Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 3

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ДИССИПАТИВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НОРМАЛЬНОМУ

© В. Васюнин, С. Купин

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, μ — конечная положительная мера на $[0,1]$, α — измеримая $L(H)$-значная функция, и $k(x,s)$ — $L(H)$-значное положительно определенное ядро, для которого $\operatorname{tr} k(x,x) \in L^1(\mu)$. Пусть, кроме того, значения функции $\alpha(x)$ являются самосопряжёнными операторами. Иногда мы будем предполагать $\alpha(x)$ коммутирующими с $k(x,x)$ μ-почти всюду. Определим оператор A формулой

$$(Af)(x) = \alpha(x)f(x) + \frac{1}{2}i\mu(\{x\})k(x,x)f(x) + i\int\limits_{[0,x)} k(x,s)f(s)d\mu(s).$$

В настоящей работе мы изучаем вопрос о подобии оператора A нормальному оператору. Получены как необходимые, так и достаточные условия подобия. Эти условия оказываются необходимыми и достаточными в случае непрерывной меры μ, а также, если $\operatorname{rank} \operatorname{Im} A = 1$.

Предлагаемая конструкция основывается на применении функциональной модели. Ключевым моментом является идея вычислить резольвенту (и характеристическую функцию) оператора A в терминах решения некоторой задачи Коши, а затем исследовать спектральные свойства исходного оператора, анализируя это решение. Данный подход уже использовался в [14, 16].

Новым в нашем подходе является использование теста, проверяющего *линейность роста резольвенты* [13, 15]. Этот тест в общем случае требует выполнения так называемого *условия равномерной ограниченности следа*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \operatorname{Im} z \operatorname{tr}[(A^* - zI)^{-1} \operatorname{Im} A\,(A - \bar{z}I)^{-1}] < \infty.$$

Эти методы позволяют рассмотреть классическую задачу о подобии самосопряженному оператору наравне с задачей подобия нормальному для операторов с невещественным дискретным спектром по существу с одной точки зрения.

Теоремы настоящей статьи обобщают некоторые утверждения из [4, 6, 7, 10].

Ключевые слова: диссипативные операторы, нормальные операторы, подобие, интегральные операторы, функциональная модель, характеристическая функция.

Введение

Одной из общих целей теории операторов является исследование спектральных разложений операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Так, например, хорошо известно [18], что оператор допускает безусловно сходящееся спектральное разложение тогда и только тогда, когда он подобен нормальному. Таким образом, чтобы получить такое разложение, нам нужны критерии, гарантирующие подобие.

По-видимому, одним из первых результатов в интересующем нас направлении была следующая теорема Б. С.-Надя и Ч. Фойаша.

Теорема 0.1 [17]. *Пусть A — максимальный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, и пусть $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Оператор A подобен самосопряженному тогда и только тогда, когда $\|S_A(z)^{-1}\| \leqslant C$ для всех $z \in \mathbb{C}_+$, где $S_A(z)$ — характеристическая функция оператора A* (определение дано формулой (1.1)).

Эта теорема может быть использована для получения многочисленных точных условий подобия для специальных классов диссипативных интегральных операторов [10, 11]. Следует упомянуть, что существуют и другие подходы к обсуждаемому вопросу. Их краткий обзор может быть найден в [6].

С некоторой точки зрения самый лучший результат в данном направлении был получен И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном.[1]

Теорема 0.2 [4]. *Пусть оператор $A^0 : L^2_r[a,b] \to L^2_r[a,b]$ задан формулой*

$$(A^0 f)(x) = \alpha(x)f(x) + 2i\int_a^x k(x,s)f(s)dm(s),$$

где $f \in L^2_r[a,b]$, $k \in C_{r\times r}([a,b]\times[a,b])$ — эрмитово неотрицательное ядро и α — вещественная непрерывная слева функция. Тогда A^0 подобен самосопряженному оператору в том и только в том случае, когда мера

$$\nu_c(F) = \int_{\alpha^{-1}(F)} \operatorname{tr} k(s,s)dm(s)$$

является абсолютно непрерывной и ее плотность равномерно ограничена. Здесь F обозначает измеримое подмножество вещественной оси $\mathbb{R}$, а m — мера Лебега.

---

[1] Добавлено при корректуре. Доказательство этой теоремы даже при более общих предположениях недавно появилось в [7]. Там же можно найти очень широкий обзор различных результатов о подобии.

В сформулированной теореме индексы r и $r\times r$ означают, что соответствующие пространства состоят из векторнозначных и матричнозначных функций.

Целью настоящей статьи является отыскание оптимальных условий, обеспечивающих подобие интегрального оператора такого же вида нормальному оператору. А именно мы рассматриваем оператор A, задаваемый формулой

$$(Af)(x)=\alpha(x)f(x)+i\int_0^{x+}k(x,s)f(s)d\mu(s). \tag{0.1}$$

Его область определения будет описана ниже. Здесь $\mu=\mu_c+\mu_d$ — конечная положительная мера на $[0,1]$, μ_c и μ_d — соответственно ее непрерывная и дискретная части, H — вспомогательное сепарабельное гильбертово пространство. Кроме того, α — μ-измеримая функция на $[0,1]$, k — положительно определенное ядро, значения обеих функций являются операторами в H. Мы также предполагаем, что значения α — самосопряженные операторы в H, заданные на некоторой плотной области определения $\mathrm{Dom}(\alpha(x))$.

Символ $\int_0^{x+}$ означает следующее:

$$\int_0^{x+}f(t)d\mu(t)=\int_{[0,x)}f(s)d\mu(s)+\frac{1}{2}\mu(\{x\})f(x).$$

На протяжении всей статьи операторы $k(x,x)$ будут предполагаться ядерными при μ-почти всех x, и, более того, $\operatorname{tr}k(x,x)\in L^1(\mu)$ (точный смысл сужению значения ядра k на диагональ будет придан позднее, в п. 2.1). При этих предположениях оператор A корректно определен на области

$$\mathrm{Dom}(A)=\Big\{f\in L^2(H,\mu):f(x)\in\mathrm{Dom}(\alpha(x))\ \mu\text{-п.в.},\ \int_0^1\|\alpha(x)f(x)\|_H^2d\mu(x)<\infty\Big\}.$$

Сопряженный к нему имеет ту же самую область определения и действует по формуле

$$(A^*f)(x)=\alpha(x)f(x)-i\int_{x-}^1k(x,t)f(t)d\mu(t),$$

где по определению

$$\int_{x-}^1f(s)d\mu(s)=\int_{(x,1]}f(s)d\mu(s)+\frac{1}{2}\mu(\{x\})f(x).$$

При сделанных нами предположениях мнимая часть оператора A

$$(2\operatorname{Im} Af)(x) = \int_0^1 k(x,s)f(s)d\mu(s) \tag{0.2}$$

является ядерным оператором, и $\operatorname{tr}(2\operatorname{Im} A) = \int_0^1 \operatorname{tr} k(x,x)\, d\mu(x)$.

Мы получим как необходимые, так и достаточные условия подобия оператора A нормальному. Эти условия оказываются одновременно необходимыми и достаточными в том случае, когда $\operatorname{Im} A$ — оператор ранга 1, а также в случае непрерывной меры μ.

В доказательствах используется так называемый тест *линейности роста резольвенты* [13, 15]. Этот тест можно рассматривать как обобщение теоремы 0.1. Более подробно мы обсудим это в следующем параграфе.

Результаты настоящей работы могут рассматриваться как обобщения теоремы 0.2. Мы имеем дело с произвольной мерой μ, не требуем конечномерности пространства H, а также ослабляем условия непрерывности, накладываемые на функции α и k. Кроме того, функция α у нас является операторнозначной, и единственным существенным ограничением является ее перестановочность с ядром k. Это ограничение вряд ли можно счесть естественным, однако без этого ограничения при наличии дискретной части у меры μ в поведении характеристической функции S_A обнаруживаются новые эффекты, требующие дополнительного изучения.

Рассуждения из §3, приводящие к вычислению характеристической функции, являются развитием идеи из работы [16], а также имеют много общего с вычислениями из статьи [14].

Статья организована следующим образом. В §1 мы приводим и обсуждаем теоремы, которые используются в дальнейшем. Основные результаты статьи сформулированы в §2. Доказательства собраны в §3, который завершается примером.

Закончим это введение небольшим списком обозначений. Если H — гильбертово пространство, символом $L(H)$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов в H. Напомним, что плотно определенный оператор A с областью определения $\operatorname{Dom}(A) = \operatorname{Dom}(A^*)$ называется диссипативным, если $\operatorname{Im} A = \frac{A-A^*}{2i} \geqslant 0$. Говорят, что диссипативный оператор максимален, если у него нет диссипативных расширений. Спектр оператора A обозначается символом $\sigma(A)$, а $\sigma_p(A)$ — его дискретная часть. Операторы A и B называются подобными, если существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор V, что $A = V^{-1}BV$. Символом $\mathfrak{S}_1$, как обычно, обозначается идеал ядерных операторов, а $\mathfrak{S}_2$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта. Мы будем писать „п.в.“, имея в виду μ-п.в.

§1. Резольвентные тесты для диссипативных операторов

1.1. Резольвентные тесты. Хорошо известно [12, 16], что максимальный диссипативный оператор A допускает каноническое представление в виде $A = A_0 \oplus A_1$, где A_0 — самосопряженный оператор, а A_1 — вполне несамосопряженный. Поскольку A_0 сам является нормальным, очевидно, что A подобен нормальному в том и только в том случае, когда нормальному подобен оператор A_1. Оператор A_1 унитарно эквивалентен своей модели С.-Надя–Фойаша [12, 16], построенной по так называемой характеристической функции S_{A_1} оператора A_1 (см. (1.1) ниже). Формула (1.1), в частности, показывает, что характеристические функции операторов A и A_1 совпадают. Следовательно, вопрос о подобии оператора A нормальному сводится к такому же вопросу для его вполне несамосопряженной части A_1, заданной в терминах функции S_A. Самосопряженную часть A_0 можно просто „опустить".

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1 [15]. *Пусть A — максимальный диссипативный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть $\sigma(A) \neq \overline{\mathbb{C}}_+$. Тогда A подобен нормальному оператору, если выполняются следующие условия:*

$$\text{i) } C_1(A) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+\setminus\sigma(A)} \|(A - zI)^{-1}\| \cdot \operatorname{dist}(z, \sigma(A)) < \infty, \qquad \text{(LRG)}$$

$$\text{ii) } C_2(A) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} 4\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{tr}\left[(A^* - zI)^{-1} \operatorname{Im} A\, (A - \bar{z}I)^{-1}\right] < \infty. \qquad \text{(UTB)}$$

Для краткости мы пишем (LRG) и (UTB) вместо „Linear Resolvent Growth" (линейный рост резольвенты) и „Uniform Trace Boundedness" (равномерная ограниченность следа). Для $z \in \mathbb{C}_+$

$$I - b_z(A)^* b_z(A) = 4\operatorname{Im} z \cdot (A^* - zI)^{-1} \operatorname{Im} A\, (A - \bar{z}I)^{-1} \geqslant 0,$$

где $b_z(w) = (w - z)/(w - \bar{z})$ — элементарный множитель Бляшке для $\mathbb{C}_+$. Поэтому

$$\operatorname{rank}(I - b_z(A)^* b_z(A)) = \operatorname{rank} \operatorname{Im} A,$$

и, следовательно, если $n = \operatorname{rank} \operatorname{Im} A < \infty$, то $C_2(A) \leqslant n < \infty$, и условие (UTB) выполняется автоматически. Этот случай изучался в [13], и предыдущую теорему можно рассматривать как обобщение результата из этой работы.

Отметим, что теорема 1.1 исходно была доказана для сжатий. Вариант теоремы, представленный здесь, можно получить из основной теоремы работы [15], применяя преобразование Кэли

$$T = (A - iyI)(A + iyI)^{-1}, \quad A = iy(I + T)(I - T)^{-1}, \quad y > 0.$$

Теорема 1.1 допускает конформно-инвариантную запись. Чтобы сформулировать этот результат нам потребуется определение характеристической функции оператора A [12, 16]

$$S_A(z) = I + i(2\operatorname{Im} A)^{1/2}(A^* - zI)^{-1}(2\operatorname{Im} A)^{1/2}|_{\operatorname{Range}\operatorname{Im} A}. \tag{1.1}$$

Напомним, что $\|S_A(z)\| \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{C}_+$.

