А. П. Копылов, Поведение пространственного квазиконформного отображения на плоских сечениях области определения, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 743–746

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

А. П. КОПЫЛОВ

ПОВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЯХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 VII 1965)

В этой заметке обобщается понятие плоского квазиконформного отображения на случай отображений плоских областей в 3-мерное пространство Эвклида и дается характеристика поведения пространственных квазиконформных отображений на плоских сечениях областей определения при помощи этого понятия.

Под пространственными квазиконформными отображениями мы понимаем топологические отображения областей в 3-пространстве, квазиконформные в одном из известных смыслов [1-3]; под пространственным K-квазиконформным — квазиконформное отображение, почти во всех точках дифференцируемости которого главная его линейная часть преобразует в единичную сферу эллипсоид с отношением наибольшей полуоси к наименьшей, не превосходящим числа K.

1°. Определение 1. Пусть в 3-пространстве Эвклида задана плоскость τ и в некоторой области G на этой плоскости — взаимно однозначное и взаимно непрерывное* отображение $y = f(x)$ в пространство E_3. $y = f(x)$ будем называть 2-мерным K-квазиконформным, если существует такая прямоугольная система координат (u, v) на плоскости τ, что: 1) $f(u, v)$ почти всюду в G дифференцируема; 2) почти во всех точках G выполняется неравенство $\max\limits_{l} |\partial f / \partial l|^2 \leqslant KI$, где $I = [(y_{2u}'y_{3v}' - y_{2v}'y_{3u}')^2 + (y_{3u}'y_{1v}' - y_{3v}'y_{1u}')^2 + (y_{1u}'y_{2v}' - y_{1v}'y_{2u}')^2]^{1/2}$; 3) $f(u, v)$ — абсолютно непрерывная по Тонелли функция с суммируемыми с квадратом частными производными в любом прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, замыкание которого принадлежит G. Отображение $y = f(x)$ 2-мерное квазиконформное, если оно K-квазиконформное при некотором K.

Используя это определение, класс пространственных квазиконформных отображений можно охарактеризовать так:

Теорема 1. *Для того чтобы топологическое отображение $y = f(x)$ шара $|x| < 1$ было пространственным K-квазиконформным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого направления l отображения, индуцируемые рассматриваемым на почти всех плоских сечениях шара, ортогональных l, были 2-мерными K-квазиконформными* **.

Множество направлений, фигурирующих в теореме 1, можно уменьшить.

Теорема 2. *Пусть $y = f(x)$ — топологическое отображение шара $|x| < 1$ и $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ — счетное множество направлений в 3-пространстве, обладающие свойствами: 1) направления l_n, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежат множеству всех направлений некоторой плоскости τ и образуют всюду*

---

* Непрерывность здесь — непрерывность по множеству.

** Ради простоты формулировок мы рассматриваем здесь только квазиконформные отображения единичного шара.

плотное в нем подмножество; 2) *направление* l_0 *ортогонально плоскости* τ; 3) *отображения, индуцируемые отображением* $f(x)$ *на почти всех плоских сечениях шара, ортогональных* l_n $(n = 0, 1, \ldots)$, *K-квазиконформны. Тогда* $y = f(x)$ — *пространственное* K^2*-квазиконформное отображение.*

2^0. Возникает вопрос: можно ли описать класс всех пространственных квазиконформных отображений, исходя из поведения их на плоских сечениях областей определения, ортогональных направлениям из некоторого конечного множества направлений в пространстве. Ответ отрицателен: для любого конечного множества направлений существует контрпример. Однако, ограничиваясь рассмотрением пространственных K-квазиконформных отображений с K, близким к 1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\{y(x)\}$ — *множество всех топологических отображений шара* $|x| < 1$. *Существует число* K_0, $2/\sqrt{3} \leqslant K_0 \leqslant \sqrt{3}$, *и конечная действительнозначная функция* $\varphi(K)$, *определенная на отрезке* $[1, K_0)$, *обладающие свойствами*: 1) $\varphi(K) \geqslant 1$ *для всех* K *из* $[1, K_0)$; 2) $\lim\limits_{K \to 1} \varphi(K) = \varphi(1) = 1$; 3) *при* $1 \leqslant K < K_0$ *из 2-мерной K-квазиконформности отображения* $y(x)$ *из множества* $\{y(x)\}$ *на почти всех плоских сечениях шара, ортогональных направлению* l_n $(n = 1, 2, 3)$, *где* $\{l_n\}_{n=1}^{3}$ — *некоторая тройка взаимно ортогональных направлений в 3-пространстве, следует пространственная* $\varphi(K)$*-квазиконформность этого отображения*; 4) *для* $K > K_0$ *не существует числа* $\varphi(K)$, *обладающего свойством* 3).

