ и матрица $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, такие что $T(X) = P(X \circ B)P^t$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.

Доказательство. Легко видеть, что все операторы рассматриваемого вида сохраняют $t(A)$, $c(A)$, $r(A)$ и, следовательно, так как \mathcal{S} антинегативно, они сохраняют множество \mathcal{T}_3 .

По теореме 2.8 получаем, что $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ в этом случае.

Покажем, что T переводит линии в линии. Для всех k имеем $(E_{i,j}, E_{j,k}) \in \mathcal{T}_3$, так как

$$t(E_{i,j}E_{j,k}) = t(E_{i,k}) = 1 = \min\{r(E_{i,j}), c(E_{j,k})\}.$$

Следовательно, $t(T(E_{i,j})T(E_{j,k})) = \min\{r(T(E_{i,j})), c(T(E_{j,k}))\} = 1$ поскольку T отображает клетки в клетки. Однако $T(E_{i,j})T(E_{j,k}) = b_{i,j}b_{j,k}E_{\sigma(i,j)}E_{\sigma(j,k)}$, т. е. $E_{\sigma(j,k)}$ лежит в той же строке, что и $E_{\sigma(j,1)}$, для каждого k . Значит, T отображает строки матрицы в строки. Аналогично проверяется, что T отображает столбцы в столбцы. Тогда $T(X) = P(X \circ B)Q$ для подходящих матриц перестановки P и Q .

Следовательно, $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i),\tau(j)}$, где σ — перестановка, соответствующая матрице P , τ — перестановка, соответствующая матрице Q^t . Однако $(E_{1,i}, E_{i,1}) \in \mathcal{T}_3$. Следовательно, $(E_{\sigma(1),\tau(i)}, E_{\sigma(i),\tau(1)}) \in \mathcal{T}_3$, т. е. $\sigma \equiv \tau$, откуда $Q = P^t$. \square

Заметим, что если существует ненулевой мультипликативно необратимый элемент $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, то отображение $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, заданное формулой $T(X) = sX$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, сохраняет все матричные множества, упомянутые в этой работе, однако не является сюръективным. Таким образом, представляется интересным указать неинъективные и вырожденные (обладающие нетривиальным ядром) линейные отображения, сохраняющие указанные множества, или доказать их отсутствие.

Покажем, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие множество \mathcal{T}_3 .

Пример 3.5. Пусть $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное отображение, определяемое на множестве клеток следующим образом: $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = E_{1,1}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, $(i,j) \neq (n,n)$. Тогда T сохраняет множество \mathcal{T}_3 .

Доказательство. Результат следует из того, что все пары матриц, принадлежащих образу отображения T , лежат в множестве \mathcal{T}_3 . \square

Напомним, что

$$\mathcal{T}_4(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = t(X) + t(Y) - n\}.$$

Для изучения случая равенства в нижней оценке на ранг произведения нам понадобится следующая редукция.

Лемма 3.6. Пусть \mathcal{S} — произвольное полукольцо, линейное отображение $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Тогда T сохраняет множество матриц граничного ранга n .

Доказательство. Пусть $A = 0$, B — произвольная матрица граничного ранга n . Тогда $t(A) = 0$, $t(AB) = 0$, т. е. $t(AB) = t(A) + t(B) - n$. Отсюда

$t(T(A)T(B)) = t(T(A)) + t(T(B)) - n$. Таким образом, $0 = 0 + t(T(B)) - n$. Следовательно, $t(T(B)) = n$. Значит, отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n . \square