Следующая теорема неявно содержится в [15].

Теорема 1.2. *Пусть A — максимальный диссипативный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть $\sigma(A) \neq \overline{\mathbb{C}}_+$. Тогда A подобен нормальному оператору, если выполняются следующие условия:*

$$\text{i) } \mathcal{C}_3(A) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+\setminus\sigma(A)} \{\|S_A(z)^{-1}\| \cdot \inf_{\lambda\in\sigma_p(A)\cap\mathbb{C}_+} |b_\lambda(z)|\} < \infty, \tag{1.2}$$

$$\text{ii) } \mathcal{C}_2(A) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} \operatorname{tr}(I - S_A(z)^* S_A(z)) < \infty. \tag{1.3}$$

Если $\sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+ = \varnothing$, то под неравенством (1.2) мы подразумеваем

$$\mathcal{C}_3(A) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} \|S_A(z)^{-1}\| < \infty.$$

Преимущество следующей теоремы заключается в том, что в части достаточности она не требует условия (UTB).

Теорема 1.3. *Пусть A — максимальный диссипативный оператор с ядерной мнимой частью. Оператор A подобен нормальному, если выполняются следующие условия:*

i) *В канонической факторизации функции $\det S_A(z)$ нет сингулярной внутренней части, а ее внешняя часть $\{\det S_A(z)\}_{\text{out}}$ отделена от нуля:*

$$|\{\det S_A(z)\}_{\text{out}}| = |\{\det S_A(z)\}_{\text{sing,out}}| \geqslant \delta > 0, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{1.4}$$

ii) *Оператор A не имеет корневых векторов, и семейство подпространств $\{\operatorname{Ker}(A - zI)\}$, $z \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$, образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки.*

Условие ii) *всегда необходимо для подобия оператора A нормальному, а условие* i) *— в том случае, когда A обладает* (UTB) *свойством.*

Набросок доказательства. Отметим сперва, что для диссипативных операторов с ядерной мнимой частью $I - S_A \in \mathfrak{S}_1$, т.е. определитель $\det S_A$ корректно определен.

Разложим S_A в произведение двух сомножителей: первый — произведение Бляшке–Потапова, а второй — обратимый оператор в $\mathbb{C}_+$. Эта факторизация выделяет два инвариантных подпространств, скажем, H_1 и H_2 таких, что $\sigma(A|H_1) \subset \mathbb{R}$ и $A|H_2$ имеет чисто дискретный спектр. Ясно, что A подобен нормальному оператору тогда и только тогда, когда

a) $A|H_1$ подобен самосопряженному оператору;

b) у оператора $A|H_2$ нет корневых векторов, и семейство подпространств $\{\mathrm{Ker}(A|H_2 - zI)\}$, $z \in \sigma_p(A|H_2)$, образует безусловный базис в H_2;

c) угол между подпространствами H_1 и H_2 положителен, и их прямая сумма совпадает со всем H.

Согласно критерию Надя–Фойаша (см. теорему 0.1) утверждение a) эквивалентно утверждению об отсутствии у S_A сингулярного внутреннего сомножителя и условию $\|\{S_A(z)\}_{\mathrm{out}}^{-1}\| \leqslant C$ для всех $z \in \mathbb{C}_+$. Напомним следующее простое неравенство

$$\exp\left\{-\|T^{-1}\| \operatorname{tr}(1-T)\right\} \leqslant \det T \leqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

справедливое для любого положительного сжатия T [15, лемма 4.1]. Мы видим, что если определитель оператора $\{S_A(z)\}_{\mathrm{out}}$ отделен от нуля, то оператор $\{S_A(z)\}_{\mathrm{out}}^{-1}$ равномерно ограничен в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Последнее условие является и достаточным для отделенности определителя $\det\{S_A(z)\}_{\mathrm{out}}$ от нуля при выполнении условия (UTB).

Утверждение b) — это просто то же, что ii). И, наконец, пользуясь [2], легко видеть, что из i) следует c). •

1.2. N-карлесоновы множества и меры Карлесона. В этом пункте мы напомним некоторые факты, связанные с геометрией дискретных подмножеств $\mathbb{C}_+$.

Для произвольной точки z, $z \in \mathbb{C}_+$, и числа δ, $0 < \delta < 1$, положим

$$B_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C}_+ : |b_z(w)| \leqslant \delta\}.$$

Пусть $\Lambda = \{z_k\}$ — последовательность точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Говорят, что последовательность Λ редкая, если

$$\inf\{|b_{z_k}(z_j)| : z_k, z_j \in \Lambda,\ k \neq j\} > 0,$$

или, что то же самое, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(z) \cap B_\varepsilon(w) = \varnothing$ для $z, w \in \Lambda$ и $z \neq w$.

Последовательность называется карлесоновой, если

$$\inf_{z \in \Lambda} \prod_{w \in \Lambda \setminus \{z\}} |b_w(z)| \geqslant \delta_0 > 0. \tag{1.5}$$

Можно показать [8, гл. 9], что последнее условие равносильно существованию такого числа $c = c(\delta_0) > 0$, что

$$\prod_{w\in\Lambda} |b_w(z)| \geqslant c \inf_{w\in\Lambda} |b_w(z)| \tag{1.6}$$

при всех $z \in \mathbb{C}_+$. Если $\Lambda = \bigcup_{k=1}^N \Lambda^k$, а Λ^k — редкие (карлесоновы) множества, то Λ называют N-редким (N-карлесоновым). Кроме того, будем меру σ на $\mathbb{C}_+$ называть карлесоновой, если

$$\sigma(Q) \leqslant Ch$$

с некоторой постоянной C для всех квадратов $Q = [x-h, x+h] \times i[0, 2h]$, $x \in \mathbb{R}$.

Подробное осуждение упомянутых объектов можно найти в [8, гл. 7]. Здесь же мы сформулируем лишь несколько утверждений о мерах Карлесона, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 1.4. *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$. *Следующие утверждения равносильны:*

i) *мера* $\sigma = \sum_k \operatorname{Im} z_k\, \delta_{z_k}$ *является карлесоновой;*

ii)

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \sum_k \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} z_k}{|z - \overline{z_k}|^2} < \infty,$$

символ δ_{z_k} *обозначает меру Дирака, сосредоточенную в точке* z_k;

iii) Λ — N*-карлесоново множество при некотором* N.

Замечание 1.5. Отметим, что Λ является N-карлесоновым с данным N тогда и только тогда, когда соответствующая мера карлесонова, а Λ — N-редкое множество с тем же самым N.

Следующий результат сформулирован как следствие 3.3 в [15].

Теорема 1.6. *При выполнении условий* (LRG) *и* (UTB) *множество* $\sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$ *является* N*-карлесоновым при некотором* $N < \infty$.

§2. Основные результаты

2.1. Обозначения. Из формулы (0.2) следует, что оператор A, заданный формулой (0.1), является диссипативным. В следствии 3.11 будет показано, что A максимален.

Следуя работе [16], определим функции

$$\varphi\colon\ [0,1] \to [0, M], \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(\{0\}), & x = 0, \\ \mu([0,x)) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}), & x > 0; \end{cases}$$

$$\psi\colon [0, M] \to [0,1], \qquad \psi(t) = \begin{cases} \inf\{x : \mu([0,x)) > t\}, & t < \mu([0,1)) \\ 1, & t \geqslant \mu([0,1)), \end{cases}$$

где $M = \mu([0,1])$. Для заданной на $[0,1]$ функции f положим

$$f_*(t) = f(\psi(t)), \quad t \in [0, M].$$

Так, например, $\varphi_*(t)$ означает $\varphi(\psi(t))$. Отметим, что $\varphi_*(t) = t$, если $\mu(\{\psi(t)\}) = 0$. Заметим также, что $\psi(s) = \text{const} = x$ на промежутке $(\varphi(x-0), \varphi(x+0))$ и, следовательно, $v_*(s) = v(x)$ на $(\varphi(x-0), \varphi(x+0))$ для любой функции v, заданной на $[0,1]$.

Для краткости мы будем часто писать μ_x вместо $\mu(\{x\})$, если $\mu(\{x\}) > 0$.

Заметим, что для любой функции $f \in L^1(\mu)$ справедливо тождество

$$\int_0^{\varphi(x)} f_*(t)dt = \int_0^{x+} f(s)d\mu(s). \tag{2.1}$$

Введем еще несколько понятий. Пусть E — вспомогательное гильбертово пространство размерности $\dim \operatorname{Range} \operatorname{Im} A$. Возьмем произвольный оператор c, действующий из E в $L^2(H, \mu)$, для которого $cc^* = 2 \operatorname{Im} A$. Так как $\operatorname{Im} A \in \mathfrak{S}_1$, то c — оператор Гильберта–Шмидта, и он определяет при μ-почти всех значениях x операторнозначную функцию (будем обозначать ее той же буквой c) такую, что $(ch)(x) = c(x)h$, $h \in E$. Ее значения $c(x)$ являются операторами Гильберта–Шмидта из E в H, при этом ядро k в определении (0.1) оператора A можно представить в виде

$$k(x,s) = c(x)c(s)^*.$$

Для проверки приведенных выше утверждений выберем ортонормированный базис, скажем, $\{e_j\}$ в E и положим $c_j = ce_j$, $c_j \in L^2(H,\mu)$. Так как $c \in \mathfrak{S}_2$, то

$$\|c\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \sum \|ce_j\|^2_{L^2(H,\mu)} = \sum \int_0^1 \|c_j(x)\|^2_H \, d\mu(x) < \infty,$$

и, следовательно, формула

$$c(x)\Big(\sum h_j e_j\Big) = \sum h_j c_j(x)$$

задает ограниченный оператор из E в H для почти всех x. Более того, $c(x) \in \mathfrak{S}_2$ п.в., действительно,

$$\|c(x)\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \sum \|c(x)e_j\|^2_H = \sum \|c_j(x)\|^2_H < \infty \quad \text{для п.в. } x,$$

поскольку, как мы видели, функция $x \mapsto \|c(x)\|_{\mathfrak{S}_2}$ принадлежит $L^2(\mu)$. Так как сопряженный оператор c^* действует по формуле

$$c^* f = \int_0^1 c(x)^* f(x) d\mu(x), \quad f \in L^2(H, \mu),$$

то мы легко проверяем тождество

$$k(x,s) = c(x)c(s)^* = \sum (\cdot, c_j(s))_H c_j(x)$$

с помощью формулы (0.2):

$$\int_0^1 \int_0^1 \big(k(x,s)f(s), g(x)\big)_H d\mu(s) d\mu(x) = (2\operatorname{Im} Af, g)_{L^2(H,\mu)} = (c^* f, c^* g)_E$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \big(c(s)^* f(s), c(x)^* g(x)\big)_E d\mu(s) d\mu(x)$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \big(c(x)c(s)^* f(s), g(x)\big)_H d\mu(s) d\mu(x).$$

Таким образом, мы будем писать $k(x,x)$, подразумевая $c(x)c(x)^*$.

Далее, используя спектральную теорему для самосопряженного оператора $\alpha(x)$ в форме фон Неймана, мы можем представить пространство H в виде прямого интеграла

$$H = \oplus \int_{\mathbb{R}} H_x(\lambda) d\rho_x(\lambda)$$

по скалярной спектральной мере ρ_x оператора $\alpha(x)$. Тогда можно определить операторы Гильберта–Шмидта $c(x,\lambda)$, действующие из E в $H_x(\lambda)$, точно тем же способом, как были определены операторы $c(x)$. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{e_j\}$ в E и положим $c_j(x,\lambda) = (ce_j)(x,\lambda)$, $c_j(x,\lambda) \in H_x(\lambda)$. Так как $c \in \mathfrak{S}_2$, то

$$\|c\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \sum \|ce_j\|^2_{L^2(H,\mu)} = \sum \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \|c_j(x,\lambda)\|^2_{H_x(\lambda)} d\rho_x(\lambda)\, d\mu(x) < \infty,$$

и, следовательно, формула

$$c(x,\lambda)\Big(\sum h_j e_j\Big) = \sum h_j c_j(x,\lambda)$$

задает оператор Гильберта–Шмидта из E в $H_x(\lambda)$ при ρ_x-почти всех λ и μ-почти всех x. Для сопряженных операторов справедливы формулы

$$c(x)^* f(x) = \int_{\mathbb{R}} c(x,\lambda)^* f(x,\lambda)\, d\rho_x(\lambda),$$

$$c^* f = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} c(x,\lambda)^* f(x,\lambda)\, d\rho_x(\lambda)\, d\mu(x)$$

при любом $f \in L^2(H,\mu)$.