Для конформных отображений в 3-пространстве из теоремы 3 получаем такую характеристику.

Теорема 4. *Для того чтобы топологическое отображение* $y = f(x)$ *шара* $|x| < 1$ *было конформным, необходимо и достаточно, чтобы существовала в пространстве такая тройка взаимно ортогональных направлений* l_n, $n = 1, 2, 3$, *что отображения, индуцируемые рассматриваемым на почти всех плоских сечениях шара, ортогональных* l_n $(n = 1, 2, 3)$, *являются 2-мерными 1-квазиконформными.*

Простые примеры показывают, что в условиях теорем 3 и 4 нельзя уменьшить число направлений (с указанным в них свойством), не нарушая справедливости этих теорем.

3^0. П. П. Белинский построил для любого $K > 1$ пример плоского K-квазиконформного отображения круга $|z| < 1$ на себя, которое переводит некоторый диаметр этого круга в неспрямляемую ни в какой своей части кривую ([4]).

Мы предлагаем следующее обобщение этого примера на случай пространственных квазиконформных отображений.

Теорема 5. *Для любого числа* $K > 1$ *существует K-квазиконформное отображение шара* $R = \{|x| < 1\}$ *на себя, переводящее его диаметральное сечение* $\tau_3 = \{|x| < 1, x_3 = 0\}$ *в неквадрируемую по Лебегу ни в какой своей части поверхность.*

Доказательство. Фиксируем число c, $c > 1$, и для произвольного числа ε, $< \varepsilon \leqslant \dfrac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{1 + c^2} + c}{1 + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{1 + c^2} - c)}$, рассмотрим топологическое отображение $\Phi_\varepsilon(x)$ шара $|x| \leqslant 1$, которое преобразует каждое диаметральное сечение τ шара, содержащее ось x_3, в себя, а на сечении τ представляется так:

$$\Phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{z + \varepsilon i}{\varepsilon i z + 1} & \text{для } z \in \bar{D}\bar{\tau} \\[2ex] z + \varepsilon i \dfrac{1 - z_{\partial D}^2}{\varepsilon i z_{\partial D} + 1} \dfrac{z_{\partial R} - z}{z_{\partial R} - z_{\partial D}} & \text{для } z \in \bar{\tau}(\{|x| \leqslant 1\} - \bar{D}), \end{cases}$$

где для точек сечения τ использована комплексная запись $z = u + iv$ (ось v совпадает с осью x_3, а ось u — одна из двух ортогональных оси x_3 в плоскости осей τ, проходящих через точку $(0, 0, 0)$), $z_{\partial D}$ — точка пересечения луча, исходящего из начала и проходящего через точку z, с границей ∂D области $D = \{x: x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + c)^2 < 1 + c^2, x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c)^2 < 1 + c^2\}$; $z_{\partial R}$ — точка пересечения этого луча с поверхностью ∂R шара R.

$\Phi_\varepsilon(x)$ оставляет точки сферы $|x| = 1$ неподвижными, в области D конформно, а во всем шаре $q(\varepsilon)$ — квазиконформно, где $q(\varepsilon)_{\varepsilon \to 0} \to 1$.

Пусть теперь K — любое число, большее 1. Зафиксируем отображение $\Phi_\varepsilon(x)$ с $q(\varepsilon) \leqslant K$. Искомое отображение мы построим при помощи суперпозиций отображений такого вида: внутри шара радиуса r оно совпадает (с точностью до вспомогательных поворотов в x- и y-пространствах) с $r\Phi_\varepsilon(x / r)$, а вне — тождественно.

