



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Квицинский, С. П. Меркурьев, Плоская волна в системе трех частиц с нулевым полным орбитальным моментом, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 4, 182–200

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 марта 2025 г., 07:42:08



© 1990 г.

А. А. Квицинский, С. П. Меркурьев

## ПЛОСКАЯ ВОЛНА В СИСТЕМЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ С НУЛЕВЫМ ПОЛНЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

Исследуется плоская волна  $\mathcal{F}$  для квантовой системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом, равным нулю. Показано, что  $\mathcal{F}$  есть функция двух переменных, которые суть решения соответствующего уравнения эйконала. Для  $\mathcal{F}$  получены явные представления и полные асимптотические разложения при малых и больших гиперрадиусах. Доказаны теорема сложения для гиперсферических функций и три новые теоремы сложения для некоторых специальных функций.

В теории рассеяния плоской волной называют решение свободного уравнения Шредингера. Более строго, плоская волна — это ядро унитарного интегрального преобразования, которое диагонализует оператор кинетической энергии (в евклидовом пространстве  $R^n$  таковым является преобразование Фурье в  $L_2(R^n)$ ). Настоящая работа посвящена исследованию плоской волны для системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом, равным нулю.

Оператор кинетической энергии такой системы задается дифференциальным оператором  $H_0$  на трехмерном римановом многообразии, так называемом внутреннем пространстве  $M$ . Оператор  $H_0$  можно привести к диагональному виду с помощью унитарного интегрального преобразования  $\mathcal{F}$  в  $L_2(M)$ . Ядро  $\mathcal{F}$  и есть плоская волна в рассматриваемой задаче. Она удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом  $H_0$ , которое описывает систему трех невзаимодействующих частиц с нулевым полным орбитальным моментом ( $\ell=0$ ). С точки зрения теории рассеяния это — волновая функция начального состояния в процессах рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) при  $\ell=0$ .

Информация о структуре плоской волны  $\mathcal{F}$  играет ключевую роль при построении теории рассеяния для систем трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. В нашем случае плоская волна является довольно сложной функцией, которая не выражается в виде конечной комбинации элементарных или известных специальных функций. Фактически  $\mathcal{F}$  представляет собой новую специальную функцию. Исследование ее свойств связано с решением обычного круга задач, возникающих в теории специальных функций. К ним относятся получение интегральных представлений и разложений в ряды, анализ асимптотик и т.п. Решение этих задач — цель настоящей работы. Опишем ее содержание.

---

Ключевые слова: система трех частиц, нулевой орбитальный момент, плоская волна, гиперсферические функции, теоремы сложения, асимптотики.

В § 1 приведены необходимые сведения о структуре внутреннего пространства и оператора кинетической энергии  $H_0$ . Эти результаты хорошо известны. Более подробное изложение соответствующих вопросов можно найти, например, в статье [1].

В § 2 рассматриваются собственные функции угловой части оператора  $H_0$ , так называемые гиперсферические гармоники. Последние исследовались в ряде работ [2-8]. Мы получим теорему сложения для гиперсферических гармоник, которая ранее была неизвестна. Эта теорема позволяет, в частности, построить разложение плоской волны  $\mathcal{F}$  по гиперсферическим гармоникам, аналогичное разложению плоской волны в евклидовом пространстве по полиномам Лежандра.

§ 3 непосредственно посвящен изучению плоской волны. Мы покажем, что  $\mathcal{F}$  есть функция двух переменных, которые являются решениями уравнения эйконала во внутреннем пространстве; получим для  $\mathcal{F}$  ряд явных представлений и установим полные асимптотические разложения при малых и больших гиперрадиусах системы.

Из теоремы сложения для гиперсферических гармоник и некоторых представлений для плоской волны вытекают три новые теоремы сложения для полиномов Гегенбауэра, функций Вигнера и сферических функций Бесселя. Они приведены в § 4.

### § 1. Внутреннее пространство и оператор кинетической энергии

Рассматривается система трех частиц в пространстве  $R^3$ . Частицы нумеруются индексом  $\alpha=1,2,3$ . Пусть  $\mathbf{r}_\alpha$ ,  $m_\alpha$  - радиус-вектор и массы частиц. В с.ц.м. конфигурация системы задается набором приведенных векторов Якоби

$$\mathbf{x}_1 = \left( \frac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3} \right)^{1/2} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{y} = \left[ \frac{2(m_2 + m_3)m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right]^{1/2} \left( \mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3} \right). \quad (1)$$

Выражения для векторов Якоби с  $\alpha=2,3$  получаются из (1) циклической перестановкой индексов. Вектора с разными индексами связаны ортогональным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{y}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha\beta} & s_{\alpha\beta} \\ -s_{\alpha\beta} & c_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\beta \\ \mathbf{y}_\beta \end{pmatrix}, \quad c_{\alpha\beta}^2 + s_{\alpha\beta}^2 = 1, \quad (2)$$

коэффициенты которого зависят от масс частиц:

$$c_{\alpha\beta} = - \left[ \frac{m_\alpha m_\beta}{(M - m_\alpha)(M - m_\beta)} \right]^{1/2}, \quad M = \sum_\alpha m_\alpha,$$

$$s_{\alpha\beta} = (-1)^{\beta-\alpha} \text{sign}(\beta-\alpha) (1 - c_{\alpha\beta}^2)^{1/2}.$$

Таким образом, в с.ц.м. конфигурационное пространство системы представляет собой векторное пространство  $Q \simeq R^6 \simeq R^3 \otimes R^3$  с элементами  $X = \{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\}$ .

На пространстве  $Q$  естественным образом определено действие группы вращений

$SO(3)$ :

$$X = \{x_\alpha, y_\alpha\} \longrightarrow gX = \{gx_\alpha, gy_\alpha\}.$$

Эта группа действует свободно на множестве  $Q = Q - D$ , где  $D$  отвечает конфигурациям, в которых все частицы лежат на одной прямой:  $D = \{X: ax_\alpha + by_\alpha = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$ . Поэтому  $Q$  есть пространство  $SO(3)$ -орбит фактор-многообразия  $M = Q/SO(3)$ . Многообразие  $M$  называется внутренним пространством системы трех частиц.

Вращения  $g \in SO(3)$  параметризуются тремя углами Эйлера, которые фиксируют ориентацию в пространстве плоскости, натянутой на вектора Якоби. Точки внутреннего пространства определяют относительную конфигурацию частиц в этой плоскости.