В некоторых теоремах мы будем предполагать выполненным следующее перестановочное соотношение

$$\text{если } \mu_d \neq 0, \text{ то предполагаем, что } k(x,x)[\alpha(x) - zI]^{-1} = [\alpha(x) - zI]^{-1} k(x,x). \tag{2.2}$$

Это даст возможность отделить точечную часть спектра от его вещественной непрерывной части. При таком предположении всякое собственное подпространство оператора $k(x,x)$ инвариантно относительно $\alpha(x)$. Поскольку все такие подпространства, соответствующие ненулевым собственным значениям оператора $k(x,x)$ являются конечномерным, мы можем в них выбрать ортогональное семейство собственных векторов оператора $\alpha(x)$, которые по построению являются также и собственными векторами оператора $k(x,x)$. Итак, мы можем построить последовательность ортонормированных векторов $e_j(x)$, для которой

$$\begin{aligned} k(x,x) &= \sum \kappa_j(x)^2(\,\cdot\,, e_j(x))_H e_j(x), \\ \alpha(x) &= \sum \alpha_j(x)(\,\cdot\,, e_j(x))_H e_j(x) + \alpha_0(x), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где оператор $\alpha_0(x) = \alpha(x)|_{\operatorname{Ker} k(x,x)}$ не имеет значения для нас, поскольку он не затрагивает вполне несамосопряженную часть, а содержится в самосопряженной части нашего оператора A.

2.2. Характеристическая функция оператора A. Мы вычислим характеристическую функцию S_A как решение некой задачи Коши. Напомним, что характеристическая функция определена с точностью до постоянных унитарных операторов слева и справа. Для нас удобнее будет рассматривать S_A на вспомогательном гильбертовом пространстве E, а не на $\operatorname{clos}\operatorname{Range}\operatorname{Im} A$. Для этого отобразим E на $\operatorname{clos}\operatorname{Range}\operatorname{Im} A$ с помощью изометрии V_c из полярного разложения $c = (2\operatorname{Im} A)^{1/2} V_c$ и будем вычислять функцию S_A, заданную формулой

$$S_A(z) = I + ic^*(A - zI)^{-1} c. \tag{2.4}$$

Определим $L(E)$-значную функцию G как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} G(t,z)' = c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)G(t,z), \\ G(M,z) = I, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\Omega(t,z) = \left[\left(t - \varphi_*(t)\right)k_*(t,t) + i(\alpha_*(t) - zI)\right]^{-1} \tag{2.6}$$

и $k_*(t,t) = c_*(t)c_*(t)^* = k(\psi(t),\psi(t))$.

Теорема 2.1. *Задача Коши* (2.5) *разрешима при*

$$\operatorname{Im} z \geqslant 1 + \frac{1}{2}\sup\{\mu_x\|k(x,x)\| : \mu_x > 0\} \tag{2.7}$$

(*при* $\operatorname{Im} z \geqslant 1$ *в случае* $\mu = \mu_c$) *и*

$$S_A(z) = G(0,z).$$

Следующее следствие будет получено из теоремы непосредственным вычислением.

Следствие 2.2. $I - S_A(z) \in \mathfrak{S}_1$, *и в предположении* (2.2) *справедлива формула*

$$\det S_A(z)$$
$$= \varepsilon \prod_{j,x:\,\mu_x>0}\left(\frac{z - z_j(x)}{z - \overline{z_j(x)}}e^{i\phi_j(x)}\right)\cdot \exp\left(i\int_0^1 \operatorname{tr}\left[c(x)^*(\alpha(x) - zI)^{-1}c(x)\right]d\mu_c(x)\right). \tag{2.8}$$

Здесь ε *— унимодулярная константа,* $z_j(x) = \alpha_j(x) + \frac{1}{2}i\mu_x\kappa_j^2(x)$, *где* $\{\kappa_j^2(x)\}$ *и* $\{\alpha_j(x)\}$ *— множество положительных собственных значений оператора* $k(x,x)$ *(или, что то же самое, оператора* $c(x)^*c(x)$*) и множество соответствующих собственных значений оператора* $\alpha(x)$ *на общем семействе собственных векторов. Числа* $\phi_j(x)$ *выбраны так, чтобы* $e^{i\phi_j(x)}(i - z_j(x))/(i - \overline{z_j(x)}) > 0$.

Отсюда следует, что невещественная часть точечного спектра $\sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$ совпадает с множеством $\{z_j(x)\}_{x:\,\mu_x>0}$.

Отметим, что произведение Бляшке в (2.8) корректно определено. Действительно,

$$\sum_{j,x:\mu_x>0} \frac{\operatorname{Im} z_j(x)}{1+|z_j(x)|^2}$$
$$\leqslant \sum_{j,x:\mu_x>0} \operatorname{Im} z_j(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,x:\mu_x>0} \mu_x \kappa_j^2(x) = \frac{1}{2} \sum_{x:\mu_x>0} \mu_x \operatorname{tr} k(x,x)$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{tr} k(x,x) d\mu(x) < \infty, \tag{2.9}$$

поскольку функция $x \mapsto \operatorname{tr} k(x,x)$ принадлежит $L^1(\mu)$.

2.3. Необходимые условия. Следствие 2.2 и результаты §1 позволяют получить следующее необходимое условие подобия оператора A нормальному, которое является и достаточным для непрерывной меры μ.

Теорема 2.3. *Если оператор A, заданный формулой* (0.1) *и удовлетворяющий условию* (UTB), *подобен нормальному, то мера*

$$\nu_c(F) = \int_0^1 \int_F \operatorname{tr} c(x,\lambda)^* c(x,\lambda)\, d\rho_x(\lambda)\, d\mu_c(x)$$

является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега m, а ее плотность равномерно ограничена, т.е.

$$d\nu_c(s) = w(s) dm(s), \quad w \in L^\infty(m). \tag{2.10}$$

Здесь F — произвольное борелевское подмножество оси $\mathbb{R}$.

Обратно, если мера μ непрерывна (т.е. $\mu = \mu_c$), а плотность меры ν_c относительно меры Лебега равномерно ограничена, то оператор A подобен самосопряженному даже и без дополнительного условия (UTB).

Что касается дискретной части спектра, конечно, можно сказать, что она удовлетворяет условию Бляшке (2.9). Однако это не имеет ничего общего с подобием нормальному оператору, это — следствие того факта, что мнимая часть A является ядерным оператором. Мы не можем сформулировать никакого другого разумного необходимого условия в терминах меры μ, функции α и ядра k без каких-либо дополнительных предположений. Однако при наличии условия (UTB), и предполагая α и k коммутирующими, мы можем сформулировать следующее условие, которое также выглядит, как ограниченность плотности некой меры.

Теорема 2.4. *Предположим, что оператор A, заданный формулой* (0.1) *и удовлетворяющий условию* (2.2), *подобен нормальному оператору, и пусть выполнено условие* (UTB). *Тогда семейство мер*

$$\nu_{d,h}(F) = \sum_j \sum_{x \in \alpha_j^{-1}(F)} \eta_{4h}(\mu_x \kappa_j(x)^2)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{h>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}} \frac{\nu_{d,h}([x_0 - h, x_0 + h])}{h} < \infty, \tag{2.11}$$

где $\eta_t(x) = x \cdot \chi_{[0,t]}(x)$, *и* $\chi_{[0,t]}(x)$ — *характеристическая функция интервала* $[0, t]$.

Доказывая теорему, мы увидим (см. лемму 3.13), что условие (2.11) — это не что иное, как условие карлесоновости канонической меры σ, отвечающей точечному спектру оператора A, или, другими словами, требование, чтобы спектр был N-карлесоновым множеством (см. теорему 1.4). Это свойство точно в такой форме уже было сформулировано в теореме 1.6. После изучения условия (UTB) мы увидим (см. следствие 2.9), что в том случае, когда невещественный спектр оператора A является N-карлесоновым и справедливо (2.10), то выполняется условие (UTB).

Условия (2.10) и (2.11) двух предыдущих теорем можно объединить следующим образом. Зададим меру ν_h формулой

$$\nu_h = \nu_c + \nu_{d,h}.$$

Тогда условия (2.10) и (2.11) выполняются в том и только в том случае, когда

$$\sup_{h>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}} \frac{\nu_h([x_0 - h, x_0 + h])}{h} < \infty. \tag{2.12}$$

2.4. Достаточные условия. Этот пункт начнем с нескольких общих замечаний. Известно, что для любого $z \in \mathbb{C}_+$ справедливы равенства

$$\dim \operatorname{Ker}(A^* - \bar{z}I) = \dim \operatorname{Ker} S_A(z)^*, \qquad \dim \operatorname{Ker}(A - zI) = \dim \operatorname{Ker} S_A(z).$$

Так как, согласно следствию 2.2, определитель характеристической функции S_A существует, то в нашем случае $\dim \operatorname{Ker} S_A(z)^* = \dim \operatorname{Ker} S_A(z)$ и, следовательно, $\dim \operatorname{Ker}(A - zI) = \dim \operatorname{Ker}(A^* - \bar{z}I)$.

Теорема 2.5. *Пусть оператор A, заданный формулой* (0.1) *и удовлетворяющий условию* (2.2), *обладают следующими свойствами:*

i) *справедливо неравенство* (2.12) (*или, что то же самое, неравенства* (2.10) *и* (2.11)),
ii) $\sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$ — *редкое множество,*
iii) *у оператора A нет присоединенных векторов,*

тогда A подобен нормальному оператору.

В случае $\operatorname{rank} \operatorname{Im} A = 1$ условия предыдущей теоремы оказываются необходимыми. Кроме того, условие iii) вытекает из i) и ii), и мы получаем следующий критерий.

Теорема 2.6. *Пусть оператор A задан формулой* (0.1) *и пусть* $\operatorname{rank} \operatorname{Im} A = 1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* (2.2) (*т.е. $c(x)$ — собственный вектор оператора $\alpha(x)$*). *Тогда A подобен нормальному оператору в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

i) *справедливо неравенство* (2.12),
ii) *последовательность $\{z_x\}_{x:\, \mu_x > 0}$ является редкой.*

С нашей точки зрения теорема 2.5 имеет следующие недостатки: во-первых, условие ii) не может быть необходимым в более или менее общей ситуации и, во-вторых, хотя условие iii) и необходимо для подобия оператора A нормальному, оно выражено не в исходных терминах задачи, т.е. не через меру μ, функцию α и ядро k. Мы должны больше знать о геометрии собственных и корневых подпространств в естественных терминах, связанных с задачей. Следующая лемма — это первый шаг в этом направлении. Утверждения такого типа, возможно, позволят усилить теорему 2.5 и получить более точные условия подобия оператора A нормальному.

Лемма 2.7. *При любом $x \in [0,1]$ функция S_A допускает следующую регулярную факторизацию*

$$S_A(z) = S_{x-}(z) B_x(z) S_{x+}(z), \tag{2.13}$$

где $B_x(z) = \left[I + \frac{i}{2}\mu_x c(x)^*(\alpha(x) - zI)^{-1} c(x)\right] \left[I - \frac{i}{2}\mu_x c(x)^*(\alpha(x) - zI)^{-1} c(x)\right]^{-1}$, *а два других сомножителя могут быть выражены с помощью решения G задачи Коши* (2.5): $S_{x+}(z) = G(\varphi(x+0), z)$, $S_{x-}(z) = G(0,z) G(\varphi(x-0), z)^{-1}$.

Для читателя, знакомого с понятием мультипликативного интеграла [9], отметим, что сомножители в (2.13) можно записать следующим образом:

$$S_{x-}(z) = \overset{\curvearrowright}{\int\limits_0^{\varphi(x-0)}} e^{-c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)dt},$$

$$B_x(z) = \overset{\curvearrowright}{\int\limits_{\varphi(x-0)}^{\varphi(x+0)}} e^{-c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)dt},$$

$$S_{x+}(z) = \overset{\curvearrowright}{\int\limits_{\varphi(x+0)}^{M}} e^{-c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)dt}.$$

Эти наблюдения будут дополнены еще несколькими фактами о факторизационных свойствах функции S_A после того, как мы докажем эту лемму и введем дополнительные обозначения.