Лемма 3.7. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество матриц граничного ранга n тогда и только тогда, когда T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Доказательство. Легко видеть, что все (P, Q, B) -операторы с обратимыми матрицами P , Q и элементами $b_{i,j}$, не являющимися делителями нуля, сохраняют граничный ранг.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех $i, j, 1 \leq i, j \leq n$, где все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар индексов. Проверим, что отображение T^{-1} переводит линии в линии. Предположим, что прообраз некоторой строки не мажорируется ни одной линией. Тогда существуют такие индексы i, k, l , что $T^{-1}(E_{i,k})$ и $T^{-1}(E_{i,l})$ не лежат в одной линии, т. е. существуют такие индексы $p, r, q, s, p \neq r, q \neq s$, что $T^{-1}(E_{i,k} + E_{i,l}) \leq E_{r,s} + E_{p,q}$ и $T^{-1}(E_{i,k} + E_{i,l})$ не мажорируется ни одной из клеток $E_{r,s}, E_{p,q}$. Добавим к матрице $E_{r,s} + E_{p,q}$ сумму $n - 2$ клеток таким образом, что получится матрица перестановки. Обозначим её A . Имеем $t(A) = n$. Поскольку отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n , имеем $t(T(A)) = n$. С другой стороны, $T(A)$ мажорируется $n - 1$ линией, поскольку $T(E_{r,s}) = b_{r,s}E_{i,k}$ и $T(E_{p,q}) = b_{p,q}E_{i,l}$ лежат в одной строке. Это противоречит условию $t(T(A)) = n$. Следовательно, прообразами строк являются строки или столбцы. Аналогично, прообразами столбцов являются строки или столбцы. Из леммы 2.10 следует, что T является (P, Q, B) -оператором. \square

Теорема 3.8. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Преобразование T сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда существуют матрица перестановки $P \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ и матрица $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, такие что $T(X) = P(X \circ B)P^t$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.

Доказательство. Покажем, что отображения рассматриваемого типа сохраняют множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Легко видеть, что все (P, Q, B) -операторы сохраняют граничный ранг. Следовательно, правая часть равенства, определяющего множество \mathcal{T}_4 , не меняется под действием T и остаётся только проверить, что $t(XY) = t(P(X \circ B)P^tP(Y \circ B)P^t)$. Однако $t(P(X \circ B)P^tP(Y \circ B)P^t) = t((X \circ B)(Y \circ B)) = t(XY)$, поскольку полукольцо \mathcal{S} является антинегативным и все элементы матрицы B обратимы.

Проверим теперь, что все сюръективные линейные отображения, сохраняющие множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, являются (P, Q, B) -операторами. Для этого заметим, что по лемме 3.6 отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n .

Тогда по лемме 3.7 отображение T является (P, Q, B) -оператором, $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Покажем, что отображение $T(Z) = P(Z \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Действительно, поскольку подобие сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, можно вместо отображения T рассматривать отображение $T_1(Z) = P^t P(Z \circ B)^t Q P = (Z \circ B)^t D$, где $D = QP$ — перестановочная матрица. Пусть $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$ для всех i, j . Тогда при $i \neq j$ справедливо $(X = ((D^{-1})^t E_{i,j}) \circ C, Y = I \setminus E_{j,j}) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, так как $t(XY) = t(O) = 0 = 1 + (n-1) - n$. Однако $((X \circ B)^t D = E_{j,i}, (Y \circ B)^t D = ((I \setminus E_{j,j}) \circ B^t) D) \notin \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, поскольку $t(E_{j,i}((I \setminus E_{j,j}) \circ B^t) D) = t(E_{j,i}) = 1 \neq 0$.

Остаётся проверить, что $PQ = I$. Предположим, что (P, Q, B) -оператор сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Тогда $t(XY) = t((X \circ B)QPY)$ для всех пар $(X, Y) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Матрица QP является матрицей перестановки, как произведение двух матриц перестановки. Предположим, что QP переставляет i -й и j -й столбцы матрицы X . Пусть $X = E_{i,i}$, $Y = \sum_{j \neq i} E_{j,j}$. Тогда $t(X) = 1$, $t(Y) = n-1$, $t(XY) = t(O) = 0 = t(X) + t(Y) - n$, т. е. $(X, Y) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. С другой стороны, $(X \circ B)QP = b_{ii} E_{i,j}$. Следовательно, $(X \circ B)QP(Y \circ B) = b_{i,i} b_{j,j} E_{i,j} \neq 0$, откуда $(P(X \circ B)Q, P(Y \circ B)Q) \notin \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Замечание 3.9. Рассматривая матрицы $((QP)^{-1})^t E_{1,1} \circ C$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$ для всех i, j , и $E_{2,1} + E_{3,2} + \dots + E_{n,n-1}$, можно аналогичным образом убедиться, что отображение $T(Z) = P(Z \circ B)^t Q$ не сохраняет множество \mathcal{F}_{4R} (см. [2, теорема 9.2]).

Пусть полукольцо \mathcal{S} содержится в множестве неотрицательных действительных чисел \mathbb{R}_+ .