Очевидно, что  $M$  - трехмерное многообразие. Оно топологически эквивалентно полупространству

$$R_+^3 = \{r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3); z_\alpha^1, z_\alpha^2 \in (-\infty, \infty), z_\alpha^3 \in (0, \infty)\}, \quad (3)$$

состоящему из трехмерных векторов с компонентами

$$z_\alpha^1 = \frac{x_\alpha^2 - y_\alpha^2}{\rho}, \quad z_\alpha^2 = \frac{2(x_\alpha y_\alpha)}{\rho}, \quad z_\alpha^3 = \frac{2|x_\alpha y_\alpha|}{\rho}, \quad (4)$$

где  $\rho$  - гиперрадиус системы:

$$\rho = (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{1/2} = \left[ \sum_1 (z_\alpha^1)^2 \right]^{1/2}.$$

Тем самым внутреннее пространство можно снабдить естественной векторной структурой пространства  $R_+^3$  со скалярным произведением

$$(r, \tilde{r})_M = \sum_1 z_\alpha^i \tilde{z}_\alpha^i. \quad (5)$$

Три координаты  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , параметризующие внутреннее пространство, будем называть внутренними координатами. Кроме декартовых координат (4), мы будем использовать еще 3 набора внутренних координат:

1) гиперсферические координаты  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (\rho, \chi_\alpha, \theta_\alpha)$ :

$$r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3) = (\rho \cos \chi_\alpha, \rho \sin \chi_\alpha \cos \theta_\alpha, \rho \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha),$$

$$\chi_\alpha \in (0, \pi), \quad \theta_\alpha \in (0, \pi); \quad (6)$$

2) координаты Dragt'a [4]  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (\rho, \psi, \varphi_\alpha)$ :

$$r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3) = (\rho \cos \psi \cos \varphi_\alpha, \rho \cos \psi \sin \varphi_\alpha, \rho \sin \psi),$$

$$\psi \in (0, \pi/2), \quad \varphi_\alpha \in [0, 2\pi]; \quad (7)$$

3) координаты Якоби  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (x_\alpha, y_\alpha, \theta_\alpha)$ :

$$x = |\mathbf{x}_\alpha| = \rho \cos (\chi_\alpha/2),$$

$$y_\alpha = |y_\alpha| = \rho \sin (\chi_\alpha/2), \quad \cos \theta_\alpha = (\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \quad (8)$$

(углы  $\theta_\alpha$  в (6) и (8) совпадают). Первые 2 набора внутренних координат суть обычные сферические координаты в  $R_+^3$ , в которых полярные углы  $\chi_\alpha$  и  $(\pi/2 - \psi)$  определены относительно разных осей. Связь координат с разными индексами  $\alpha$  получается из преобразования (2) для векторов Якоби:

$$(z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3)^T = g(\omega_{\alpha\beta})(z_\beta^1, z_\beta^2, z_\beta^3)^T. \quad (9)$$

Здесь  $g(\cdot)$  - матрица поворота в  $R_+^3$  вокруг оси  $z_\alpha^3$ :

$$g(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а угол поворота в (9) зависит от масс частиц:

$$\cos \omega_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\beta}^2, \quad \sin \omega_{\alpha\beta} = 2 c_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}.$$

Из соотношения (9) вытекает, что углы  $\varphi_\alpha$  при замене индекса сдвигаются на константу,

$$\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega_{\alpha\beta},$$

а координаты  $\rho$  и  $\psi$  инвариантны относительно индекса  $\alpha$ .

Многообразие  $M$  имеет границу  $\partial M$ . Она состоит из точек с нулевой координатой  $z_\alpha^3$  в (3). В сферических координатах (6) и (7) множество  $\partial M$  параметризуется следующим образом:

$$\partial M = \{(\rho, \psi, \varphi_\alpha) : \psi = 0\} = \{(\rho, \chi_\alpha, \theta_\alpha) : \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha = 0\}. \quad (11)$$

Оно отвечает конфигурациям, в которых все частицы лежат на одной прямой.

Евклидова метрика исходного пространства  $Q$  индуцирует риманову структуру многообразия  $M$  с метрикой и элементом объема [1]

$$dr^2 = \sum_{i,j} b_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad dM(r) = \sigma(r) [\det(b_{ij})]^{1/2} \wedge d\xi^i, \quad (12)$$

где

$$\sigma(r) = \frac{1}{2} \rho^3 \sin \psi = \frac{1}{2} \rho^3 \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha = x_\alpha y_\alpha \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \sin \theta_\alpha,$$

а метрический тензор  $(b_{ij})$  в координатах (6)-(8) дается равенствами

$$\begin{aligned}
 dr^2 &= d\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2(d\chi_\alpha^2 + \sin^2\chi_\alpha d\theta_\alpha^2) = \\
 &= d\rho^2 + \frac{1}{4}\rho^2(d\psi^2 + \cos^2\psi d\varphi_\alpha^2) = \\
 &= dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 + \frac{x_\alpha^2 y_\alpha^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} d\theta_\alpha^2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Опишем теперь оператор кинетической энергии системы трех частиц с нулевым полным орбитальным моментом. Он определяется сужением лапласиана  $-\Delta_\chi$  в исходном пространстве  $Q$  на подпространство состояний, инвариантных относительно действия группы  $SO(3)$ . Такое сужение представляет собой дифференциальный оператор на римановом многообразии  $M$  [1]:

$$H_0 = - \left[ \sigma(r) [\det(b_{ij})]^{1/2} \right]^{-1} \sum_{i,j} \partial_{\xi^i} \sigma [\det(b_{ij})]^{1/2} b_{i,j} \partial_{\xi^j},$$

где  $(b^{ij}) = (b_{ij})^{-1}$ . Используя выражения (13) для метрики внутреннего пространства, нетрудно записать этот оператор в терминах локальных координат (6)–(8). В координатах Якоби получим представление

$$H_0 = -\frac{1}{x_\alpha^2} \partial_{x_\alpha} x_\alpha^2 \partial_{x_\alpha} - \frac{1}{y_\alpha^2} \partial_{y_\alpha} y_\alpha^2 \partial_{y_\alpha} - \left( \frac{1}{x_\alpha^2} + \frac{1}{y_\alpha^2} \right) \frac{1}{\sin \theta_\alpha} \partial_{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \partial_{\theta_\alpha}. \tag{14}$$

В сферических координатах (6) и (7)  $H_0$  имеет вид

$$H_0 = -\rho^{-5} \partial_\rho \rho^5 \partial_\rho + \rho^{-2} \square,$$

где оператор  $\square$  действует по угловым переменным:

$$\begin{aligned}
 \square &= -\frac{4}{\sin^2 \chi_\alpha} \left\{ \partial_{\chi_\alpha} \sin^2 \chi_\alpha \partial_{\chi_\alpha} + \frac{1}{\sin \theta_\alpha} \partial_{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \partial_{\theta_\alpha} \right\} = \\
 &= -\frac{4}{\sin 2\psi} \partial_\psi \sin 2\psi \partial_\psi - \frac{4}{\cos^2 \psi} \partial_{\varphi_\alpha}^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать  $\square$  как оператор в пространстве  $L_2(\hat{M}, d\hat{M})$  функций на единичной полусфере  $\hat{M}$  в векторном пространстве (3),

$$\hat{M} = \{ \hat{r} \in \mathbb{R}_+^3 : (\hat{r}, \hat{r})_{\mathbb{H}} = 1 \}; \quad \hat{r} = r/\rho.$$

Мера  $d\hat{M}$  на  $\hat{M}$  задается угловой частью меры внутреннего пространства (12):

$$d\hat{m}(\hat{r}) = \sin^2 \chi_\alpha \sin \theta_\alpha d\chi_\alpha \wedge d\theta_\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\psi d\psi \wedge d\varphi_\alpha.$$

## § 2. Теорема сложения для собственных функций оператора

В этом разделе исследуется спектральный проектор оператора (15) в  $L_2(\hat{M}, d\hat{M})$ :

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\lambda_n|=\varepsilon} (\sigma-z)^{-1} dz, \quad (16)$$

где  $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$  - дискретный спектр  $\sigma$ . Для ядра этого проектора мы получим явные выражения, которые имеют смысл теоремы сложения для собственных функций оператора  $\sigma$ .