2.5. Еще об условии (UTB). Лемма, которую мы сформулируем в этом подпараграфе, дает другой способ вычисления константы $C_2(A)$, удобный для проверки условия (UTB).

Лемма 2.8. *Пусть G — решение задачи Коши* (2.5). *Тогда*

$$C_2(A) = 2 \sup_{z\in\mathbb{C}_+} \operatorname{Im} z \int_0^1 \|(\alpha(x) - zI)^{-1} c(x) G(\varphi(x), z)\|^2_{\mathfrak{S}_2}\, d\mu(x).$$

Анализируя это выражение, мы получаем следующее

Следствие 2.9. *В предположении* (2.2) *условие* (2.12) *обеспечивает выполнение условия* (UTB).

§3. Доказательства

В этом параграфе мы докажем и обсудим результаты, представленные в §2.

3.1. От резольвенты оператора A к вспомогательной задаче Коши. Прежде всего мы сведем вычисление резольвенты оператора A к некоторой задаче Коши и затем докажем ее разрешимость.

Лемма 3.1. *Пусть h, $h \in L^2(H,\mu)$, и z, $z \in \mathbb{C}_+$, таковы, что существуют функция f, $f \in \mathrm{Dom}(A^*)$, удовлетворяющая уравнению $(A^* - zI)f = h$, и равномерно ограниченная на $[0, M]$ операторнозначная функция Ω, определенная в (2.6). Тогда существует E-значная функция g, решающая задачу Коши*

$$\begin{cases} g(t,z)' = c_*(t)^*\Omega(t,z)[c_*(t)g(t,z) - h_*(t)], \\ g(M,z) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Она однозначно определяется функцией f, а функция f, в свою очередь, может быть восстановлена, исходя из функции g, по формуле

$$f(x,z) = \left[\alpha(x) - zI\right]^{-1}\left[h(x) - c(x)g(\varphi(x),z)\right]. \tag{3.2}$$

Отметим, что в действительности функция g также зависит и от $h \in L^2(\mu)$. Иногда, чтобы подчеркнуть специальный выбор этих параметров, мы будем писать $g(t,z,h)$, $f(x,z,h)$. С другой стороны, мы будем писать просто $g(t)$, $f(x)$, когда параметры z и h фиксированы.

Основная идея вычисления состоит в том, чтобы отобразить $L^2(\mu,[0,1])$ на подпространство пространства $L^2(m,[0,M])$, состоящее из функций, принимающих постоянные значения на интервалах, являющихся „образами" точечных нагрузок меры μ. Согласно формуле (2.1), интегрирование по мере μ заменится обычным интегрированием по мере Лебега. Так мы придем к дифференциальному уравнению для вспомогательной функции g.

Доказательство существования решения соответствующей задачи Коши мы отложим до следующего пункта.

Рассуждения, представленные ниже, в существенном повторяют выкладки, приведенные в [16], 2.6–2.10. Мы будем предполагать, что x и s пробегают интервал $[0,1]$, а t и τ соответственно интервал $[0,M]$.

Доказательство. Зададим функцию g формулой

$$g(t) = -i\int_t^M c_*(\tau)^* f_*(\tau)d\tau.$$

Поскольку, согласно (2.1),

$$\int_{x-}^1 c(s)^* f(s)d\mu(s) = \int_{\varphi(x)}^M c_*(\tau)^* f_*(\tau)d\tau,$$

тождество

$$(\alpha(x) - zI)f(x) - ic(x)\int_{x-}^1 c(s)^* f(s)d\mu(s) = h(x) \tag{3.3}$$

можно переписать в виде

$$(\alpha(x) - zI)f(x) + c(x)g(\varphi(x)) = h(x), \tag{3.4}$$

и из этой формулы немедленно следует (3.2). Таким образом, нам надо только проверить, что определенная выше функция g удовлетворяет уравнению (3.1).

Возьмем произвольную точку $t \in [0, M]$ такую, что $\mu(\{x\}) > 0$ при $x = \psi(t)$. Напомним, что в этом случае $t \in [\varphi(x-0), \varphi(x+0)]$ и что для любой функции v на $[0,1]$ справедливо соотношение $v_*(\tau) = v_*(t) = v(x)$ при всех τ из интервала $(\varphi(x-0), \varphi(x+0))$. Следовательно,

$$g(\varphi_*(t)) = g(t) - i \int\limits_{\varphi_*(t)}^{t} c_*(\tau)^* f_*(\tau) d\tau = g(t) - i(t - \varphi_*(t)) c_*(t)^* f_*(t).$$

Так как $\varphi_*(t) = t$, если $\mu(\{\psi(t)\}) = 0$, то последняя формула справедлива при всех t. Подставляя ее в (3.4), мы получим

$$(\alpha_*(t) - zI) f_*(t) + c_*(t)\big[g(t) - i(t - \varphi_*(t)) c_*(t)^* f_*(t)\big] = h_*(t)$$

или

$$i\big[i(\alpha_*(t) - zI)I + (t - \varphi_*(t)) c_*(t) c_*(t)^*\big] f_*(t) = c_*(t) g(t) - h_*(t).$$

Применение к обеим частям этого равенства оператора $\Omega(t)$ дает

$$i f_*(t) = \Omega(t)[c_*(t) g(t) - h_*(t)].$$

Из определения функции g мы знаем, что она абсолютно непрерывна, и

$$g'(t) = i c_*(t)^* f_*(t) = c_*(t)^* \Omega(t)[c_*(t) g(t) - h_*(t)].$$

т.е. g решает задачу Коши (3.1). •

3.2. Задачи Коши, существование решений и их оценки. Нашим основным инструментом в этом пункте будут простейшая версия аппроксимации Пикара и так называемая „основная лемма“. Всю необходимую информацию можно найти в [1].

Мы начнем с формулировки „основной леммы“.

Лемма 3.2 [1, гл. 2]. *Пусть u, v — положительные измеримые функции на $[0, M]$, C_1 — неотрицательная постоянная и пусть*

$$u(t) \leqslant C_1 + \int_t^M u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$u(t) \leqslant C_1 \exp\left(\int_t^M v(\tau)d\tau\right).$$

Доказательство следующей леммы повторяет рассуждения теоремы 1 из [1, гл. 1] в чуть более общей ситуации.

Лемма 3.3. *Пусть Φ и Ψ — две операторнозначные функции на $[0, M]$. Предположим, что они измеримы относительно меры Лебега, и скалярные функции $\|\Phi\|$ и $\|\Psi\|$ суммируемы. Тогда задача Коши*

$$\begin{cases} X(t)' = \Phi(t)X(t) - X(t)\Psi(t), \\ X(M) = X_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

разрешима, ее решение единственно и абсолютно непрерывно по операторной норме. Более того, оно удовлетворяет следующей оценке

$$\|X(t)\| \leqslant \|X_0\| \exp\left(\int_t^M (\|\Phi(\tau)\| + \|\Psi(\tau)\|)\, d\tau\right). \tag{3.6}$$

Доказательство. Опишем кратко метод приближений Пикара. Возьмем в качестве X_0 постоянную функцию из граничного условия (3.5) и положим

$$X_{k+1}(t) = X_0 - \int_t^M \big(\Phi(\tau)X_k(\tau) - X_k(\tau)\Psi(\tau)\big)d\tau. \tag{3.7}$$

По индукции докажем следующую оценку:

$$\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\| \leqslant \frac{\Gamma(t)^k}{k!}\|X_0\|,$$

где $\Gamma(t) = \int_t^M (\|\Phi(\tau)\| + \|\Psi(\tau)\|)\,d\tau$. При $k = 1$ оценка очевидна. Проведем шаг индукции при $k > 1$

$$\begin{aligned}
&\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| \\
&\quad = \left\| \int_t^M \big(\Phi(\tau)[X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)] - [X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)]\,\Psi(\tau)\big)\,d\tau \right\| \\
&\quad \leqslant \int_t^M (\|\Phi(\tau)\| + \|\Psi(\tau)\|)\|X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)\|d\tau \\
&\quad \leqslant \frac{1}{k!}\int_t^M (-\Gamma(\tau)')\Gamma(\tau)^k\|X_0\|d\tau = \frac{\Gamma(t)^{k+1}}{(k+1)!}\|X_0\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(X_{k+1}(t) - X_k(t)) + X_0 = \lim X_k(t)$$

равномерно сходится в топологии, заданной операторной нормой, и удовлетворяет требуемой оценке (3.6). Переходя к пределу в соотношении (3.7), мы видим, что функция X удовлетворяет уравнению

$$X(t) = X_0 - \int_t^M \big(\Phi(\tau)X(\tau) - X(\tau)\Psi(\tau)\big)\,d\tau, \tag{3.8}$$

а следовательно, она абсолютно непрерывна и решает задачу Коши (3.5).

Отметим, что оценка (3.6) легко может быть получена и с помощью „основной леммы“. Действительно, поскольку (3.8) обеспечивает неравенство

$$\|X(t)\| \leqslant \|X_0\| + \int_t^M \|X(\tau)\|\big(\|\Phi(\tau)\| + \|\Psi(\tau)\|\big)d\tau,$$

остается применить лемму 3.2.

Единственность решения является простым следствием оценки (3.6). Действительно, допустим, что X_1 и X_2 решают задачу Коши (3.5). Тогда их разность $X = X_2 - X_1$ удовлетворяет тому же уравнению (3.5) с граничным условием $X_0 = 0$. Из доказанной оценки (3.6) вытекает, что $X(t) = 0$ для всех $t \in [0, M]$. •

Следствие 3.4. *Если оператор X_0 обратим, то решение задачи* (3.5) *обратимо при всех t, $t \in [0, M]$, и обратный оператор $Y(t) = X(t)^{-1}$ является решением следующей задачи Коши*:

$$\begin{cases} Y(t)' = \Psi(t)Y(t) - Y(t)\Phi(t), \\ Y(M) = X_0^{-1}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Доказательство. Возьмем функцию Y, решающую задачу Коши (3.9) (по лемме 3.3 ее значения $Y(t)$ — ограниченные операторы при всех t), и проверим, что $X(t)Y(t) = Y(t)X(t) = I$ при всех $t \in [0, M]$. Заметим, что функция $Z = XY$ решает задачу Коши

$$\begin{cases} Z(t)' = \Phi(t)Z(t) - Z(t)\Phi(t), \\ Z(M) = I, \end{cases}$$

но и функция $Z(t) = I$ решает ту же задачу. Согласно лемме 3.3, эта задача Коши имеет единственное решение, стало быть, $X(t)Y(t) = I$. Заменяя Φ на Ψ, мы тем же способом получаем равенство $Y(t)X(t) = I$. •

Вернемся теперь к задачам Коши (2.5) и (3.1). Но прежде, чем перейти к доказательствам, сделаем одно замечание о существовании обратного оператора $\Omega(t, z)$. Этот оператор существует, если $\operatorname{Im} z \geqslant \frac{1}{2} \sup \mu_x \|k(x, x)\|$. Однако ради простоты мы будем предполагать выполненным условие (2.7), т.е.

$$\operatorname{Im} z \geqslant 1 + \frac{1}{2} \sup \mu_x \|k(x, x)\|.$$

Тогда операторы $\Omega(t, z)$ являются сжатиями при всех $t \in [0, M]$. Сформулируем этот факт в виде отдельной леммы.

Лемма 3.5. *При z, удовлетворяющих* (2.7), *справедливы следующие оценки*:

i) $\|\Omega(t, z)\| \leqslant 1$;

ii) $\|c_*(t)^* \Omega(t, z) c_*(t)\| \leqslant \|k_*(t, t)\|$;

iii) $\|c_*(t)^* \Omega(t, z) c_*(t)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|k_*(t, t)\|_{\mathfrak{S}_1}$.