Напомним, что

$$\mathcal{T}_5(\mathcal{S}) = \{(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^3 \mid t(XYZ) + t(Y) = \rho(XY) + \rho(YZ)\}.$$

Определение 3.10. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет факторизационный ранг k ($\text{rank}(A) = k$), если существуют такие матрицы $B \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathcal{S})$ и $C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathcal{S})$, что $A = BC$ и k — наименьшее положительное целое число, для которого существует такое разложение. По определению единственной матрицей, обладающей нулевым факторизационным рангом, является нулевая матрица O .

Лемма 3.11. Пусть \mathcal{S} — полукольцо, содержащееся в \mathbb{R}_+ , $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $m, n \geq 2$. Допустим, что $b_{i,j}$ обратимы для всех $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Пусть (k, l) — произвольная фиксированная пара целых чисел, удовлетворяющих неравенствам $2 \leq k \leq n$, $2 \leq l \leq m$. Предположим, что факторизационный ранг каждой $(l \times k)$ -подматрицы матрицы B равен 1. Тогда факторизационный ранг каждой $((l+1) \times k)$ -подматрицы (если она существует) равен 1 и факторизационный ранг каждой $(l \times (k+1))$ -подматрицы (если она существует) равен 1.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $(l \times (k+1))$ -подматрицу матрицы B . Применяя, если это необходимо, перестановку строк и столбцов, можно предположить, что эта подматрица имеет вид

$$B' = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} & b_{1,k+1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} & b_{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l,1} & b_{l,2} & \dots & b_{l,k} & b_{l,k+1} \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы существуют четыре вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathcal{S}^l$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{S}^k$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l) \in \mathcal{S}^l$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{S}^k$, такие что

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l,1} & b_{l,2} & \dots & b_{l,k} \end{pmatrix} = \mathbf{s}^t \mathbf{t} \quad (1)$$

и

$$\begin{pmatrix} b_{1,2} & \dots & b_{1,k} & b_{1,k+1} \\ b_{2,2} & \dots & b_{2,k} & b_{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l,2} & \dots & b_{l,k} & b_{l,k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{u}^t \mathbf{v}. \quad (2)$$

Рассмотрим матрицу

$$B'' = \mathbf{s}^t (t_1, t_2, \dots, t_k, s_1^{-1} u_1 v_k)$$

и проверим, что $B' = B''$. Первые k столбцов этих матриц совпадают по определению векторов \mathbf{s} и \mathbf{t} . Рассмотрим последний столбец. Имеем

$$b''_{1,k+1} = s_1 \cdot s_1^{-1} u_1 v_k = u_1 v_k = b_{1,k+1},$$

где последнее равенство следует из формулы (2). Из определения векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} и равенств (1), (2) следует, что $s_i t_j = b_{i,j} = u_i v_{j-1}$ для всех $i = 1, \dots, l$, $j = 2, \dots, k$. Тогда $s_i^{-1} u_i = t_j v_{j-1}^{-1}$ для всех $i = 1, \dots, l$. Следовательно,

$$s_1^{-1} u_1 = \dots = s_l^{-1} u_l.$$

Для любого $i = 2, \dots, l$ имеем

$$b''_{i,k+1} = s_i \cdot s_1^{-1} u_1 v_k = s_i \cdot s_i^{-1} u_i v_k = u_i v_k = b_{i,k+1},$$

т. е. $B' = B''$. Отсюда $\text{rank}(B') = 1$. Аналогичные рассуждения для $((l+1) \times k)$ -матрицы завершают доказательство. \square

Лемма 3.12. Пусть \mathcal{S} — полукольцо, содержащееся в \mathbb{R}_+ , $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $m, n \geq 2$. Предположим, что коэффициенты $b_{i,j}$ обратимы для всех $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ и $\text{rank}(B) \leq 2$. Тогда $\text{rank}(B) = \rho(B)$.