Собственные функции  $\sigma$  были вычислены В. А. Фоком [2] и рассматривались затем в работах [3-8]. Известно, что спектр  $\sigma$  состоит из точек  $\lambda_n = 4n(n+2)$  ( $n=0, 1, \dots, \infty$ ) и является вырожденным. Каждой точке  $\lambda_n$  соответствует слой  $\Delta_n$  из  $n+1$  собственных функций. Последние можно классифицировать собственными числами операторов

$$\hat{\ell}_{\theta_\alpha} = \frac{1}{\sin \theta_\alpha} \partial_{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \partial_{\theta_\alpha} \quad \text{или} \quad \hat{\ell}_{\varphi_\alpha} = -\partial_{\varphi_\alpha}^2,$$

которые коммутируют с  $\sigma$ . Обозначим через  $\{Y_{n\ell}\}_{\ell=0}^n$  и  $\{y_{n\mu}\}_{\mu=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$  общие собственные функции операторов  $\sigma$ ,  $\hat{\ell}_{\theta_\alpha}$  и  $\sigma$ ,  $\hat{\ell}_{\varphi_\alpha}$ :

$$\sigma Y_{n\ell} = 4n(n+2)Y_{n\ell}, \quad \sigma y_{n\mu} = 4n(n+2)y_{n\mu},$$

$$\hat{\ell}_{\theta_\alpha} Y_{n\ell} = \ell(\ell+1)Y_{n\ell}, \quad \hat{\ell}_{\varphi_\alpha} y_{n\mu} = (2\mu)^2 y_{n\mu}.$$

Функции  $Y_{n\ell}$  выражаются через полиномы Гегенбауэра и Лежандра:

$$Y_{n\ell}(\hat{r}) = \left[ \frac{n+1}{\pi} \right]^{1/2} N_{n\ell} (\sin \chi_\alpha)^{\ell} C_{n-\ell}^{\ell+1} (\cos \chi_\alpha) P_\ell (\cos \theta_\alpha), \quad (17)$$

где  $\ell=0, 1, \dots, n$ ,

$$N_{n\ell} = 2^{\ell} \ell! \left[ \frac{(2\ell+1)(n-\ell)!}{(n+\ell+1)!} \right]^{1/2}.$$

Функции  $y_{n\mu}$  суть функции Вигнера ( $\mu=-n/2, -n/2+1, \dots, n/2$ ):

$$y_{n\mu}(\hat{r}) = \left[ \frac{n+1}{\pi} \right]^{1/2} \exp(2i\mu\varphi_\alpha) d_{\mu\mu}^{n/2}(\cos 2\psi). \quad (18)$$

Оба набора  $\{Y_{n\ell}\}$ ,  $\{y_{n\mu}\}$  образуют альтернативные базисы в слое  $\Delta_n$ , ортонормированные в стандартном скалярном произведении пространства  $L_2(\hat{M}, d\hat{M})$ . Они связаны унитарным преобразованием в  $\Delta_n$ , которое вычислено в [8].

Оператор (16) представляет собой проектор на слой  $\Delta_n$  с ядром

$$\mathcal{P}_2(\hat{r}, \hat{r}') = \sum_{\ell=0}^n Y_{n\ell}(\hat{r}) Y_{n\ell}(\hat{r}') = \quad (19a)$$

$$= \sum_{\mu=-n/2}^{n/2} y_{n\mu}(\hat{r}) y_{n\mu}(\hat{r}'). \quad (19b)$$

В представлении (19a) ядро  $\mathcal{P}_n$  зависит от четырех углов  $(\chi_\alpha, \theta_\alpha, \chi'_\alpha, \theta'_\alpha)$ , а в (19b) - от трех переменных  $(\psi, \psi', \varphi_\alpha - \varphi'_\alpha)$ . Мы покажем, что в действительности это ядро является функцией только двух углов  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ , которые определяются в терминах скалярного произведения (5):

$$\cos \Omega_\pm = (\hat{r}, \hat{r}'), \quad \cos \Omega_- = -(g(\pi)\hat{r}, \hat{r}'), \quad \Omega_\pm \in [0, \pi], \quad (20)$$

где  $g(\pi)$  - преобразование поворота (10) на угол  $\pi$ . В локальных координатах (6), (7) на полусфере  $\hat{M}$  эти углы задаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos \Omega_\pm &= \cos \chi_\alpha \cos \chi'_\alpha + \sin \chi_\alpha \sin \chi'_\alpha \cos (\theta_\alpha \mp \theta'_\alpha) = \\ &= \pm \sin \psi \sin \psi' + \cos \psi \cos \psi' \cos (\varphi_\alpha - \varphi'_\alpha). \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что правые части последних равенств инвариантны относительно индекса  $\alpha$ . Действительно, согласно (9), замена индекса  $\alpha \rightarrow \beta$  осуществляется действием абелевой группы вращений (10),  $\hat{r} \rightarrow g(\omega_{\alpha\beta})\hat{r}$ . Скалярные произведения (20) при этом не меняются.

В терминах углов  $\Omega_\pm$  для ядра  $\mathcal{P}_n$  справедливы следующие два эквивалентных представления:

1) интегральное представление:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \frac{n+1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi C_n^1(\cos \tau(\xi)), \quad (22)$$

$$\cos \tau(\xi) = \frac{1}{2}(\cos \Omega_+ + \cos \Omega_-) + \frac{1}{2}(\cos \Omega_+ - \cos \Omega_-) \cos \xi;$$

2) разложение по однородным полиномам:

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \sum_{m=0}^n a_n(m) Q_m\left(\sin \frac{\Omega_+}{2}, \sin \frac{\Omega_-}{2}\right) = \quad (23a)$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^n a_n(m) Q_m\left(\cos \frac{\Omega_+}{2}, \cos \frac{\Omega_-}{2}\right), \quad (23b)$$

где

$$a_n(m) = \frac{(n+1)^2 (-n)_m (n+2)_m}{\pi (3/2)_m m!}, \quad (24)$$

$a_n(m)$  - символ Похгаммера;  $Q_m$  - однородные полиномы степени  $2m$ :  $Q_m(\lambda a, \lambda b) =$



$= \lambda^{2m} Q_m(a, b)$ . Они выражаются через полиномы Лежандра:

$$Q_m(a, b) = (ab)^m P_m\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right). \quad (25)$$

Соотношения (22) и (23) представляют собой различные формы записи теоремы сложения для собственных функций оператора  $\square$ . Докажем сперва формулу (22). Подставим в представление (19a) явные выражения (17) для функций  $Y_{n\ell}$  и заменим возникающее при этом произведение полиномов Лежандра по формуле умножения [9]

$$P_\ell(\cos \theta_\alpha) P_\ell(\cos \theta'_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi P_\ell(\cos \theta_\alpha \cos \theta'_\alpha + \sin \theta_\alpha \sin \theta'_\alpha \cos \xi). \quad (26)$$

Получим представление, содержащее сумму произведений двух полиномов Гегенбауэра и одного полинома Лежандра. Эта сумма вычисляется с помощью теоремы сложения для полиномов Гегенбауэра [9, 10]:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n N_{n\ell}^2 (\sin \chi \sin \chi')^\ell C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi) C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi') P_\ell(\cos \varphi) = \\ = C_n^1(\cos \chi \cos \chi' + \sin \chi \sin \chi' \cos \varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

В результате приходим к следующему выражению для ядра  $\mathcal{P}_n$ :

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \frac{n+1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi C_n^1(\cos \tau), \quad (28)$$

$$\cos \tau = \cos \chi_\alpha \cos \chi'_\alpha + \sin \chi_\alpha \sin \chi'_\alpha (\cos \theta_\alpha \cos \theta'_\alpha + \sin \theta_\alpha \sin \theta'_\alpha \cos \xi).$$

Нетрудно проверить, что аргументы подынтегральных функций в (28) и (22) совпадают, так что представление (22) доказано.