Доказательство. Обозначим символом $R(x, z)$ резольвенту оператора $\alpha(x)$, т.е. $R(x, z) = (\alpha(x) - zI)^{-1}$. Тогда для любого z, удовлетворяющего условию (2.7), обратный оператор $\Omega(t, z)$ можно задать любым из следующих двух выражений:

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= -iR_*(t, z)\big[I - i(t - \varphi_*(t))k_*(t, t)R_*(t, z)\big]^{-1} \\ &= -i\big[I - i(t - \varphi_*(t))R_*(t, z)k_*(t, t)\big]^{-1} R_*(t, z). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку $\|R_*(t,z)\| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{Im} z}$ и $|t-\varphi_*(t)| \leqslant \frac{1}{2}\mu_x$, оценивая любое из этих двух выражений, получаем

$$\|\Omega(t,z)\| \leqslant \frac{\frac{1}{\operatorname{Im} z}}{1-\frac{1}{2}\mu_x\|k(x,x)\|\frac{1}{\operatorname{Im} z}} \leqslant 1.$$

Две оставшиеся оценки легко следуют из первой, если учесть, что $\|c(x)\|^2 = \|k(x,x)\|$ и $\|c(x)\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \|k(x,x)\|_{\mathfrak{S}_1}$:

$$\|c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)\| \leqslant \|c_*(t)^*\|\,\|\Omega(t,z)\|\,\|c_*(t)\| \leqslant \|k_*(t,t)\|;$$
$$\|c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|c_*(t)^*\|_{\mathfrak{S}_2}\|\Omega(t,z)\|\,\|c_*(t)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \|k_*(t,t)\|_{\mathfrak{S}_1}. \quad \bullet$$

Отметим, что генератор $c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)$ можно записать в следующем „более симметричном“ виде:

$$c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t) = c_*(t)^*R_*(t,z)c_*(t)\big[I-i\big(t-\varphi_*(t)\big)c_*(t)^*R_*(t,z)c_*(t)\big]^{-1}. \quad (3.11)$$

Переформулируем теперь лемму 3.3 и следствие 3.4 для нашей задачи Коши (2.5).

Следствие 3.6. *При выполнении условия* (2.7) *задача Коши* (2.5) *разрешима, ее решение единственно и удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|G(t,z)\| \leqslant \exp\left(\int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|d\tau\right).$$

Кроме того, оператор $G(t,z)$ обратим при всех $t \in [0,M]$, его обратный является единственным решением задачи Коши

$$\begin{cases} (G(t,z)^{-1})' = -G(t,z)^{-1}c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t), \\ G(M,z)^{-1} \ = I \end{cases}$$

и удовлетворяет такой же оценке

$$\|G(t,z)^{-1}\| \leqslant \exp\left(\int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|d\tau\right).$$

Доказательство. Нам нужно лишь заметить, что оператор-функция $\Phi(t) = c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)$ удовлетворяет неравенству $\|\Phi(t)\| \leqslant \|k_*(t,t)\|$, доказанному в лемме 3.5. Таким образом, всё, за исключением последнего утверждения, следует из леммы 3.3, а это последнее содержится в следствии 3.4. •

Оценка в ядерной норме из леммы 3.5 позволяет сделать следующее заключение.

Следствие 3.7. *При выполнении условия* (2.7) *решение задачи Коши* (2.5) *обладает следующими дополнительными свойствами:* $I - G(t,z) \in \mathfrak{S}_1$ *и*

$$\|I - G(t,z)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \exp\left(\int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|_{\mathfrak{S}_1} d\tau\right) - 1.$$

Доказательство. Переписывая уравнение для G

$$G(t,z) = I - \int_t^M c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)c_*(\tau)G(\tau,z)d\tau$$

в виде

$$I - G(t,z) = \int_t^M c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)c_*(\tau)d\tau - \int_t^M c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)c_*(\tau)\left[I - G(\tau,z)\right]d\tau,$$

мы сразу же получаем неравенство

$$\|I - G(t,z)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \int_t^M \|c_*^*(\tau)\Omega(\tau,z)c_*(\tau)\|_{\mathfrak{S}_1}\left(1 + \|I - G(\tau,z)\|_{\mathfrak{S}_1}\right)d\tau.$$

Используя оценку iii) из леммы 3.5, мы получаем

$$1 + \|I - G(t,z)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant 1 + \int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|_{\mathfrak{S}_1}\left(1 + \|I - G(\tau,z)\|_{\mathfrak{S}_1}\right)d\tau.$$

Осталось применить лемму 3.2. •

Теперь мы докажем разрешимость векторной задачи Коши (3.1).

Лемма 3.8. *Пусть выполнено условие* (2.7) *и* $h \in L^2(H,\mu)$. *Тогда существует единственное решение* g *задачи Коши* (3.1). *Его можно найти по формуле*

$$g(t,z,h) = G(t,z)\int_t^M G(\tau,z)^{-1}c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)h_*(\tau)d\tau. \tag{3.12}$$

Решение абсолютно непрерывно и равномерно ограничено на $[0,M]$:

$$\|g(t,z,h)\|_E \leqslant C_2\|h\|_{L^2(H,\mu)},$$

где $C_2 = \frac{1}{2}\exp\left(\int_0^1 \|k(x,x)\|d\mu(x)\right)\left[\exp\left(2\int_0^1 \|k(x,x)\|d\mu(x)\right) - 1\right]$.

Доказательство. Формула (3.12) для решения задачи Коши (3.1) хорошо известна [1, гл. 1, теорема 3]. Абсолютная непрерывность этой функции (которая следует из абсолютной непрерывности G) позволяет нам непосредственным вычислением проверить, что она решает задачу Коши (3.1). Единственность g вытекает из леммы 3.2. Действительно, если g_1 и g_2 — любые два решения задачи (3.1), то их разность $g_0 = g_2 - g_1$ решает задачу Коши

$$g_0(t,z)' = c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)g_0(t,z), \quad g_0(M,z) = 0,$$

и, следовательно,

$$g_0(t,z) = \int_t^M c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)c_*(\tau)g_0(\tau,z)d\tau.$$

Поэтому оценка

$$\|g_0(t,z)\| \leqslant \int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|\,\|g_0(\tau,z)\|d\tau$$

позволяет применить лемму 3.2 с $C_1 = 0$.

Используя оценки из следствия 3.6 и из леммы 3.5, оценим норму g (мы здесь используем обозначение $\omega(t) = \int_t^M \|k_*(\tau,\tau)\|d\tau$)

$$\begin{aligned}
\|g(t)\|_E &\leqslant \|G(t)\| \int_t^M \|G(\tau)^{-1}\|\|c_*(\tau)^*\Omega(\tau)h_*(\tau)\|_E d\tau \\
&\leqslant e^{\omega(t)} \int_t^M e^{\omega(\tau)}\|k_*(\tau,\tau)\|^{1/2}\|h_*(\tau)\|_H d\tau \\
&\leqslant e^{\omega(t)} \int_t^M e^{2\omega(\tau)}\left(-\omega(\tau)'\right)d\tau\|h\|_{L^2(H,\mu)} = \frac{1}{2}e^{\omega(t)}(e^{2\omega(t)} - 1)\|h\| \\
&\leqslant C_2\|h\|. \quad \bullet
\end{aligned}$$

3.3. От решения задачи Коши к резольвенте оператора A^*. Следующая лемма вместе с предыдущей дают утверждение, в некотором смысле обратное к лемме 3.1.

Лемма 3.9. *Полуплоскость* $\operatorname{Im} z \geqslant 1+\frac{1}{2}\sup\{\mu_x\|k(x,x)\|\}$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* A^*. *И если* $h \in L^2(H,\mu)$ *и* g *— решение задачи Коши* (3.1), *то функция* f, *заданная равенством* (3.2), *является результатом действия резольвенты на вектор* h, *т.е.* $f = (A^* - zI)^{-1}h$.

Доказательство. Начнем с доказательства того, что функция f, заданная равенством (3.2), принадлежит $\operatorname{Dom}(A^*)$. Учитывая, что $\|c(x)^*c(x)\| = \|k(x,x)\|$, получаем

$$\|h(x) - c(x)g(\varphi(x),z)\|_H \leqslant \|h(x)\|_H + C_2\|k(x,x)\|^{1/2}\|h\| \in L^2(\mu).$$

Таким образом, из неравенства $\|R(x,z)\| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{Im} z} \leqslant 1$ следует, что $f \in L^2(H,\mu)$. Поскольку $R(x,z)$ отображает любой вектор в $\operatorname{Dom}(\alpha(x))$, вектор-функция αf корректно определена и принадлежит $L^2(H,\mu)$, так как $\alpha(x)R(x,z) = I + zR(x,z)$, и $R(x,z)$ — равномерно ограничена по x. Таким образом, мы доказали, что $f \in \operatorname{Dom}(A^*)$.

Проверим теперь тождество $(A^* - zI)f = h$.

$$\begin{aligned}
\big((A^* - zI)f\big)(x) - h(x) &= -c(x)g(\varphi(x)) - ic(x)\int_{\varphi(x)}^{M} c_*(t)^* f_*(t)\,dt \\
&= c(x)\int_{\varphi(x)}^{M} c_*(t)^*\big(\Omega(t)[c_*(t)g(t) - h_*(t)] - if_*(t)\big)dt \\
&= c(x)\int_{\varphi(x)}^{M} c_*(t)^*\Omega(t) \\
&\quad\times\big(c_*(t)g(t) - h_*(t) - i\big(i(\alpha_*(t) - zI) + (t-\varphi_*(t))c_*(t)c_*(t)^*\big)f_*(t)\big)dt \\
&= c(x)\int_{\varphi(x)}^{M} c_*(t)^*\Omega(t)c_*(t)\big[g(t) - g(\varphi_*(t)) - i(t-\varphi_*(t))c_*(t)^*f_*(t)\big]dt.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Мы видим, что выражение в квадратных скобках равно нулю в каждой точке t, для которой $\mu(\{\psi(t)\}) = 0$, поскольку в таких точках $\varphi_*(t) = t$. Итак, теперь мы можем предполагать, что мера μ имеет нагрузку в точке $x = \psi(t)$. Напомним, что в этом случае $t \in [\varphi(x-0),\varphi(x+0)] = [\mu[0,x),\mu[0,x]]$. Проверим, что в (3.13) выражение в квадратных скобках равно нулю на открытых интервалах. Множество концов этих интервалов не более, чем счетно, т.е. имеет лебегову меру нуль, и его можно не рассматривать.

Чтобы, используя формулу (3.12), судить о поведении вектор-функции g на интервале $(\varphi(x-0),\varphi(x+0))$, нам нужно знать поведение оператор-функции

G. Эта информация будет также полезна и при исследовании факторизаций характеристической функции S_A. По этой причине мы сформулируем требуемое утверждение в виде отдельной сублеммы.

Сублемма 3.10. *Если точка x несет ненулевую массу меры μ, то решение G задачи (2.5) в точках $t \in [\varphi(x-0), \varphi(x+0)]$ имеет вид*

$$G(t,z) = \big[I - i\big(t - \varphi(x)\big)c(x)^* R(x,z)c(x)\big]G(\varphi(x),z). \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы знаем, что решение задачи (2.5) единственно, и наше выражение совпадает с решением по крайней мере в точке $t = \varphi(x)$. Поэтому достаточно проверить, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению из (2.5).