Доказательство. Легко видеть, что для любой матрицы $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ справедливо неравенство $\rho(B) \leq \text{rank}(B)$. Следовательно $\rho(B) \leq 2$. Рассмотрим

отдельно каждый из трёх случаев: $\rho(B) = 0$, $\rho(B) = 1$ или $\rho(B) = 2$. В случае $\rho(B) = 2$ имеем $2 \leq \text{rank}(B) \leq 2$, т. е. $\text{rank}(B) = 2$. Если $\rho(B) = 0$, то $B = 0$ и, следовательно, $\text{rank}(B) = 0$. Остаётся проверить, что если $\rho(B) = 1$, то $\text{rank}(B) = 1$. Хорошо известно, что факторизационный ранг матрицы над любым подполем поля \mathbb{R} равен факторизационному рангу этой матрицы над полем \mathbb{R} . Пусть \mathcal{K} обозначает минимальное подполе в поле вещественных чисел \mathbb{R} , содержащее \mathcal{S} . Поскольку $\rho(B) = 1$, существуют такие векторы $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathcal{K}^m$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{K}^n$, что $B = \mathbf{s}^t \mathbf{t}$, т. е. $b_{i,j} = s_i t_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Заметим, что s_i, t_j отличны от нуля, поскольку $b_{i,j}$ — ненулевые элементы. Без ограничения общности можно считать, что $s_1 = 1$ (в противном случае рассмотрим разложение $B = \mathbf{s}'^t \mathbf{t}'$, где $s'_i = s_i s_1^{-1}$, $t'_i = t_i s_1$). Поскольку для всех $j = 1, \dots, n$ справедливо равенство $b_{1,j} = t_j$, имеем $t_j \in \mathcal{S}$, элементы t_j обратимы в \mathcal{S} для всех $j = 1, \dots, n$.

Отсюда для всех $i = 1, \dots, m$ следует, что $s_i = b_{i,1} t_1^{-1} \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\text{rank}(B) = 1$. \square

Следующий пример показывает, что предположение обратимости элементов матрицы действительно необходимо в леммах 3.11 и 3.12.

Пример 3.13. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 15\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_+[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]).$$

Заметим, что $\rho(B) = 1$, так как её строки линейно зависимы. Легко видеть, что для любой (2×2) -подматрицы B' матрицы B справедливо $\text{rank}(B') = 1$. Например,

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку элемента $\sqrt{2}$ в полукольце $\mathbb{Z}_+[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ нет, разложение матрицы B в произведение столбца и строки невозможно. Следовательно, $\text{rank}(B) = 2$.

Лемма 3.14. Пусть \mathcal{S} — полукольцо, содержащееся в \mathbb{R}_+ . Если $T(X) = X \circ B$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ и $\text{rank}(B) = 1$, то существуют такие диагональные матрицы D и E , что $T(X) = DXE$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Доказательство. Если $\text{rank}(B) = 1$, то существуют такие векторы $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_m]$ и $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, что $B = \mathbf{d} \mathbf{e}^t$, т. е. $b_{i,j} = d_i e_j$. Рассмотрим $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ и $E = \text{diag}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. По условию (i, j) -й элемент матрицы $T(X)$ равен $b_{i,j} x_{i,j}$, (i, j) -й элемент матрицы DXE равен $d_i x_{i,j} e_j = b_{i,j} x_{i,j}$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.15. Пусть \mathcal{S} — полукольцо, содержащееся в \mathbb{R}_+ , $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Если T сохраняет множество $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$, то T имеет вид $T(X) = PDXE^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы из $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j .

Предположим, что некоторая строка, например i -я, отображается под действием T не в строку. Тогда без ограничения общности можно предположить, что $\sigma(i, i) = (y, r)$, $\sigma(i, k) = (x, s)$ и $y \neq x$. Тройка матриц $(E_{i,i}, E_{i,i}, E_{i,i})$ принадлежит $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$, поэтому

$$(b_{i,i}E_{y,r}, b_{i,i}E_{y,r}, b_{i,i}E_{y,r}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Отсюда с необходимостью $y = r$. Симметрично переставляя строки и столбцы, можно предположить, что $y = r = i$.

Пусть индексы l и j таковы, что для произвольного j справедливо $\sigma(l, j) = (p_l, q_l)$ и $\sigma(j, i) = (u, v)$. Если $v \neq i$, то

$$(E_{l,j}, E_{j,i}, E_{i,i}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$$

и, следовательно,

$$(b_{l,j}E_{p_l, q_l}, b_{j,i}E_{u, v}, b_{i,i}E_{i, i}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Получаем, что $q_l = u$ для всех l . Если $v = i$, то

$$(E_{l,j}, E_{j,i}, E_{i,k}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$$

и, следовательно,

$$(b_{l,j}E_{p_l, q_l}, b_{j,i}E_{u, v}, b_{i,k}E_{x, s}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Имеем $q_l = u$ для всех l . Следовательно, j -й столбец отображается в u -й. Так как j было выбрано произвольно, получаем, что T переводит столбцы в столбцы.