Разложения (23) вытекают из интегрального представления (22). Воспользуемся известным выражением для полиномов Гегенбауэра в терминах гипергеометрической функции  ${}_2F_1$  [10]:

$$C_n^1(x) = (\pm 1)^n (n+1) {}_2F_1(-n, n+2; 3/2; \frac{1+x}{2}). \quad (29)$$

Здесь правая часть представляет собой полином степени  $n$  с коэффициентами, пропорциональными  $a_n(m)$  из (24). Члены этого полинома при подстановке в (22) порождают интегралы

$$Q_m(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos \xi \right]^m d\xi, \quad (30)$$

где параметры  $a, b$  зависят от углов  $\Omega_\pm$  и от выбора знака  $(\pm)$  в (29). Для верхних

знаков  $a=\sin(\Omega_+/2)$ ,  $b=\sin(\Omega_-/2)$ , для нижних  $a=\cos(\Omega_+/2)$ ,  $b=\cos(\Omega_-/2)$ . Заменой  $a^2+b^2=2abz$ ,  $a^2-b^2=2ab\sqrt{z^2-1}$  выражение (30) приводится к виду известного интегрального представления для полинома Лежандра  $P_m(z)$ . В результате придем к равенству (23).

В ряде частных случаев теорема сложения для собственных функций оператора  $\square$  заметно упрощается:

1)  $\hat{r}' \in \partial M$  ( $\partial M$  - граница (11) внутреннего пространства). В этом случае  $\psi'=0$ , так что углы  $\Omega_{\pm}$  совпадают (см. (21)):

$$\cos \Omega_+ = \cos \Omega_- = \cos \Omega = \cos \psi \cos(\varphi_{\alpha} - \varphi'_{\alpha}). \quad (31)$$

Поэтому представление (22) принимает вид

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}')|_{\hat{r}' \in \partial M} = \frac{n+1}{\pi} C_n^1(\cos \Omega). \quad (32)$$

2)  $\hat{r}' = \hat{r}$ . При таких аргументах  $\Omega_- = 2\psi$ ,  $\Omega_+ = 0$ . В представление (23а) для ядра  $\mathcal{P}_n$  входят полиномы  $Q_m(0, \sin \psi)$ , которые, согласно (25), определяются коэффициентом полиномов Лежандра при старшей степени:

$$Q_m(0, \sin \psi) = (\sin \psi)^{2m} Q_m(0, 1) = (\sin \psi)^{2m} 4^{-m} \binom{2m}{m}. \quad (33)$$

При подстановке этого равенства в (23а) возникает сумма, которую можно записать в терминах гипергеометрической функции  ${}_3F_2$ :

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}) = \frac{(n+1)^2}{\pi} {}_3F_2(-n, n+2, 1/2; 1, 3/2; \sin^2 \psi). \quad (34)$$

3)  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}$  ( $g(\omega)$  определено в (10)). В такой ситуации  $\Omega_+ = \pi - 2\psi$ ,  $\Omega_- = \pi$ . Поэтому представление (23б) для ядра  $\mathcal{P}_n$  опять содержит полиномы  $Q_m(0, \sin \psi)$ . Соответствующая теорема сложения с точностью до знака совпадает с (34):

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, g(\pi)\hat{r}) = \frac{(-1)^n}{\pi} {}_3F_2(-n, n+2, 1/2; 1, 3/2; \sin^2 \psi). \quad (35)$$

4)  $\hat{r}' = \hat{\ell}_3 \equiv (0, 0, 1)$ . Вектору  $\hat{\ell}_3$  отвечает угол  $\psi' = \pi/2$ . Рассмотрим определение (19б) ядра  $\mathcal{P}_n$  в терминах функций Вигнера (18). Поскольку  $d_{\mu\mu}^{n/2}(-1) = 0$  при  $\mu \neq 0$ , а  $d_{00}^k(-1) = P_k(0)$ , получим равенства

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{\ell}_3) = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ \frac{n+1}{\pi} (-1)^k P_k(\cos 2\psi), & n = 2k. \end{cases}$$

Частный случай (32) теоремы сложения был указан ранее в [8]. Отметим, что в работе [11] по этому поводу содержится неточность. Приведенная в ней формула (19), эквивалентная (32), также справедлива только при  $\hat{r}' \in \partial M$  и неверна для произвольных

аргументов собственных функций оператора  $\square$ .

Из теоремы сложения (22), (23) вытекает очевидное свойство инвариантности ядра  $\mathcal{P}_n$  - оно не меняется при преобразованиях аргументов, сохраняющих углы  $\Omega_{\pm}$ . Используя это обстоятельство, можно получить еще ряд выражений для  $\mathcal{P}_n$  в терминах углов

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\Omega_- + \Omega_+), \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\Omega_- - \Omega_+).$$

Возьмем, например, в качестве новых аргументов ядра вектора

$$\hat{q} = (\cos \tau_+, 0, \sin \tau_+), \quad \hat{q}' = (\cos \tau_-, 0, \sin \tau_-). \quad (36)$$

Легко проверить, что углы  $\Omega_{\pm}$  для пар векторов  $\{\hat{r}, \hat{r}'\}$  и  $\{\hat{q}, \hat{q}'\}$  совпадают, поэтому  $\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \mathcal{P}_n(\hat{q}, \hat{q}')$ . В гиперсферических координатах (6) векторам  $\hat{q}$  и  $\hat{q}'$  соответствуют углы  $\chi_{\alpha} = \tau_+$ ,  $\chi'_{\alpha} = \tau_-$ ,  $\theta_{\alpha} = \theta'_{\alpha} = 0$ . Тем самым ядро  $\mathcal{P}_n(\hat{q}, \hat{q}')$  можно записать в виде разложения (19a) с соответствующей заменой аргументов. Используя в этом разложении равенства

$$P_{m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}(0) = (-1)^m 4^{-m} \binom{2m}{m},$$

придем к представлению

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') &= \frac{n+1}{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} N_{2m}^2 4^{-2m} \binom{2m}{m}^2 (\sin \tau_+ \sin \tau_-)^{2m} \times \\ &\times C_{n-2m}^{2m+1}(\cos \tau_+) C_{n-2m}^{2m+1}(\cos \tau_-). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь выражение для  $\mathcal{P}_n(\hat{q}, \hat{q}')$  в координатах Dragt'a (196), (18). Для векторов (36) эти координаты равны  $\psi = \tau_+$ ,  $\psi' = \tau_-$ ,  $\varphi_{\alpha} = \varphi'_{\alpha} = 0$ . Поэтому из (19б) вытекает равенство