1-й шаг. $\Phi_\varepsilon(x)$ увеличивает площадь τ_3 и сферических поверхностей достаточно большого радиуса, натянутых на окружность $\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$, в $(1 + \alpha_\varepsilon)$ раз, $\alpha_\varepsilon > 0$. Поэтому, используя суперпозиции отображений указанного вида, можно построить K-квазиконформное отображение $f_1(x)$ шара R на себя, которое является конформным в некоторой окрестности каждой точки из τ_3, исключая точки конечного числа попарно не пересекающихся окружностей, и увеличивает площадь τ_ε не менее чем в 2 раза.

n-й шаг. $f_{n-1}(x)$ конформно в окрестности каждой точки из τ_3, исключая точки конечного множества попарно не пересекающихся окружностей. Поэтому множество $f_{n-1}(\tau_3)$ состоит из конечного числа сферических поверхностей. Покроем $f_{n-1}(\tau_3)$ конечным числом (открытых) шаров так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) замыкания шаров не имеют общих точек друг с другом и с линиями стыка сферических участков поверхности $f_{n-1}(\tau_3)$ и содержатся в областях конформности отображения $f_{n-1}^{-1}(y)$; 2) поверхность каждого из этих шаров пересекается с поверхностью $f_{n-1}(\tau_3)$ по окружности большого круга; 3) радиусы шаров столь малы, что существует отображение типа $\Phi_\varepsilon(x)$, конформное в некоторой окрестности участка поверхности $f_{n-1}(\tau_3)$, высекаемого шарами, и увеличивающее его площадь в $(1 + \alpha_\varepsilon)$ раз; 4) площадь части поверхности $f_{n-1}(\tau_3)$, не покрытая шарами, площадь ее прообраза и радиусы окружностей, являющихся прообразами сечений шаров с $f_{n-1}(\tau_3)$, не превосходят $1/n$. Применяя эти покрытия и суперпозиции функций типа $\Phi_\varepsilon(x)$ в конечном числе, получим K-квазиконформное отображение $f_n(x)$, конформное в окрестности каждой точки из τ_3, исключая точки конечного числа попарно не пересекающихся окружностей, и увеличивающее площадь каждого из сферических участков поверхности $f_{n-1}(\tau_3)$ не менее чем в 2 раза. При построении $f_n(x)$ будем следить также за тем, чтобы при переходе от $f_{n-1}(x)$ к $f_n(x)$ (и, следовательно, при переходе от $f_{n-1}(x)$ к $f_m(x)$, $m > n$) линии стыка сферических участков поверхности $f_{n-1}(\tau_3)$ остались неподвижными.

В силу компактности класса K-квазиконформных отображений из последовательности $f_n(x)$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к K-квазиконформному отображению $f(x)$ шара $|x| < 1$ на себя, которое переводит τ_3 в поверхность, неквадрируемую по Лебегу ни в какой своей части.

Из теоремы 5, определения 1 и из классических теорем С. Б. Моррея о лебеговой площади поверхности следует, что пространственное K-квазиконформное отображение (при любом $K > 1$) может не быть квазиконформным на некоторых плоских сечениях области определения.

Замечание. Используя методы доказательства теоремы 5, можно дать отрицательный ответ на следующую гипотезу (5): при пространственном квазиконформном отображении области D образы всех замкнутых шаров из D имеют конечные периметры по де-Джорджи (6).

В самом деле, аналогично тому как это сделано при доказательстве теоремы 5, можно для любого числа $K > 1$ построить последовательность $\{f_n(x)\}$ K-квазиконформных отображений шара $|x| < 1$ на себя, обладающую свойствами: f_n — образ сферы $|x| = 1/2$ есть кусочно-сферическая поверхность с площадью $\sigma_n > n$; при переходе от $f_n(x)$ к $f_{n+1}(x)$ деформации подвергается участок поверхности $f_n(\{|x| = 1/2\})$, обладающий площадью, не превосходящей 1; при переходе от $f_n(x)$ к $f_m(x)$, $m > n + 1$, деформируется этот же участок поверхности $f_n(\{|x| = 1/2\})$. Предельное отображение K-квазиконформно и переводит шар $|x| \leqslant 1/2$ в область $f(\{|x| \leqslant 1/2\})$ с бесконечным периметром по де-Джорджи.

Львовский государственный университет
им. Ивана Франко

Поступило
27 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Шабат, ДАН, 130, № 6 (1960). [2] F. W. Gehring, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 47, 98 (1961). [3] J. Väisälä, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 298, 1 (1961). [4] П. П. Белинский, Диссертация, Львов, 1954. [5] Ю. Г. Решетняк, Б. В. Шабат, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 2, Л., 1964, стр. 672. [6] E. De Giorgi, Rend. Accad. Naz. Lincei, Ser. VIII, 14, № 3, 390 (1953).