Заметим, что

$$(E_{i,k}, E_{i,i}, E_{i,k}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}),$$

в то время как

$$(b_{i,k}E_{x, s}, b_{i,i}E_{i, i}, b_{i,k}E_{x, s}) \notin \mathcal{T}_5(\mathcal{S}),$$

так как из $k \neq i$ следует $s \neq i$. Данное противоречие показывает, что T переводит строки в строки.

Аналогичные рассуждения показывают, что T переводит столбцы в столбцы. Следовательно, T является нетранспонированным (P, Q, B) -оператором, где все элементы B обратимы по лемме 2.10.

Для доказательства того, что $Q = P^t$, достаточно заметить, что

$$(E_{i,j}, E_{j,j}, E_{j,i}) \in \mathcal{T}_5.$$

Следовательно,

$$(E_{\sigma(i), \tau(j)}, E_{\sigma(j), \tau(j)}, E_{\sigma(j), \tau(i)}) \in \mathcal{T}_5,$$

откуда $\sigma \equiv \tau$.

Покажем, что $\rho(B) = 1$. Непосредственная проверка убеждает, что преобразование $X \rightarrow PXP^t$ сохраняет \mathcal{T}_5 . Следовательно, $T_0(X) = X \circ B$ сохраняет \mathcal{T}_5 .

В силу антинегативности полукольца имеем $t(X \circ B \cdot Y \circ B \cdot Z \circ B) = t(XYZ)$ и $t(Y \cdot B) = t(Y)$. Поэтому если $(X, Y, Z) \in \mathcal{T}_5$, то

$$\rho(X \circ B \cdot Y \circ B) + \rho(Y \circ B \cdot Z \circ B) = \rho(XY) + \rho(YZ).$$

Предположим, что $\rho(B) \geq 2$. Следовательно, существует (2×2) -подматрица в матрице B , имеющая ранг 2, а именно $\rho(B[i, j \mid k, l]) = 2$. Рассмотрим $X = 0$, $Y = (E_{i,k} + E_{i,l} + E_{j,k} + E_{j,l}) \circ C$, где $C = (c_{i,j})$, $c_{i,j} = b_{i,j}^{-1}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, $Z = I$. Следовательно, $\rho(XY) + \rho(YZ) = 0 + 2 = t(XYZ) + t(Y)$, т. е. $(X, Y, Z) \in \mathcal{T}_5$. С другой стороны,

$$\rho(Y \circ B \cdot Z \circ B) = \rho(E_{i,k} + E_{i,l} + E_{j,k} + E_{j,l}) = 1 \neq 2 = \rho(YZ).$$

Получено противоречие, так как $X = 0$, т. е. $\rho(X \circ B \cdot Y \circ B) = \rho(XY) = 0$. По лемме 3.12 получаем, что $\text{rank}(B) = 1$. Следовательно, по лемме 3.14 T имеет требуемый вид. \square

Лемма 3.16. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо, A, B — матрицы подходящего размера с элементами в \mathcal{S} и D — диагональная матрица без делителей нуля на диагонали. Тогда $t(ADB) = t(AB)$.

Доказательство следует из антинегативности полукольца \mathcal{S} . \square

Теорема 3.17. Пусть \mathcal{S} является подполукольцом в \mathbb{R}_+ , $n \geq 4$ и $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если T имеет вид $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, такие что $ED = kI$ для некоторых ненулевых $k \in \mathcal{S}$.

Доказательство. Пусть T — сюръективный линейный оператор, сохраняющий $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. По лемме 3.15 $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$. Достаточно установить, что $ED = kI$. Обозначим $DE = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$ (матрица DE является диагональной, как произведение диагональных матриц). Предположим, что $ED \neq kI$ для всех $k \in \mathcal{S}$, тогда $f_i \neq f_{i+1}$ для некоторого i . Переставляя i -е строку/столбец с первыми и $(i+1)$ -е со вторыми, можно предполагать, не ограничивая общности рассуждений, что $ED = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и $d_1 \neq d_2$. Пусть