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \frac{n+1}{\pi} \sum_{\mu=-n/2}^{n/2} d_{\mu\mu}^{n/2}(\cos 2\tau_+) d_{\mu\mu}^{n/2}(\cos 2\tau_-). \quad (37)$$

Введем далее еще одну пару векторов

$$\hat{q}_1 = (0, \cos \tau_+, \sin \tau_+), \quad \hat{q}'_1 = (0, \cos \tau_-, \sin \tau_-). \quad (38)$$

Преобразование  $\{\hat{r}, \hat{r}'\} \rightarrow \{\hat{q}_1, \hat{q}'_1\}$  также сохраняет углы  $\Omega_{\pm}$ . В гиперсферических координатах векторам (38) соответствуют углы  $\chi_{\alpha} = \chi'_{\alpha} = \pi/2$ ,  $\theta_{\alpha} = \tau_+$ ,  $\theta'_{\alpha} = \tau_-$ . Записав ядро  $\mathcal{P}_n(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$  через эти углы в виде (19a) и используя соотношения

$$C_{2m+1}^{\ell+1}(0) = 0, \quad C_{2m}^{\ell+1}(0) = (-1)^m \binom{\ell+m}{m},$$

получим выражение

$$\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}') = \frac{n+1}{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} N_n^2 N_{n-2m}^2 \binom{n-m}{m}^2 P_{n-2m}(\cos \tau_+) \times P_{n-2m}(\cos \tau_-).$$

Представление (196) для ядра  $\mathcal{P}_n(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$  приводит снова к равенству (37).

### § 3. Плоская волна

Мы называем плоской волной для системы трех частиц с нулевым полным орбитальным моментом ядро унитарного интегрального преобразования  $\mathcal{F}$  в  $L_2(M, dM)$ ,

$$(\mathcal{F}\Psi)(r) = \int_M \mathcal{F}(r, q) \Psi(q) dM(q),$$

которое диагонализует оператор  $H_0$ :

$$(\mathcal{F}^* H_0 \mathcal{F}) \Psi(q) = q^2 \Psi(q), \quad q^2 \equiv (q, q)_M.$$

По определению функция  $\mathcal{F}$  удовлетворяет свободному уравнению Шредингера на внутреннем пространстве,

$$(H_0 - q^2) \mathcal{F}(\cdot, q) = 0.$$

Это уравнение описывает систему трех не взаимодействующих частиц с нулевым полным орбитальным моментом (длина вектора  $q \in M$  определяет полную энергию системы, а направление  $\hat{q}$  задает распределение энергии по частицам).

В этом разделе мы получим ряд явных представлений для плоской волны  $\mathcal{F}$  и исследуем ее асимптотические свойства.

Одно из выражений для функции  $\mathcal{F}$  нетрудно угадать, исходя из представления оператора  $H_0$  в координатах Якоби (14). Угловая часть  $(\sin \theta_\alpha)^{-1} \partial_{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \partial_{\theta_\alpha}$  этого оператора диагонализуется в базисе полиномов Лежандра  $P_\ell(\cos \theta_\alpha)$ . При этом  $H_0$  распадается на сумму одномерных операторов Шредингера на полуоси

$$h_0^{(\ell)} = -x^{-2} \partial_x x^2 \partial_x + \ell(\ell+1)x^{-2}.$$

Хорошо известно, что диагональное представление для таких операторов задается сферическими функциями Бесселя  $j_\ell(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{\ell+1/2}(z)$ . Поэтому ядро  $\mathcal{F}$  должно иметь вид линейной комбинации

$$\mathcal{F}(r, r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell j_\ell(x_\alpha x'_\alpha) j_\ell(y_\alpha y'_\alpha) P_\ell(\cos \theta_\alpha) P_\ell(\cos \theta'_\alpha). \quad (39)$$

Коэффициенты  $c_\ell$  определяются условием унитарности преобразования (39) в  $L_2(M, dM)$ , которое фиксирует их модуль:  $|c_\ell| = (2\ell+1)/\pi$ . Аргументы чисел  $c_\ell$  могут быть произвольны (разным  $\arg c_\ell$  соответствуют унитарно эквивалентные ядра  $\mathcal{F}$ ). Мы выберем их следующим образом:  $c_\ell = (-1)^\ell |c_\ell|$ . Тем самым плоская волна равна

$$\mathcal{F}(r, r') = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (2\ell+1) j_\ell(x_\alpha x'_\alpha) j_\ell(y_\alpha y'_\alpha) \times P_\ell(\cos \theta_\alpha) P_\ell(\cos \theta'_\alpha). \quad (40)$$

В этом представлении функция  $\mathcal{F}$  зависит от четырех аргументов  $(x_\alpha x'_\alpha, y_\alpha y'_\alpha, \cos \theta_\alpha, \cos \theta'_\alpha)$ . Мы покажем, что на самом деле плоская волна является функцией только двух переменных  $Z_+$  и  $Z_-$ , которые выражаются через углы  $\Omega_\pm$  из (20):

$$Z_\pm(r, r') = \lambda \cos \left( \frac{\Omega_\pm}{2} \right), \quad \lambda = \rho \rho'. \tag{41}$$

Это обстоятельство отражает следующее интегральное представление для  $\mathcal{F}$ , эквивалентное определению (40):

$$\mathcal{F}(r, r') = \frac{4}{\pi} \int_{Z_-}^{Z_+} \frac{\sin x \, dx}{(z^2 - x^2)^{1/2} (x^2 - z_-^2)^{1/2}}. \tag{42}$$

Параметры  $Z_\pm$  будем называть эйконалами плоской волны  $\mathcal{F}$ .

Прежде чем доказывать равенство (42), поясним, почему мы называем функции  $Z_\pm$  эйконалами. Дело в том, что они удовлетворяют уравнению эйконала на внутреннем пространстве  $M$ :

$$(dZ_\pm, dZ_\pm)_{T_r M}^* = (\rho')^2. \tag{43}$$

Здесь  $(\cdot, \cdot)_{T_r M}^*$  - скалярное произведение в кокасательном пространстве к многообразию  $M$  в точке  $r$ , порожденное метрикой (12), а  $dZ_\pm$  - 1-форма градиента функций  $Z_\pm(r, r')$  по первому аргументу.

Проверим равенство (43). Напомним, что, согласно (20), углы  $\Omega_+$  и  $\pi - \Omega_-$  в определении эйконалов (41) суть полярные углы вектора  $r$  относительно осей  $\hat{q}_+ = \hat{r}'$  и  $\hat{q}_- = g(\pi) \hat{r}'$ . Обозначим  $\Phi_\pm$  дополнительные к  $\Omega_\pm$  сферические координаты вектора  $r$  и введем на  $M$  локальные координаты  $(\xi_\pm^1, \xi_\pm^2, \xi_\pm^3) = \left( \frac{Z_\pm}{\rho'}, u_\pm \right)$ ,  $u_\pm = \rho \sin \left( \frac{\Omega_\pm}{2} \right)$ .  $\Phi_\pm$ . Вычислим метрику  $M$  в данных координатах. Заметим, что углы  $\Omega_\pm$ ,  $\Phi_\pm$  связаны с гиперсферическими углами  $\chi_\alpha, \theta_\alpha$  из (6) преобразованием поворота в  $M$ , переводящим ось  $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$  в  $\hat{q}_\pm$ . Очевидно, что метрика (13) инвариантна относительно вращений в  $M$ . Поэтому в координатах  $\xi_\pm^i$  она имеет тот же вид, что и в координатах Якоби (с заменой  $x_\alpha \rightarrow \xi_\pm^1, y_\alpha \rightarrow \xi_\pm^2, \theta_\alpha \rightarrow \Phi_\pm$ ):

$$dr^2 = (\rho')^{-2} dZ_\pm^2 + du_\pm^2 + \frac{z_\pm^2 u_\pm^2}{z_\pm^2 + \rho'^2 u_\pm^2} d\Phi_\pm^2.$$

Записав на основе этого представления градиенты в  $dZ_\pm$  в координатах  $\xi_\pm^i$ , получим равенство (43).