Левая часть в этом уравнении равна

$$G(t,z)' = -i\, c(x)^* R(x,z)c(x)G(\varphi(x),z),$$

и поскольку $v_*(t) = v(x)$ для любой функции v и любой внутренней точки t рассматриваемого интервала, правая часть в уравнении (2.5) равна

$$\begin{aligned}
&c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)G(t,z)\\
&\quad= c(x)^*\Omega(t,z)\big[I - i\big(t-\varphi(x)\big)c(x)c(x)^* R(x,z)\big]c(x)G(\varphi(x),z)\\
&\quad= -i\, c(x)^* R(x,z)c(x)G(\varphi(x),z).
\end{aligned}$$

Таким образом, наша функция G удовлетворяет уравнению (2.5), и тем самым сублемма доказана. •

Возвратимся теперь к функции g на интервале $(\varphi(x-0), \varphi(x+0))$. Обозначим символом $I(a,b)$ интеграл $\int_a^b G(\tau)^{-1}c_*(\tau)^*\Omega(\tau)h_*(\tau)d\tau$. Тогда в силу (3.12)

$$\begin{aligned}
&g(t) - g(\varphi(x)) = G(t)I(t,M) - G(\varphi(x))I(\varphi(x),M)\\
&\quad= G(t)I(t,\varphi(x)) + [G(t) - G(\varphi(x))]I(\varphi(x),M)\\
&\quad= G(t)I(t,\varphi(x)) - i\big(t-\varphi(x)\big)c(x)^* R(x,z)c(x)G(\varphi(x))I(\varphi(x),M)\\
&\quad= G(t)I(t,\varphi(x)) - i\big(t-\varphi(x)\big)c(x)^* R(x,z)c(x)g(\varphi(x)).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Мы используем одно из представлений (3.10), чтобы показать, что в (3.15) первое слагаемое равно $i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x,z)h(x)$:

$$\begin{aligned}
&G(t)I(t,\varphi(x))\\
&\quad=\big[I-i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x)c(x)\big]G(\varphi(x))\\
&\quad\times\int_t^{\varphi(x)} G(\varphi(x))^{-1}\big[I-i(\tau-\varphi(x))c(x)^*R(x)c(x)\big]^{-1}c(x)^*\Omega(\tau)h(x)\,d\tau\\
&\quad=-ic(x)^*\big[I-i(t-\varphi(x))R(x)c(x)c(x)^*\big]\\
&\quad\times\int_t^{\varphi(x)}\big[I-i(\tau-\varphi(x))R(x)c(x)c(x)^*\big]^{-2}R(x)h(x)\,d\tau\\
&\quad=i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x)h(x).
\end{aligned}$$

В последнем тождестве было использовано соотношение

$$\int_t^a [I-(\tau-a)X]^{-2}d\tau=-(t-a)[I-(t-a)X]^{-1},$$

справедливое при $\|X\|\leqslant\dfrac{1}{|a-t|}$. Это условие выполнено для $a=\varphi(x)$ и $X=iR(x)k(x,x)$ в предположении (2.7).

Подставляя это в (3.15), мы получим

$$\begin{aligned}
g(t)-g(\varphi(x))&=i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x)h(x)-i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x)c(x)g(\varphi(x))\\
&=i(t-\varphi(x))c(x)^*R(x)\big[h(x)-c(x)g(\varphi(x))\big]\\
&=i(t-\varphi(x))c(x)^*f(x).
\end{aligned}$$

Следовательно, из (3.13) вытекает тождество $(A^*-zI)f=h$, т.е. $\mathrm{Range}(A^*-zI)$ совпадает со всем пространством $L^2(H,\mu)$. Чтобы доказать существование резольвенты $(A^*-zI)^{-1}$, нужно только показать, что $\mathrm{Ker}(A^*-zI)=0$. Последнее верно в силу леммы 3.1, поскольку f с помощью формулы (3.2) однозначно восстанавливается по решению g задачи Коши (3.1), которое единственно. Лемма доказана. •

Следствие 3.11. *Операторы A^* и A максимальны.*

Доказательство. Диссипативные операторы A и $-A^*$ максимальны или нет одновременно. Только что мы доказали, что $\mathrm{Range}(A^*-zI)=L^2(H,\mu)$ при некоторых $z\in\mathbb{C}_+$, следовательно, у оператора $-A^*$ нет диссипативных расширений, т.е. он максимален. •

3.4. Доказательство теоремы 2.1 и следствия 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Как и раньше, мы будем использовать следующие обозначения: $f(\,\cdot\,,z,h)=(A^*-zI)^{-1}h$, E-значная функция g определяется функцией f по формуле

$$g(t,z,h)=-i\int_t^M c_*(\tau)^*f_*(\tau,z,h)d\tau.$$

Напомним также, что g можно выразить в терминах решения G задачи Коши (2.5) с помощью формулы (3.12).

Возьмём произвольный вектор $e\in E$ и, используя формулу (2.4), вычислим S_A:

$$\begin{aligned}S_A(z)e&=e+ic^*(A^*-zI)^{-1}ce=e+ic^*f(\,\cdot\,,z,ce)=e+i\int_0^1 c(x)^*f(x,z,ce)d\mu(x)\\&=e+i\int_0^M c_*(t)^*f_*(t,z,ce)dt\\&=e-g(0,z,ce).\end{aligned}$$

Согласно следствию 3.4, обратный оператор G^{-1} удовлетворяет уравнению $\big(G(t)^{-1}\big)'=-G(t)^{-1}c_*(t)^*\Omega(t)c_*(t)$. Таким образом, используя (3.12), получим

$$\begin{aligned}g(t,z,ce)&=G(t,z)\int_t^M G(\tau,z)^{-1}c_*(\tau)^*\Omega(\tau,z)c_*(\tau)e\,d\tau\\&=-G(t,z)\int_t^M\big(G(\tau,z)^{-1}\big)'\,e\,d\tau=G(t,z)\left[G(t,z)^{-1}-I\right]e\\&=e-G(t,z)e.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Следовательно, $S_A(z)e=G(0,z)e$ для произвольного e из E. Теорема доказана. •

Хорошо известно, что решение системы дифференциальных уравнений (2.5) задается так называемым мультипликативным интегралом

$$G(t)=\int_t^{M}\!\!\!\!\!\!\frown\; e^{-c_*(\tau)^*\Omega(\tau)c_*(\tau)d\tau},$$

(см. добавление в [9], где подробно обсуждается это понятие). Далее, определитель $\det G(t)$ можно вычислять по формуле

$$\det G(t) = \exp\Big\{ - \int_t^M \operatorname{tr}\big[c_*(\tau)^*\Omega(\tau)c_*(\tau)\big]d\tau\Big\}$$

(матричнозначный случай описан теоремой 2 в [1], обобщение на ядерные операторы можно найти в [3, гл. IV]).

Доказательство следствия 2.2. Сперва предположим, что выполнено условие (2.7), тогда $S_A(z) = G(0,z)$ и, согласно следствию 3.7, $I - G(t,z) \in \mathfrak{S}_1$. Поэтому определитель оператора $S_A(z)$ корректно определен, и

$$\det S_A(z) = \exp\Big\{ - \int_0^M \operatorname{tr}\big[c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)\big]dt\Big\}.$$

Для любого x с $\mu_x > 0$ мы положим $E_1 = \bigcup_{x:\mu_x>0}[\varphi(x-0),\varphi(x+0)]$ и $E_2 = [0,M]\backslash E_1$. Напомним, что $\varphi_*(t) = \varphi(x)$ при $t \in (\varphi(x-0),\varphi(x+0))$ и $\varphi_*(t) = t$ при $t \in E_2$.

Возьмем ортогональное семейство $\{e_j(x)\}$ в H (см. (2.3)), приводящее к диагональному виду операторы $\alpha(x)$ и $k(x,x)$. Тогда сужение оператора $\Omega(t,z)$ на ортогональное дополнение к $\operatorname{Ker} k_*(t,t)$ можно записать в следующем виде:

$$\Omega(t,z)|_{\operatorname{Ker} k_*(t,t)^\perp} = \sum_j \frac{1}{i(\alpha_{j*}(t) - z) + (t - \varphi_*(t))\kappa_{j*}(t)^2}\big(\,\cdot\,, e_{j*}(t)\big)e_{j*}(t).$$

Теперь рассмотрим семейство $q_j(x) = \frac{1}{\kappa_j(x)}c(x)^*e_j(x)$. Это — ортонормированное семейство в E, и так как $k(x,x) = c(x)c(x)^*$, то

$$c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t) = \sum_j \frac{\kappa_{j*}(t)^2}{i(\alpha_{j*}(t) - z) + (t - \varphi_*(t))\kappa_{j*}(t)^2}\big(\,\cdot\,, q_{j*}(t)\big)q_{j*}(t),$$

откуда

$$\operatorname{tr} c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t) = \sum_j \frac{\kappa_{j*}(t)^2}{i(\alpha_{j*}(t) - z) + (t - \varphi_*(t))\kappa_{j*}(t)^2}.$$

Рассмотрим сперва интеграл по E_1. Зафиксируем точку x, для которой

$\mu_x > 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\varphi(x-0)}^{\varphi(x+0)} \operatorname{tr}\left[c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)\right]dt \\
&\quad= -\sum_j \int\limits_{\varphi(x-0)}^{\varphi(x+0)} \frac{\kappa_j(x)^2\,dt}{i(\alpha_j(x)-z)+(t-\varphi(x))\kappa_j(x)^2} = -\sum_j \int\limits_{-\frac12\mu_x}^{\frac12\mu_x} \frac{d\tau}{\tau + i\frac{\alpha_j(x)-z}{\kappa_j(x)^2}} \\
&\quad= \sum_j \log\frac{z-z_j(x)}{z-\overline{z}_j(x)}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получили произведение Бляшке в формуле (2.8). Унимодулярные множители $e^{i\phi_j(x)}$ введены для того, чтобы сделать произведение сходящимся.

Интегрирование по E_2 соответствует интегрированию по непрерывной части μ_c меры μ. Действительно, пусть $v \in L^1(\mu)$ и

$$
\tilde v(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } \mu(\{x\}) = 0, \\ 0, & \text{если } \mu(\{x\}) \neq 0. \end{cases}
$$

Тогда

$$
\int\limits_0^1 v(x)d\mu_c(x) = \int\limits_0^1 \tilde v(x)d\mu(x) = \int\limits_0^M \tilde v_*(t)dt = \int\limits_{E_2} \tilde v_*(t)dt = \int\limits_{E_2} v_*(t)dt.
$$

Так как $\Omega(t,z) = -iR(z,\psi(t))$ для $t \in E_2$, то интеграл E_2 можно легко сосчитать:

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{E_2} \operatorname{tr}\left[c_*(t)^*\Omega(t,z)c_*(t)\right]dt &= i\int\limits_{E_2} \operatorname{tr}\left[c_*(t)^*R(\psi(t),z)c_*(t)\right]dt \\
&= i\int\limits_0^1 \operatorname{tr}\left[c(x)^*R(x,z)c(x)\right]d\mu_c(x).
\end{aligned}
$$

Итак, мы доказали формулу (2.8) при $\operatorname{Im} z \geqslant 1 + \frac12 \sup \mu_x \|k(x,x)\|$. Поскольку обе стороны данного соотношения являются H^∞-функциями в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, аналитическое продолжение завершает доказательство. •

3.5. Доказательство теоремы 2.3. Доказательство теоремы 2.3 опирается на следующую лемму.

Лемма 3.12. *Условие* (2.10) *теоремы* 2.3 *является необходимым, а в предположении* (2.2) *и достаточным, для справедливости оценки*

$$\inf_{z\in\mathbb{C}_+}\{\det S_A(z)\}_{\text{sing, out}} \geqslant 0.$$

Доказательство. Сперва предположим, что условие (2.2) выполнено. Формула (2.8) показывает, что произведение сингулярного внутреннего и внешнего сомножителей $\{\det S_A\}_{\text{sing,out}}$ имеет вид

$$\{\det S_A(z)\}_{\text{sing,out}} = \exp\left(i\int_0^1 \operatorname{tr}\left[c(x)^* R(x,z)c(x)\right]d\mu_c(x)\right).$$

Используя спектральное представление оператора $\alpha(x)$, мы получим

$$\{\det S_A(z)\}_{\text{sing,out}} = \exp\left(i\int_0^1\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{tr}[c(x,\lambda)^* c(x,\lambda)]}{\lambda - z}d\rho_x(\lambda)\,d\mu_c(x)\right).$$

Поскольку $\operatorname{tr}[c(x,\lambda)^* c(x,\lambda)] \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\dfrac{i}{\lambda - z} = -\dfrac{\operatorname{Im} z}{|\lambda - z|^2}$, справедливо следующее тождество

$$|\{\det S_A(z)\}_{\text{sing, out}}|^{-1} = \exp\left(\operatorname{Im} z\int_0^1\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{tr}[c(x,\lambda)^* c(x,\lambda)]}{|\lambda - z|^2}d\rho_x(\lambda)\,d\mu_c(x)\right)$$
$$= \exp\left(\operatorname{Im} z\int_{\mathbb{R}}\frac{d\nu_c(s)}{|s-z|^2}\right).$$

Утверждение леммы теперь вытекает из теоремы Фату о граничных значениях интеграла Пуассона.