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & & & O_{2,n-3} & \\ & & & & O_{n-2,n-3} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \\ \frac{d_1}{d_2} & \frac{d_1}{d_2} & \frac{d_1}{d_2} & & \\ 1 & 3 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & O_{n-4,3} & \\ & & & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$XY = XYI = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & & \\ \frac{d_1}{d_2} + 1 & \frac{d_1}{d_2} + 3 & \frac{d_1}{d_2} + 3 & & \\ & & & O_{2,n-3} & \\ & & & & O_{n-2,n-3} \end{bmatrix},$$

значит, $t(XY) = 2$, $\rho(XYI) = 2$, следовательно, $t(XY) + t(YI) = \rho(XYI) + \rho(Y)$, так как $t(YI) = \rho(Y) = 3$. Поэтому $(X, Y, I) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. Имеем $T(X)T(Y) = PDXEP^tPDYEP^t = PD(XEDY)EP^t$, а значит, $t(T(X)T(Y)) = t(XY) = 2$ по лемме 3.16 и так как умножение на матрицы перестановки и обратимые диагональные матрицы с обеих сторон не меняет граничный ранг. Далее, $\rho(T(X)T(Y)T(I)) = \rho(XEDY)$, так как если $\rho(Y) = n$, то $\rho(XY) = \rho(YX) = \rho(X)$ для произвольной матрицы X . Имеем

$$EDY = \begin{bmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & & \\ d_1 & d_1 & d_1 & & \\ d_3 & 3d_3 & 3d_3 & & O_{4,n-3} \\ 0 & 0 & d_4 & & \\ & O_{n-4,3} & & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}$$

и

$$XEDY = \begin{bmatrix} d_1 + d_3 & d_1 + 3d_3 & d_1 + 3d_3 & & \\ d_1 + d_3 & d_1 + 3d_3 & d_1 + 3d_3 & & O_{2,n-3} \\ & & O_{n-2,3} & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\rho(T(X)T(Y)T(I)) = 1 < \rho(XYI)$ и $\rho(T(Y)) = \rho(Y)$. Значит, $t(T(X)T(Y)) + t(T(Y)T(I)) = 2 + 3 = 5 > 4 = 1 + 3 = \rho(T(X)T(Y)T(I)) + \rho(T(Y))$, т. е. $(T(X), T(Y), T(I)) \notin \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$ — противоречие. Следовательно, $ED = kI$ для некоторого ненулевого $k \in \mathcal{S}$.

Непосредственная проверка показывает, что если $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, такие что $ED = kI$ для некоторого ненулевого $k \in \mathcal{S}$, то T сохраняет $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. \square

Покажем, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие множества \mathcal{T}_4 и \mathcal{T}_5 .

Пример 3.18. Пусть $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ является линейным преобразованием, заданным на множестве матричных единиц следующим образом: $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = I$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, $(i, j) \neq (n, n)$. Тогда T сохраняет множества \mathcal{T}_4 и \mathcal{T}_5 .

Доказательство. Действительно, единственная пара матриц, принадлежащая образу T и не лежащая в \mathcal{T}_4 , — это (O, O) . В силу антинегативности \mathcal{S} и линейности T получаем, что полный прообраз пары (O, O) является множеством $\mathcal{K} = \{(O, O), (E_{n,n}, O), (O, E_{n,n}), (E_{n,n}, E_{n,n})\}$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{K} \cap \mathcal{T}_4 = \emptyset$. Следовательно, T сохраняет \mathcal{T}_4 . Аналогично проверяется, что T сохраняет \mathcal{T}_5 . \square

4. Нулевой граничный ранг

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_1(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X + Y) = \min\{z(X), z(Y)\}\}.$$

Теорема 4.1. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{Z}_1(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если T является (P, Q, B) -оператором, где P, Q — матрицы перестановки, $B = (b_{i,j})$, элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j .