Докажем теперь интегральное представление (42). Заменяем в сумме (40) произведение полиномов Лежандра по формуле умножения (26). Возникающий при этом ряд суммируется с помощью теоремы сложения для функций Бесселя [10]:

$$(xy)^{-\nu} \Gamma(\nu) \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + \nu) C_n^\nu(\cos \varphi) J_{\ell + \nu}(x) J_{\ell + \nu}(y) =$$

$$= (2Z)^{-\nu} J_\nu(Z), \quad Z = (x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi)^{1/2}, \quad (44)$$

в которой нужно положить  $\nu = 1/2$  ( $C_n^{1/2}(\cos \varphi) = P_\ell(\cos \varphi) = (-1)^\ell P_\ell(-\cos \varphi)$ ). В результате получим равенство

$$\mathcal{F}(r, r') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{\sin Z(\xi)}{Z(\xi)}, \quad (45)$$

где

$$Z(\xi) = [(x_\alpha x'_\alpha)^2 + (y_\alpha y'_\alpha)^2 + 2x_\alpha x'_\alpha y_\alpha y'_\alpha \times (\cos \theta_\alpha \cos \theta'_\alpha + \sin \theta_\alpha \sin \theta'_\alpha \cos \xi)]^{1/2}.$$

Подставив в это выражение формулы (8) для координат Якоби, его можно привести к виду

$$Z(\xi) = \lambda \cos(\tau/2),$$

где  $\lambda = \rho\rho'$ ,

$$\begin{aligned} \cos \tau(\xi) &= \cos \chi_\alpha \cos \chi'_\alpha + \sin \chi_\alpha \sin \chi'_\alpha (\cos \theta_\alpha \cos \theta'_\alpha + \sin \theta_\alpha \sin \theta'_\alpha \times \\ &\times \cos \xi) = \frac{1}{2} (\cos \Omega_+ + \cos \Omega_-) + \frac{1}{2} (\cos \Omega_+ - \cos \Omega_-) \cos \xi. \end{aligned}$$

Переходя в (45) к интегрированию по новой переменной  $x = Z(\xi)$ , приходим к представлению (42).

Отметим, что интеграл (42) не выражается в виде конечной комбинации известных специальных функций. Тем самым плоская волна  $\mathcal{F}$  представляет собой фактически новую специальную функцию двух переменных. Мы получим 3 формулы, описывающие наиболее важные свойства этой функции.

1) Разложение по собственным функциям оператора  $\square$ :

$$\mathcal{F}(r, r') = \frac{8}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+2}(\lambda) \mathcal{P}_n(r, r'), \quad (46)$$

где  $J_k$  - функции Бесселя, а  $\mathcal{P}_n$  - ядро спектрального проектора (19) оператора  $\square$ . Это представление является аналогом известного разложения плоской волны в евклидовом пространстве по сферическим функциям.

2) Разложение в ряд по степеням  $Z_\pm$ :

$$\mathcal{F}(r, r') = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} Q_n(Z_+, Z_-). \quad (47)$$

Здесь  $Q_n$  - однородные полиномы (25) степени  $2n$ . Этот ряд сходится равномерно в любой компактной области пространства  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(Z_+, Z_-)\}$  и определяет аналитическое продолжение плоской волны на комплексные значения эйконала. В то же время он задает асимптотическое разложение  $\mathcal{F}$  при малых гиперрадиусах ( $\lambda = \rho\rho' \rightarrow 0$ ), поскольку

$$Q_n(Z_+, Z_-) = \lambda^{2n} Q_n\left(\cos \frac{\Omega_+}{2}, \cos \frac{\Omega_-}{2}\right).$$

3) Асимптотическое разложение при больших гиперрадиусах ( $\lambda \rightarrow \infty$ ):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pm \sim_{\lambda \rightarrow \infty} & \frac{\sin(Z_\pm \mp \pi/4)}{[Z_\pm(Z_\pm^2 - Z_-^2)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n}^{(\pm)} Z_\pm^{-2n} \mp \\ & \mp \frac{\cos(Z_\pm \mp \pi/4)}{[Z_\pm(Z_\pm^2 - Z_-^2)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n+1}^{(\pm)} Z_\pm^{-2n-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь коэффициенты  $A_k^{(\pm)}$  зависят от углов  $\Omega_\pm$  и выражаются через полиномы Лежандра:

$$A_k^{(\pm)} = (2/\pi)^{3/2} (\pm 1/2)^k \Gamma(k+1/2) \sum_{n=0}^k (2\zeta_\pm)^n P_n(\zeta_\pm) \times \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{(k-n)!},$$

где

$$\zeta_+ = \frac{\cos(\Omega_+/2)}{(\cos^2 \frac{\Omega_+}{2} - \cos^2 \frac{\Omega_-}{2})^{1/2}}, \quad \zeta_- = \frac{i \cos(\Omega_-/2)}{(\cos^2 \frac{\Omega_+}{2} - \cos^2 \frac{\Omega_-}{2})^{1/2}}.$$

Отметим, что разложение (48) для функции  $\mathcal{F}_-$  теряет смысл в направлении  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}'$ , где  $Z_- = 0$ . В этом случае

$$\mathcal{F}_- \Big|_{\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}'} = \frac{2}{Z_+} + O(Z_+^{-N}) \quad \forall N \geq 1, \quad (49)$$

а для  $\mathcal{F}_+$  по-прежнему справедливо представление (49).

Асимптотика (48) также неверна, если один из векторов  $r, r'$  лежит на границе (11) внутреннего пространства ( $Z_+ = Z_-$ ). В такой ситуации плоская волна выражается в элементарных функциях. При  $r' \in \partial M$  углы  $\Omega_\pm$  совпадают (см. (21)), поэтому в (45) подынтегральная функция не зависит от  $\xi$ . В результате получим явное выражение

$$\mathcal{F}(r, r') \Big|_{r' \in \partial M} = \frac{\sin(\lambda \cos \frac{\Omega}{2})}{\pi \lambda \cos \frac{\Omega}{2}}, \quad (50)$$

где  $\cos \Omega$  определен в (31).