Если же условие (2.2) не выполнено, то интеграл по E_1 в доказательстве следствия 2.2 может дать не чистое произведение Бляшке, в нем могут возникнуть слагаемые, дающие вклад во внешний и сингулярный внутренний сомножители. Тем не менее эти дополнительные сомножители по модулю не превосходят единицы. Следовательно, и в этой ситуации ограниченность приведенного выше интеграла Пуассона остается необходимой для отделенности от нуля функции $\{\det S_A(z)\}_{\text{sing, out}}$. •

Отметим, что при выполнении условия (2.2) можно написать другое выражение для меры ν_c:

$$\nu_c(F) = \sum_j \int_{\alpha^{-1}(F)} \kappa_j(x)^2 d\mu_c(x).$$

Теорема 2.3 непосредственно вытекает из теоремы 1.3 и только что доказанной леммы. Действительно, если выполнено условие (UTB), то по теореме 1.3 условие (1.4) необходимо для подобия оператора A нормальному, а по лемме 3.12 для последней оценки условие (2.10) является необходимым.

Если мера μ непрерывна, то лемма 3.12 обеспечивает оценку (1.4), а теорема 1.3 гарантирует требуемое подобие. •

3.6. Доказательство теоремы 2.4.

Лемма 3.13. *Неравенство* (2.11) *выполняется в том и только в том случае, когда мера*

$$\sigma = \sum_{j,x:\mu(\{x\})>0} \operatorname{Im} z_j(x)\, \delta_{z_j(x)} \tag{3.17}$$

является карлесоновой.

Доказательство. Для произвольного квадрата $Q = [x_0 - h, x_0 + h] \times i[0, 2h]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$, справедливо тождество

$$\sigma(Q) = \sum_{z_j(x)\in Q} \operatorname{Im} z_j(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x_0-h\leqslant\alpha_j\leqslant x_0+h,\\ 0\leqslant\frac{1}{2}\mu_x\kappa_j(x)^2\leqslant 2h}} \mu_x\kappa_j(x)^2 = \nu_{d,h}([x_0 - h, x_0 + h]).$$

Следовательно, условие Карлесона для меры σ имеет вид

$$\nu_{d,h}([x_0 - h, x_0 + h]) \leqslant Ch.$$

Т.е. условие (2.11) — это не что иное, как утверждение о карлесоновости данной меры. •

Поскольку условие (LRG) является необходимым для подобия нормальному оператору, эта лемма вместе с теоремой 1.6 доказывает теорему 2.4. •

3.7. Доказательство теоремы 2.5. Проверим выполнение условий теоремы 1.3. Заметим сперва, что условие i) теоремы 1.3, согласно лемме 3.12, равносильно условию (2.10), и следовательно, при наших предположениях оно выполнено. Таким образом, нам нужно только проверить, что собственные подпространства образуют безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки.

По лемме 3.13 при условии (2.11) множество собственных значений $\{z_j(x)\}$ является N-карлесоновым. А так как множество $\Lambda = \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$ редкое, то оно карлесоново (если мы не учитываем кратности), т.е. произведение Бляшке с множеством простых нулей Λ удовлетворяет условию Карлесона. Поскольку оператор A не имеет корневых векторов, это произведение Бляшке является минимальной функцией сужения оператора A на подпространство $\operatorname{span}\{\operatorname{Ker}(A - zI) : z \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+\}$, а собственные подпространства образуют безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки. •

3.8. Доказательство теоремы 2.6. Условие (2.12) удобно разбить на (2.10) и (2.11). По лемме 3.12 условие i) теоремы 1.3 равносильно условию (2.10). А согласно лемме 3.13 утверждение (2.11) означает, что мера (3.17) является карлесоновой. Вместе с редкостью множества $\{z(x)\}$ это равносильно его карлесоновости (см. замечание 1.5). Однако для оператора со скалярной характеристической функцией это равносильно утверждению, что он не имеет корневых векторов, а его собственные векторы образуют безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки, что является условием ii) теоремы 1.3. Поскольку при $\operatorname{rank}\operatorname{Im} A = 1$ условие (UTB) выполнено, ссылка на теорему 1.3 завершает доказательство теоремы. •

3.9. Доказательство леммы 2.7 и сопутствующие наблюдения. Предварим обсуждение факторизаций характеристической функции S_A следующим существенным уточнением следствия 3.6.

Лемма 3.14. *Решение $G(t, z)$ задачи Коши (2.5) допускает аналитическое продолжение по параметру z на всю полуплоскость $\mathbb{C}_+$. Более того, его значения являются сжатиями при всех t и z, $t \in [0, M]$, $\operatorname{Im} z > 0$. Если $t = \varphi(x \pm 0)$, $x \in [0, 1]$, то оператор-функции $G(0, z)G(t, z)^{-1}$ также продолжаются на всю полуплоскость $\mathbb{C}_+$, их значения являются сжатиями, а факторизации*

$$G(0, z) = \left[G(0, z)G(t, z)^{-1}\right]G(t, z)$$

регулярны (о понятии регулярности см., например, [12]).

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in (0, 1)$ и положим $t_0 = \varphi(x_0 + 0) = \mu([0, x_0])$. Пусть μ_0 — сужение меры μ на промежуток $(x_0, 1]$, т.е. $\mu_0(F) = \mu(F \cap (x_0, 1])$ для любого измеримого множества F отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим оператор A_0 в $L^2(\mu_0)$, заданный той же формулой (0.1), где мера μ заменена мерой μ_0. Ясно, что соответствующая задача Коши $(2.5)_0$ на промежутке $[0, M_0]$, $M_0 = M - t_0$, есть просто исходная задача Коши, рассматриваемая на промежутке $[t_0, M]$ и сдвинутая влево на t_0. Следовательно, функция $S_{A_0}(z) = G(t_0, z)$, будучи характеристической функцией максимального диссипативного оператора, является аналитической во всей полуплоскости $\mathbb{C}_+$, а ее значения суть сжатия. То же заключение справедливо и для $t_0 = \varphi(x_0 - 0) = \mu([0, x_0))$, нам только нужно рассмотреть меру μ_0, определенную как сужение μ на замкнутый промежуток $[x_0, 1]$.

Если мы отождествим $L^2(\mu_0)$ с подпространством пространства $L^2(\mu)$, состоящим из функций, обращающихся в нуль на промежутке $[0, x_0]$, то это подпространство инвариантно относительно A и A_0 — это как раз сужение A на $L^2(\mu_0)$. Кроме того, представление $S_A(z) = [G(0, z)G(t_0, z)^{-1}]G(t_0, z)$ является регулярной факторизацией характеристической функции, т.е. сомножитель $G(0, z)G(t_0, z)^{-1}$ является голоморфной функцией от $z \in \mathbb{C}_+$, принимающей сжимающие значения.

Таким образом, для завершения доказательства нам надо проверить, что функция $G(t,z)$ аналитически продолжается по z, если $t \in \big(\varphi(x-0), \varphi(x+0)\big)$, для любой точки x, для которой $\mu_x > 0$, и при этом ее значения являются сжатиями. Фиксируем теперь одну из таких точек x и воспользуемся формулой (3.14). Тогда

$$G(\varphi(x+0), z) = \Big[I - i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z) c(x)\Big] G(\varphi(x), z),$$

и, следовательно,

$$G(t,z) = \big[I - i\big(t-\varphi(x)\big) c(x)^* R(x,z) c(x)\big] \Big[I - i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z) c(x)\Big]^{-1} G(\varphi(x+0), z). \tag{3.18}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\Big[I - i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z) c(x)\Big] \\
&\quad = I + \frac{1}{2}\mu_x c(x)^* [\operatorname{Im} R(x,z)] c(x) = I + \frac{1}{2}\operatorname{Im} z \mu_x c(x)^* R(x,z) R(x,z)^* c(x) \\
&\quad \geqslant I
\end{aligned}$$

при всех $z \in \mathbb{C}_+$, обратный оператор существует и аналитичен на всей полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Теперь оценим норму оператора $G(t,z)$:

$$\begin{aligned}
I - &\Big[I + i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z)^* c(x)\Big]^{-1} \big[I + i\big(t-\varphi(x)\big) c(x)^* R(x,z)^* c(x)\big] \\
&\times \big[I - i\big(t-\varphi(x)\big) c(x)^* R(x,z) c(x)\big] \Big[I - i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z) c(x)\Big]^{-1} \\
= &\Big(\frac{1}{2}\mu_x - \big(t-\varphi(x)\big)\Big) \Big[I + i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z)^* c(x)\Big]^{-1} c(x)^* R(x,z)^* \\
&\times \Big\{2\operatorname{Im} z I + \Big[\frac{1}{2}\mu_x + \big(t-\varphi(x)\big)\Big] c(x) c(x)^*\Big\} \\
&\times R(x,z) c(x) \Big[I - i\frac{1}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z) c(x)\Big]^{-1} \\
\geqslant &\ 0
\end{aligned}$$

при всех $z \in \mathbb{C}_+$ и $t \in \big[\mu([0,x)), \mu([0,x])\big]$. Таким образом,

$$G(t,z)^* G(t,z) \leqslant G(\varphi(x+0), z)^* G(\varphi(x+0), z) \leqslant I,$$

и доказательство завершено. •

Доказательство леммы 2.7. Согласно лемме 3.14, взяв две регулярные факторизации функции $G(0,z)$, соответствующие точкам $t_\pm = \varphi(x \pm 0)$, мы получим следующую регулярную факторизацию

$$S_A(z) = S_{x-}(z)B_x(z)S_{x+},$$

где $B_x(z) = G(\varphi(x-0),z)G(\varphi(x+0),z)^{-1}$. Из формулы (3.18) мы получаем

$$B_x(z) = \left[I + \frac{i}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z)c(x)\right]\left[I - \frac{i}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z)c(x)\right]^{-1}.$$

В предположении (2.2) мы видим, что B_x — диагональное произведение Бляшке–Потапова. Действительно, если $\{e_j(x)\}$ — семейство совместных нормированных собственных векторов операторов $k(x,x)$ и $\alpha(x)$, отвечающих ненулевым собственным значениям $\kappa_j(x)^2$ оператора $k(x,x)$ (см. (2.3)), то, как и в доказательстве следствия 2.2, можно ввести ортонормированное семейство $\{q_j(x)\}$ в E, $q_j(x) = \frac{1}{\kappa_j(x)}c(x)^*e_j(x)$. Если символом $Q(x)$ мы обозначим ортогональный проектор в E на ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{span}_j\{q_j(x)\}$, то

$$\begin{aligned} B_x(z) &= \left[I + \frac{i}{2}\sum_j \frac{\kappa_j(x)^2}{\alpha_j(x)-z}(\,\cdot\,,q_j(x))q_j(x)\right]\left[I - \frac{i}{2}\sum_j \frac{\kappa_j(x)^2}{\alpha_j(x)-z}(\,\cdot\,,q_j(x))q_j(x)\right] \\ &= Q(x) + \sum_j \frac{z - z_j(x)}{z - \overline{z_j(x)}}(\,\cdot\,,q_j(x))q_j(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана. •

Следствие 3.15. *Для любого конечного множества точек $x_j \in [0,1]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, существует регулярная факторизация характеристической функции вида*

$$S_A(z) = S_{x_1-}B_{x_1}S_{x_1,x_2}B_{x_2}S_{x_2,x_3}\cdot\ldots\cdot B_{x_n}S_{x_n+}, \tag{3.19}$$

где $S_{a,b} = G(\varphi(a+0),z)G(\varphi(b-0),z)^{-1}$.

В „вырожденном“ случае $x_1 = 0$ (или $x_n = 1$) самый левый сомножитель S_{0-} (или соответственно самый правый S_{1+}) является тождественным оператором.