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, где все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Покажем, что отображение T переводит линии в линии. Предположим, что образы двух клеток, лежащих в одной линии, не лежат в одной линии. Пусть $E_{i,j}, E_{i,k}$ — такие клетки, что $T(E_{i,j}), T(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Тогда $z((J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k}) + E_{i,k}) = 1 = z(J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k})$, т. е. $(J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k}, E_{i,k}) \in \mathcal{Z}_1$, тогда как $z(T(J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k}) + T(E_{i,k})) = 1 < 2 = \min\{z(T(J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k})), z(T(E_{i,k}))\}$, т. е. $(T(J \setminus E_{i,j} \setminus E_{i,k}), T(E_{i,k})) \notin \mathcal{Z}_1$ — противоречие. Следовательно, T переводит линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Прямая проверка показывает, что все (P, Q, B) -операторы сохраняют нулевой граничный ранг. Следовательно, они сохраняют множество $\mathcal{Z}_1(\mathcal{S})$. \square

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_2(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X + Y) = 0\}.$$

Теорема 4.2. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Z}_2(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

Из антинегативности полукольца \mathcal{S} следует, что если матрица $(X + Y)$ не содержит нулевых элементов, то множества нулевых клеток матриц X и Y не пересекаются. Тогда множества нулевых клеток матриц $T(X)$ и $T(Y)$ не пересекаются, так как σ — перестановка. Следовательно, матрица $(T(X) + T(Y))$ не содержит нулевых элементов. Отсюда следует, что все отображения указанного вида сохраняют множество $\mathcal{Z}_2(\mathcal{S})$. \square

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_3(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = 0\}.$$

Теорема 4.3. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если

$T(X) = P(X \circ B)P^t$, где P — матрица перестановки, $B = (b_{ij})$, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j .

Доказательство. Легко видеть, что отображения указанного типа сохраняют множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Покажем, что T отображает линии в линии. Предположим, что образы двух клеток лежат в одной линии, а сами клетки не лежат. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,k}$ — такие клетки, что $T^{-1}(E_{i,j})$, $T^{-1}(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Рассмотрим матрицу $A = T^{-1}(J \setminus R_i)$. Матрица A не имеет нулевых строк, так как T — перестановка на множестве клеток и прообраз i -й строки не является строкой в силу выбора i . Тогда из-за антинегативности матрица AJ не имеет нулевых элементов и $z(AJ) = 0$. Следовательно, $(A, J) \in \mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, тогда как $(T(A), T(J)) = (J \setminus R_i, T(J)) \notin \mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$ — противоречие. Отсюда следует, что T^{-1} отображает линии в линии. Следовательно, T отображает линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Чтобы убедиться, что отображение $T(X) = (X \circ B)^t D$, где D — матрица перестановки, не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, достаточно рассмотреть пару матриц $\hat{A} = ((D^{-1})^t C_1) \circ C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$, $\hat{B} = R_1$. Тогда $z(\hat{A}\hat{B}) = z((C_1 \circ C) \cdot R_1) = 0$, так как D — матрица перестановки. С другой стороны, $T(\hat{A}) = (((D^{-1})^t C_1) \circ C) \circ B)^t D = R_1 D^{-1} D = R_1$, $T(\hat{B}) = (R_1 \circ B)^t D = (C_1 \circ B^t) D$. Поскольку матрица $R_1 \cdot (C_1 \circ B^t) = \sum_{i=1}^n b_{1i} E_{11}$ имеет нулевой граничный ранг n , отсюда следует, что T не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$. Следовательно, $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, так как подобие сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$.

Проверим, что $Q = P^t$. Предположим противное, т. е. $PQ \neq I$. Тогда существуют такие индексы i, j , что матрица PQ переводит i -й столбец в j -й. В этом случае рассмотрим матрицы $\tilde{A} = J \setminus (E_{1,1} + \dots + E_{1,n}) + E_{1,i}$, $\tilde{B} = J \setminus E_{j,1}$. Тогда матрица $\tilde{A}\tilde{B}$ не содержит нулевых элементов, т. е. $z(\tilde{A}\tilde{B}) = 0$. Однако элемент с индексом $(1, 1)$ матрицы $T(\tilde{A})T(\tilde{B})$ является нулевым, т. е. $z(T(\tilde{A})T(\tilde{B})) \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_4(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = z(X) + z(Y)\}.$$

Теорема 4.4. Пусть \mathcal{S} — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если $T(X) = P(X \circ B)P^t$, где P — матрица перестановки, $B = (b_{ij})$, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j .

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что отображения указанного типа сохраняют множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j) .