В упомянутом выше случае  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}$  также можно получить довольно простое выражение для  $\mathcal{F}$ . Поскольку  $Z_- = 0$  при  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}$ , то в представлении (47) полиномы  $Q_n$  равны

$$Q_n(Z_+, 0) = Z_+^{2n} Q_n(0, 1),$$

где числа  $Q_n(0, 1)$  определены в (33). Поэтому разложение (47) сводится к степенному ряду

$$\mathcal{F} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Z_+^2/4)^n}{(2n+1)(n!)^2},$$

который можно записать в терминах гипергеометрической функции  ${}_1F_2$ :

$$\mathcal{F}(r, r') \Big|_{\hat{r}' = g(\pi) \hat{r}} = {}_1F_2(1/2; 1, 3/2; -Z_+^2/4). \quad (51)$$

Приступим к доказательству представлений (46)–(48). Докажем сперва формулу (46). Выше мы получили для  $\mathcal{F}$  интегральное представление (45). Разложим в нем функцию  $\sin Z = \sin(\lambda \cos \tau/2)$  в ряд по полиномам Гегенбауэра, используя следующую теорему сложения для функций Бесселя [10]:

$$\sin(\lambda \cos \varphi) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n+1) J_{\nu+2n+1}(\lambda) C_{2n+1}^\nu(\cos \varphi),$$

в которой возьмем  $\nu=1$ ,  $\varphi=\tau/2$ . В результате придем к равенству

$$\mathcal{F}(r, r') = \frac{8}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+2}(\lambda) I_n(\hat{r}, \hat{r}'), \quad (52)$$

где

$$I_n(\hat{r}, \hat{r}') = \frac{n+1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{C_{2n+1}^1(\cos \frac{\tau}{2})}{\cos \frac{\tau}{2}}.$$

Этот интеграл совпадает с выражением (22) для ядра спектрального проектора  $\mathcal{P}_n$ , так как полиномы Гегенбауэра удовлетворяют тождеству

$$\frac{C_{2n+1}^1(\cos \frac{\tau}{2})}{\cos \frac{\tau}{2}} = \frac{\sin(2n+2)\frac{\tau}{2}}{\cos \frac{\tau}{2} \sin \frac{\tau}{2}} = 2 C_n^1(\cos \tau).$$

Следовательно, ряд (52) совпадает с (46).

Получим теперь разложение (47). Рассмотрим интегральное представление (42). Разложим в нем  $\sin x$  в ряд Тейлора,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

При этом интеграл (42) распадается на сумму интегралов

$$\mathcal{Q}_n(Z_+, Z_-) = \frac{4}{\pi} \int_{Z_-}^{Z_+} \frac{x^{2n+1} dx}{(Z_+^2 - x^2)^{1/2} (x^2 - Z_-^2)^{1/2}},$$

которые приводятся к виду (30) подстановкой

$$x^2 = \frac{1}{2} (Z_+^2 + Z_-^2) - \frac{1}{2} (Z_+^2 - Z_-^2) \cos \xi,$$



так что  $\tilde{Q}(a, b) = 2Q_n(a, b)$ . В результате приходим к представлению (47).

Докажем, наконец, асимптотическое разложение (48). Рассмотрим опять интегральное представление (42). Пусть  $Z_{\pm} = \lambda a_{\pm}$ , где  $\lambda \rightarrow +\infty$ , а параметры  $a_{\pm}$  ограничены,  $0 < \varepsilon \leq a_{\pm} < \infty$  (в нашем случае  $a_{\pm} = \cos(\Omega_{\pm}/2)$ ). Сделаем в (42) масштабное преобразование  $x = \lambda u$ :

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\pi\lambda} \int_{a_-}^{a_+} \frac{\sin \lambda u \, du}{(a_+^2 - u^2)^{1/2} (u^2 - a_-^2)^{1/2}}. \quad (53)$$

Асимптотика этого интеграла при  $\lambda \rightarrow \infty$  определяется вкладом граничных точек  $u = a_{\pm}$ , в которых подынтегральная функция имеет корневые особенности. Чтобы разделить вклад этих точек, введем соответствующее разбиение единицы  $\varphi_+(u) + \varphi_-(u) = 1$  отрезка  $(a_-, a_+)$  ( $\varphi_+(a_+) = 1$ ,  $\varphi_+(a_-) = 0$ ) и представим интеграл (53) в виде суммы

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-,$$

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{4}{\pi\lambda} \int_{a_-}^{a_+} \frac{\varphi_{\pm}(u) \sin \lambda u \, du}{(a_+^2 - u^2)^{1/2} (u^2 - a_-^2)^{1/2}}.$$

Выделим далее явно корневые особенности подынтегральной функции путем сдвига  $u \rightarrow a_{\pm} \mp t$ :

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{4}{\pi\lambda} \int_0^{\delta} t^{-1/2} \sin(\lambda a_{\pm} \mp t) f_{\pm}(t) \tilde{\varphi}_{\pm}(t) dt, \quad (54)$$

где  $\delta = a_+ - a_-$ ,  $\tilde{\varphi}_{\pm}$  порождаются разбиением единицы  $\varphi_{\pm}$ , а функции  $f_{\pm}$  равны

$$f_{\pm}(t) = [2a_{\pm} \mp t]^{-1/2} [\sigma^2 - 2a_{\pm} t \pm t^2]^{-1/2}, \quad (55)$$

$$\sigma = \sqrt{a_+^2 - a_-^2}.$$

Теперь к интегралам (54) можно применить известную лемму Эрдейи [12], которая дает асимптотическое разложение функций  $\mathcal{F}_{\pm}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\mathcal{F}_{\pm} \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\lambda a_{\pm} - \pi/4 - \pi k/2) \lambda^{-k-1/2} \times \Gamma(k+1/2) f_k^{(\pm)}, \quad (56)$$

где  $f_k^{(\pm)}$  - коэффициенты ряда Тейлора для функций  $f_{\pm}(t)$  при  $t=0$ ,

$$f_{\pm}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(\pm)} t^k.$$

Таким образом, чтобы завершить построение асимптотики плоской волны, нам осталось вычислить коэффициенты  $f_k^{(\pm)}$ . С этой целью разложим в ряд Тейлора оба

сомножителя в (55):

$$[2a_{\pm} \mp t]^{-1/2} = (2a_{\pm})^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \left(\pm \frac{t}{2a_{\pm}}\right)^s,$$

$$[\sigma^2 - 2a_{\pm} \pm t^2]^{-1/2} = \sigma^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\zeta_{\pm}) \left(\pm \frac{t\zeta_{\pm}}{a_{\pm}}\right)^{\ell}, \quad (57)$$

где  $\zeta_{+} = a_{+}/\sigma$ ,  $\zeta_{-} = ia_{-}/\sigma$  (последнее разложение представляет собой производящее соотношение для полиномов Лежандра [10]). Перемножим ряды (57) и выразим двойные факториалы через гамма-функции. В результате получим явные выражения для коэффициентов  $f_k^{(\pm)}$ :

$$f_k^{(\pm)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a_{\pm}}} (\pm 2a_{\pm})^{-k} \sum_{n=0}^k (2\zeta_{\pm})^n P_n(\zeta_{\pm}) \times \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{(k-n)!}.$$

Подставим эту формулу в (56) и вспомним определение параметров  $\sigma$  и  $a_{\pm}$ :  $\lambda a_{\pm} = Z_{\pm}$ ,  $\lambda\sigma = \sqrt{Z_{+}^2 - Z_{-}^2}$ . После тривиальных преобразований приходим к представлению (48).