Доказательство. Напомним, что $G(\varphi(x+0),z)$ — характеристическая функция оператора A_0 с мерой μ_0, являющейся сужением меры μ на промежуток $(x,1]$ (см. доказательство леммы 3.14). Теперь мы можем последовательно применять лемму 3.14: сперва к точке x_1, затем, взяв S_{x_1+} в качестве S_A, к точке x_2 и так далее. •

Отметим, что при выполнении условия (2.2) мы можем сосчитать определитель каждого сомножителя в (3.19):

$$\det B_x(z) = \prod_j \left(\frac{z - z_j(x)}{z - \overline{z_j(x)}} e^{i\phi_j(x)} \right),$$

$$\det S_{a,b}(z) = \prod_{j,\, x: a<x<b} \left(\frac{z - z_j(x)}{z - \overline{z_j(x)}} e^{i\phi_j(x)} \right) \cdot \exp \left(i \int_a^b \operatorname{tr}[c(x)^*(\alpha(x) - z)^{-1} c(x)]\, d\mu_c(x) \right).$$

Это помогает нам, например, в „локализации" нулей характеристической функции. Фиксируем точку $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$. Так как нули определителя $\det S_A$ удовлетворяют условию Бляшке, то существует конечное множество, скажем $\{x_l\}_{l=1}^n$, точек на промежутке $[0,1]$, для которых $z_j(x_l) = \lambda$ при некотором j. Рассмотрим факторизацию (3.19) с выбранным множеством $\{x_l\}$. Тогда каждый сомножитель B_{x_l} имеет непустое ядро в точке λ кратности, пусть $\varkappa_l$, таким образом, $\varkappa(\lambda) = \sum_{l=1}^n \varkappa_l$ — кратность нуля определителя $\det S_A$ в точке λ. Функция $b_\lambda^{\varkappa(\lambda)} \det S_A^{-1}$ является голоморфной в некоторой окрестности точки λ, и, следовательно, все сомножители S в (3.19) в ней обратимы и обратные к ним определены и в точке λ. Пусть $P_\lambda(x)$ — ортогональный проектор в E на $\operatorname{Ker} B_x(\lambda) = \operatorname{Ker}\left[I + \frac{i}{2}\mu_x c(x)^* R(x,\lambda) c(x)\right]$, тогда $\operatorname{rank} P_\lambda(x_l) = \varkappa_l$ и B_{x_l} допускает факторизацию

$$B_{x_l}(z) = \left[b_\lambda(z) P_\lambda(x_l) + \left(I - P_\lambda(x_l)\right)\right] B_{x_l}^\lambda(z),$$

где сомножитель $B_{x_l}^\lambda(z)$ уже обратим в некоторой окрестности точки $z = \lambda$. Обозначим символом S_{x+}^λ „хвост" разложения (3.19), где все B_{x_l} заменены на $B_{x_l}^\lambda$:

$$S_{x_l+}^\lambda = S_{x_l, x_{l+1}} B_{x_{l+1}}^\lambda S_{x_{l+1}, x_{l+2}} \cdot \ldots \cdot B_{x_n}^\lambda S_{x_n+},$$

тогда $S_{x_l}^\lambda(z)$ также обратимы в окрестности точки $z = \lambda$.

Теперь можно проанализировать геометрические свойства собственных и корневых подпространств. У оператора A нет присоединенных векторов в том и только в том случае, когда функция $S_A(z)^{-1}$ имеет лишь простые полюса во всех точках $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}_+$ или, другими словами, если $\dim \operatorname{Ker} S_A(\lambda) = \varkappa(\lambda)$. Ясно, что последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Range} P_\lambda(x_l) \subset \operatorname{Range} S_{x_l+}(\lambda)$.

Предполагая, что у A нет присоединенных векторов, мы можем из разложения, обратного к (3.19), удалить все сомножители, которые имеют полюс выше первого порядка. Мы получим следующее выражение:

$$S_A(z)^{-1} = \sum_{l=1}^n S_{x_l+}^\lambda(z)^{-1} \left[b_\lambda(z)^{-1} P_\lambda(x_l) + (I - P_\lambda(x_l))\right] B_{x_l}^\lambda(z)^{-1} S_{x_l-}^\lambda(z)^{-1}.$$

Выражение для ядра оператора $S_A(\lambda)$ мы получим, вычислив образ вычета функции S_A^{-1} в точке λ:

$$\operatorname{Ker} S_A(\lambda) = \operatorname{span}\left\{S^{\lambda}_{x_l+}(z)^{-1} \operatorname{Range} P_\lambda(x_l) : 1 \leqslant l \leqslant n\right\}.$$

Отметим, что так как $\dim \operatorname{Ker} S_A(\lambda) = \varkappa(\lambda)$ и подпространства в этой сумме имеют размерности $\varkappa_l$, то они линейно-независимы.

3.10. Доказательство леммы 2.8. Поскольку

$$\begin{aligned} C_2(A) &= \sup_{z\in\mathbb{C}_+} 4 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{tr}[(A^* - zI)^{-1} \operatorname{Im} A (A - \bar{z}I)^{-1}] \\ &= \sup_{z\in\mathbb{C}_+} 2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{tr}[(A^* - zI)^{-1} cc^* (A - \bar{z}I)^{-1}] \\ &= \sup_{z\in\mathbb{C}_+} 2 \operatorname{Im} z \cdot \|(A^* - zI)^{-1} c\|^2_{\mathfrak{S}_2}, \end{aligned}$$

нам нужно вычислить

$$(A^* - zI)^{-1} ce = f(\,\cdot\,, z, ce) = R(\,\cdot\,, z)\big(ce - cg(\varphi(\,\cdot\,), z, ce)\big), \quad e \in E$$

(мы используем обозначения, введенные в лемме 3.1). Уже было проверено (см. (3.16)), что $g(t, z, ce) = e - G(t, z)e$. Следовательно, $ce - cg(\varphi, z, ce) = cG(\varphi, z)e$, и, выбирая произвольный ортонормированный базис $\{e_j\}$ в E, мы получаем

$$\begin{aligned} \|(A^* - zI)^{-1} c\|^2_{\mathfrak{S}_2} &= \sum \|(A^* - zI)^{-1} ce_j\|^2_{L^2(H,\mu)} \\ &= \sum \int_0^1 \|R(x, z)c(x)G(\varphi(x), z)e_j\|^2_H d\mu(x) \\ &= \int_0^1 \|R(x, z)c(x)G(\varphi(x), z)\|^2_{\mathfrak{S}_2} d\mu(x). \quad \bullet \end{aligned}$$

3.11. Доказательство следствия 2.9. В интеграле по непрерывной части меры μ можно просто опустить операторы $G(\varphi(x), z)$, так как в силу леммы 3.14 они являются сжатиями:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z \int_0^1 \|R(x, z)c(x)G(\varphi(x), z)\|^2_{\mathfrak{S}_2} d\mu_c(x) &\leqslant \operatorname{Im} z \int_0^1 \|R(x, z)c(x)\|^2_{\mathfrak{S}_2} d\mu_c(x) \\ &\leqslant \operatorname{Im} z \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\|c(x, \lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2}}{|\lambda - z|^2} d\rho_x(\lambda)\, d\mu_c(x) = \operatorname{Im} z \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_c(\lambda)}{|\lambda - z|^2}. \end{aligned}$$

В предположении (2.12) (и, стало быть, (2.10)) это — интеграл Пуассона меры с ограниченной плотностью, а следовательно, равномерно ограничен.

Рассмотрим теперь дискретную часть меры. Но сперва мы используем соотношение (3.14) для $t = \varphi(x+0)$, а затем оценим $\|G(\varphi(x+0), z)\|$ единицей:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im} z \sum_{x:\mu_x>0} \|R(x,z)c(x)G(\varphi(x),z)\|^2_{\mathfrak{S}_2}\mu_x \\
&\leqslant \operatorname{Im} z \sum_{x:\mu_x>0} \left\| R(x,z)c(x)\left[I - \frac{i}{2}\mu_x c(x)^* R(x,z)c(x)\right]^{-1} \right\|^2_{\mathfrak{S}_2}\mu_x \\
&= \operatorname{Im} z \sum_{x:\mu_x>0}\sum_j \frac{\mu_x \kappa_j(x)^2}{|\alpha_j(x) - z - \frac{i}{2}\mu_x\kappa_j(x)^2|^2} \\
&= 2\sum_{j,\,x:\mu_x>0} \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} z_j(x)}{|z - \overline{z}_j(x)|^2}.
\end{aligned}
$$

Последнее выражение ограничено, поскольку по лемме 3.13 мера (3.17) является карлесоновой, и для завершения доказательства достаточно сослаться на теорему 1.4. •

3.11. Пример. В заключение мы хотим сказать, что следующий вопрос все еще остается открытым: при каких условиях диссипативный оператор, удовлетворяющий условию линейного роста резольвенты и являющийся ядерным возмущением самосопряженного оператора, подобен нормальному оператору? Подчеркнем, что условие (UTB) не обязательно выполняется при этих предположениях. Сейчас мы приведем пример нормального оператора, заданного формулой (0.1) и не обладающего свойством (UTB).

Рассмотрим скалярный случай $H = E = \mathbb{C}$. Возьмем произвольное счетное подмножество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ единичного интервала $(0,1)$ и суммируемую последовательность нагрузок $\mu_n = \mu_{x_n}$. Положим затем $k(x_n, x_m) = w_n\delta_{n,m}$, $w_n > 0$, $\sum w_n\mu_n < \infty$, и возьмём произвольную функцию α, принимающую конечные значения в точках x_n. Теперь зададим оператор A формулой (0.1). Этот оператор нормален. Полное ортогональное семейство функций δ_n, $\delta_n(x_m) = \delta_{n,m}$, является семейством собственных векторов, отвечающих собственным значениям $z_n = \alpha(x_n) + \frac{1}{2}iw_n\mu_{x_n}$. Действительно,

$$
(A\delta_n)(x) = \alpha(x_n)\delta_n(x) + i\int_0^{x+} k(x,s)\delta_n(s)\,d\mu(s) = z_n\delta_n(x).
$$

Поскольку характеристическая функция S_A является диагональной, мы видим, что условие (UTB) сводится к свойству собственных значений z_n

быть объединением конечного множества последовательностей Карлесона

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \operatorname{tr}(I - S_A(z)^* S_A(z)) = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} 4\sum \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} z_n}{|z-\overline{z_n}|^2}.$$

Следовательно, всякая последовательность Бляшке $\{z_n\}$, не распадающаяся в конечное объединение карлесоновых последовательностей, дает нам пример нормального диссипативного ядерного возмущения самосопряженного оператора, не обладающего свойством (UTB).

Благодарности. Мы хотим поблагодарить профессора Н. К. Никольского за полезные обсуждения данной темы. Мы благодарны профессору Томасу В. Педерсену за проверку английского перевода этой статьи.

Список литературы

[1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954.

[2] Васюнин В. И., *Теорема о короне и углы между инвариантными подпространствами*, Алгебра и анализ **6** (1994), 95–109.

[3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов*, Наука, М., 1965.

[4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным*, Функц. анал. и его прил. **1** (1967), 38–60.

[5] Лившиц М. С., *О спектральном разложении линейных несамосопряжённых операторов*, Мат. сб., Нов. сер. **34** (1954), 145–199.

[6] Маламуд М. М., *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряжённому*, Укр. мат. ж. **37** (1985), 49–56.

[7] Маламуд М. М., *О подобии треугольного оператора диагональному*, Зап. науч. семин. ПОМИ **270** (2000), 201–241.

[8] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[9] Потапов В. П., *Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций*, Тр. Моск. мат. о-ва **4** (1955), 125–236.

[10] Сахнович Л. А., *О диссипативных операторах с абсолютно непрерывным спекторм*, Докл. АН СССР **167** (1966), 760–763.

[11] Сахнович Л. А., *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спекторм*, Тр. Моск. мат. о-ва **19** (1968), 211–270.

[12] Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.

[13] Benamara N. E., Nikolski N. K., *Resolvent tests for similarity to a normal operator*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), no. 3, 585–626.

[14] Kriete T. L., *Complete non-selfadjointness of almost selfadjoint operators*, Pacific J. Math. **42** (1972), 413–437.

[15] Kupin S., *Linear resolvent growth test for similarity of a weak contraction to a normal operator*, Ark. Mat. **39** (2001), 95–119.

[16] Nikolski N. K., Vasyunin V. I., *Elements of spectral theory in terms of the free function model. I. Basic constructions*, Holomorphic Spaces (Berkeley, CA, 1995) (S. Axler, J. E. McCarthy, D. Sarason, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 211–302.

[17] Sz.-Nagy B., Foiaş C., *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. X. Contractions similaires à des transformations unitaires*, Acta Sci. Math. **26** (1965), 79–91.
[18] Wermer J., *Commuting spectral measures on Hilbert space*, Pacific J. Math. **4** (1954), 355–361.

Поступило 23 августа 2000 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Laboratoire de Mathématiques Pures,
Université Bordeaux 1,
351, cours de la Libération,
33405 Talence, France
и
Математическое отделение ФТИНТ
61164, Харьков, пр. Ленина, 47, Украина
E-mail: kupin@math.u-bordeaux.fr