Покажем, что T отображает линии в линии. Предположим, что образы двух клеток, не лежащих в одной линии, лежат в одной линии. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,k}$ — такие клетки, что $T^{-1}(E_{i,j}), T^{-1}(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Заметим, что $z((J \setminus R_1)J) = z(J \setminus R_1) = 1 = 1 + 0 = z(J \setminus R_1) + z(J)$. Следовательно, $(J \setminus R_1, J) \in \mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 4.3 было проверено, что $(T(J \setminus R_1), T(J)) \notin \mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$. Полученное противоречие показывает, что отображение T переводит линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P, Q, B) -оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Чтобы убедиться, что отображение $T(X) = (X \circ B)^t D$, где D — матрица перестановки, не сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$, достаточно рассмотреть пару матриц $A = ((D^{-1})^t J \setminus R_1) \circ C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$, $B = J \setminus C_1$. Тогда $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$, так как подобие сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$.

Предположим, что $Q \neq P^t$. Тогда $C_j P Q = C_i$ для некоторых $j \neq i$. В этом случае имеем $z((J \setminus C_i) R_i) = z(0) = n = z(J \setminus C_i) + z(R_i)$, т. е. $((J \setminus C_i), R_i) \in \mathcal{Z}_4$, тогда как $z((J \setminus C_i) P Q R_i) = z(J \setminus C_j) R_i = z(J) = 0$, т. е. $((J \setminus C_i) P Q, R_i) \notin \mathcal{Z}_4$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Заметим, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие оба случая равенства в обоих неравенствах для нулевого граничного ранга.

Пример 4.5. Пусть $T: \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное отображение, определённое на множестве клеток правилом $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = J$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, $(i, j) \neq (n, n)$. Тогда T сохраняет множества \mathcal{Z}_1 , \mathcal{Z}_2 , \mathcal{Z}_3 и \mathcal{Z}_4 .

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определения рассматриваемых множеств и из антинегативности полукольца \mathcal{S} . \square

Литература

- [1] Beasley L. B. Linear operators which preserve pairs on which the rank is additive // J. Korean S. I. A. M. — 1998. — Vol. 2. — P. 27–30.
- [2] Beasley L. B., Guterman A. E. Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: The factor rank // J. Math. Sci. — 2004. — To appear.
- [3] Beasley L. B., Guterman A. E. Rank inequalities over semirings // J. Korean Math. Soc. — To appear.
- [4] Beasley L. B., Guterman A. E., Neal C. L. Linear preservers for Sylvester and Frobenius bounds on matrix rank // Rocky Mountain J. Math. — 2004. — To appear.

- [5] Beasley L. B., Lee S.-G., Song S.-Z. Linear operators that preserve zero-term rank of Boolean matrices // *J. Korean Math. Soc.* — 1999. — Vol. 36, no. 6. — P. 1181–1190.
- [6] Beasley L. B., Lee S.-G., Song S.-Z. Linear operators that preserve pairs of matrices which satisfy extreme rank properties // *Linear Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 350. — P. 263–272.
- [7] Beasley L. B., Pullman N. J. Term rank, permanent and rook polynomial preservers // *Linear Algebra Appl.* — 1987. — Vol. 90. — P. 33–46.
- [8] Beasley L. B., Pullman N. J. Operators that preserve semiring matrix functions // *Linear Algebra Appl.* — 1988. — Vol. 99. — P. 199–216.
- [9] Beasley L. B., Pullman N. J. Linear operators that preserve term rank 1 // *Proc. Roy. Irish Acad.* — 1990. — Vol. 91. — P. 71–78.
- [10] Brualdi R., Ryser H. *Combinatorial Matrix Theory.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [11] Guterman A. E. Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings // *Linear Algebra Appl.* — 2001. — Vol. 331. — P. 75–87.
- [12] Marsaglia G., Styan P. When does $\text{rk}(A + B) = \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$? // *Canad. Math. Bull.* — 1972. — Vol. 15, no. 3. — P. 451–452.
- [13] Marsaglia G., Styan P. Equalities and inequalities for ranks of matrices // *Linear and Multilinear Algebra.* — 1974. — Vol. 2. — P. 269–292.
- [14] Minc H. *Permanents* // *Encyclopedia in Mathematics and its Applications.* Vol. 6. — Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [15] P. Pierce and others. A survey of linear preserver problems // *Linear and Multilinear Algebra.* — 1992. — Vol. 33. — P. 1–119.
- [16] Tian Y. Rank equalities related to outer inverses of matrices and applications // *Linear and Multilinear Algebra.* — 2002. — Vol. 49. — P. 269–288.
- [17] Tian Y. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses // *Linear Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 355. — P. 187–214.