Случай  $a_{-} = 0$  требует специального рассмотрения. При  $a_{-} = 0$  подынтегральная функция в (53) не имеет сингулярности на нижнем пределе:

$$\mathcal{F}_{-} = \frac{4}{\pi\lambda} \int_0^{\delta} \varphi_{-}(u) \frac{\sin \lambda u}{u} (a_{+}^2 - u^2)^{-1/2} du.$$

Разложим  $(a_{+}^2 - u^2)^{-1/2}$  в ряд Тейлора при  $u=0$ . Первый член этого ряда порождает интеграл

$$\int_0^{\delta} \varphi_{-}(u) \frac{\sin \lambda u}{u} du \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-N}) \quad \forall N \geq 1,$$

а вклад всех остальных членов разложения убывает быстрее любой степени  $\lambda^{-N}$  (в этом легко убедиться, интегрируя по частям). Поэтому в данном случае асимптотика  $\mathcal{F}_{-}$  имеет вид (49).

#### § 4. Новые теоремы сложения для специальных функций

В предыдущих разделах мы получили ряд явных выражений для функций  $\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}')$  и  $\mathcal{F}(r, r')$  при определенных значениях аргументов. Эти соотношения можно трактовать как теоремы сложения для специальных функций, входящих в определения ядер  $\mathcal{P}_n$  и  $\mathcal{F}$ . Формулы (32) и (50) приводят к хорошо известным теоремам сложения. Так, записав в равенстве (32) ядро в виде (19a) и учитывая, что при  $\hat{r}' \in \partial M$   $\theta'_{\alpha} = 0$  или  $\pi$ , получим теорему сложения для полиномов Гегенбауэра (27). С другой стороны, ядро  $\mathcal{P}_n$  определяется также через функции Вигнера (19б), причем  $\psi' = 0$  при  $\hat{r}' \in \partial M$ . Поскольку

$d_{\mu\mu}^{n/2}(1)=1$ , равенство (32) дает известную формулу [9] для характеров неприводимых представлений группы  $SU(2)$ :

$$\sum_{\mu=-j}^j \exp(2i\mu\varphi) d_{\mu\mu}^j(\cos 2\psi) = C_n^1(\cos \psi \cos \varphi); \quad j=0, 1/2, 1, \dots$$

Соотношения (50) и (40) для плоской волны эквивалентны теореме сложения для функций Бесселя (44) с  $\nu=1/2$ .

Выражения (34) для ядер  $\mathcal{P}_n$  и (51) для плоской волны  $\mathcal{F}$  приводят к новым теоремам сложения, которые отсутствуют в справочной литературе.

Рассмотрим формулу (34) для ядра  $\mathcal{P}_n(\hat{r}, \hat{r}')$ . Запишем левую часть (34) в виде (19a). Поскольку по определению (6), (7) углы  $\chi_\alpha$ ,  $\theta_\alpha$  и  $\psi$  связаны равенством  $\sin \psi = \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha$ , получим новую теорему сложения для полиномов Гегенбауэра:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} N_{n\ell}^2 (\sin \chi)^{2\ell} [C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi)]^2 P_\ell^2(\cos \theta) = \\ = (n+1) {}_3F_2(-n, n+2, 1/2; 1, 3/2; \sin^2 \chi \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (58)$$

Используя в (34) другое определение (19б) ядра  $\mathcal{P}_n$ , придем к новой теореме сложения для функций Вигнера:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=-j}^j [d_{\mu\mu}^j(\cos 2\psi)]^2 = (2j+1) {}_3F_2(-2j, 2j+2, 1/2; 1, 3/2; \sin^2 \psi), \\ j = 0, 1/2, 1, \dots \end{aligned} \quad (59)$$

Выражение (35) для ядра  $\mathcal{P}_n(\hat{r}, g(\pi)\hat{r}')$  снова приводит к теоремам сложения (58) и (59), так как сферические координаты векторов  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}$  и  $\hat{r}$  связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha = \pi - \chi_\alpha, \quad \theta'_\alpha = \pi - \theta_\alpha, \\ \psi' = \psi, \quad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \pi. \end{aligned} \quad (60)$$

Рассмотрим теперь формулу (51) для функции  $\mathcal{F}(r, r')$  при  $\hat{r}' = g(\pi)\hat{r}$ . Запишем левую часть (51) в виде суммы (40). Поскольку при таких аргументах плоской волны в силу (60) выполняются равенства  $x_\alpha x'_\alpha = y_\alpha y'_\alpha = \frac{1}{2} \lambda \sin \chi_\alpha$ , получим новую теорему сложения для функций Бесселя:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) j_\ell^2(z) P_\ell^2(\cos \theta) = 2\pi {}_1F_2(1/2; 1, 3/2; -z^2 \sin^2 \theta).$$

Комбинация представлений (46), (51) и (35) дает еще одну теорему сложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 J_{2n+2}(x) {}_3F_2(-n, n+2, 1/2; 1, 3/2; y) =$$

$$\frac{\pi x^2}{4} {}_1F_2\left(1/2; 1, 3/2; -\frac{x^2 y}{4}\right).$$

Это равенство является частным случаем известного соотношения для рядов, содержащих функции Бесселя  $J_{2n+\nu}(x)$  и гипергеометрические функции  ${}_pF_q(-n, n+\nu, (a_p); (b_q); y)$  (см. [13], с. 421, ф. 3).

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] I n a i T. A geometric setting for internal motions of the quantum three-body system // J. Math. Phys. 1987. Vol.28. P.1315-1326.
- [2] F o c k V. On the Schrödinger equation of the helium atom I and II // K. Nor Vidensk. Selsk. For. 1958. Vol.31. P.138-152.
- [3] S m i t h F.T. Generalized angular momentum in many-body collisions // Phys. Rev, 1960. Vol.120. P.1058-1069.
- [4] D r a g t A.J. Classification of three-particle states according to  $SU_3$  // J. Math. Phys. 1965. Vol.6. P.533-553.
- [5] С и м о н о в Ю.А. Задача трех тел. Полная система угловых функций // Ядерная физика. 1966. Т.3. С.630-633; Бадалян А.М., Симонов Ю.А. Задача трех тел. Уравнение для парциальных волн // Ядерная физика. 1966. Т.3. С.1032-1047.
- [6] W h i t t e n R.C., S m i t h F.T. Symmetric representation for three-body problems. II. Motion in Space // J.Math. Phys. 1968. Vol.9. 1103-1113.
- [7] С м о р о д и н с к и й Я.А., Э ф р о с В.Д. Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник // Ядерная физика. 1973. Т.17. С.210-224.
- [8] K l a r H. Use of alternative hyperspherical coordinates for three-body systems // J.Math. Phys. 1985. Vol.26. P.1621-1625.
- [9] A b b o t P.C., M a s l e n E.N. Coordinate systems and analytic expansions for three-body atomic wavefunctions: I. Partial summation for the Fock expansion in hyperspherical coordinates // Phys. 1987. Vol.A20. P.2043-2075.
- [10] Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т.1,2. М.: Наука, 1973. 295 с.
- [11] A b b o t t P.C., M a s l e n E.N. // J. Phys. 1987. Vol.A20. P.2043-2075.
- [12] Ф е д о р ю к М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
- [13] П р у д н и к о в А.П., Б р ы ч к о в Ю.А., М а р и ч е в О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 798 с.

Ленинградский государственный  
университет

Поступило 10 сентября 1989 г.