Математические заметки

ТОМ 54 ВЫПУСК 3 СЕНТЯБРЬ 1993

О СУММИРУЕМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. Ю. Трушин

Рассмотрим оператор L, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} \tag{1}$$

и распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_j(y) &= y_j^{(s)}(0) + \sum_{k=0}^{s_j-1} b_{j,k} y^{(k)}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n-p, \\ U_j(y) &= y_j^{(s)}(1) + \sum_{k=0}^{s_j-1} b_{j,k} y^{(k)}(1) = 0, \quad j = n-p+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

причем $0 \le s_1 < \dots < s_{n-p} \le n-1$, $0 \le s_{n-p+1} < \dots < s_n \le n-1$.

Дадим определение суммируемости по Абелю разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора, введенное В. Б. Лидским [1].

Зафиксируем ту ветвь многозначной функции λ^α, что $\lambda^\alpha > 0$ при $\lambda > 0$. По разлагаемой функции $f(x)$ построим ряд

$$u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} e^{-(\sigma\lambda)^\alpha t} R_\lambda(A) f,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – характеристические значения оператора A, $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1} A$ – резольвента Фредгольма оператора A, а числа σ и α выбраны так, что ряд при каждом $t > 0$ сходится.

Определение. Будем говорить, что ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора A суммируется методом Абеля порядка α равномерно по x на отрезке $[0, b]$, если существует

$$\lim_{t\to 0} \|u(x,t) - f(x)\| = 0.$$

При предположении, что $p_i^{(n-i)}(x) \in C[0,b]$ и $|n-2p| \le 2$ А.П. Хромов [2] доказал равномерную по $x \in [0,1]$ суммируемость по Абелю порядка $1/n < \alpha < 1/2$ разложений по с.п.ф. оператора L. Затем А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликов [3] доказали равномерную по $x \in [0,1]$ суммируемость по Абелю порядка $1/n < \alpha \le 1/|n-2p|$ разложений по с.п.ф. оператора L в случае $|n-2p| \le 4$ для постоянных $p_k(x)$.

В настоящей статье доказывается следующая теорема.

Обозначим через D_α открытый четурехугольник в комплексной z-плоскости с вершинами $\left[0, \alpha, \alpha, \alpha(1-\exp(2\pi i/n))^{-1}, \alpha(1-\exp(-2\pi i/n))^{-1}\right]$, а через s_0 – наименьшее из натуральных k таких, что

$$k \ge \cos\frac{m+1}{n}\pi \Big/ \left(\cos\frac{m-1}{n}\pi - \cos\frac{m+1}{n}\pi\right) \tag{3}$$

(здесь $m = \min(p, n-p)$).

Теорема 1. *Пусть $p_k(x)$ – аналитичны в D_α и непрерывны вплоть до границ. Тогда для всякой функции из области определения оператора L^l, где $l = 1 + \left[\left(s_0\left(2pn + (1-p)p/2 - \sum_{i=1}^{p} s_{n-p+i}\right) + 1\right)/n\right]$, ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора L суммируется методом Абеля порядка $1/n < \alpha < 1/|n-2p|$ равномерно по $x \in [0,1]$ при*

$$\begin{aligned} &|n-2p| \le 4 + \min(p, n-p) \ \text{ и четном } \ n, \\ &|n-2p| \le 3 + \min(p, n-p) \ \text{ и нечетном } \ n. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь необходимо отметить, что условие (4) является точным и при его нарушении, вообще говоря, невозможно суммирование на всем отрезке [0,1] методом Абеля какого-либо порядка.

Отметим также, что в случае $|n-2p| \le 2$ в теореме 1 можно ослабить ограничения на коэффициенты дифференциального выражения и требовать лишь $p_k(x) \in L(0,1)$.

В статье также рассматривается интегральный оператор вида

$$(Af)(x) = (Mf)(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^1 f(\xi) v_k(\xi) d\xi\right) g_k(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $(Mf)(x) - \int_0^x M(x,\xi)f(\xi)d\xi$.

Такие операторы были впервые введены А.П. Хромовым и были подробно изучены в работах [4], [5] и других.

Оператор, обратный оператору (1), (2), имеет вид (5) и теорема 1 непосредственно вытекает из доказательства приведенной ниже теоремы 2. Отметим далее, что рассмотренный в работе [3] оператор свертки на конечном интервале с ядром, определенным на всей вещественной оси как преобразование Фурье рациональной функции, также может быть представлен в виде (5).

Обозначим через V пирамиду с вертикальной t-осью и горизонтальной z-плоскостью: $V = \{(t,z)\colon 0 \le t \le 1,\ z \in \overline{D}_{1-t}\}$.

Пусть функции $\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}M_0(t,z)$, $\quad 0 \le i \le n+1$, определены и непрерывны в пирамиде V, при фиксированном t являются аналитическими по z в D_{1-t} и

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}M_0(0,z) = \delta_{i,n-1}, \qquad 0 \le i \le n.$$

Предположим, что

$$M(x,\xi) = M_0(x-\xi,\xi), \tag{6}$$

а $v_k(x)$, $g_k(x)$ – непрерывные при $0 \le x \le 1$ функции, имеющие представление

$$\begin{aligned} v_k(x) &= (1-x)^{\varkappa_k} + o\left((1-x)^{\varkappa_k}\right), && \text{при} \quad x \to 1, \\ g_k(x) &= a_k x^{\chi_k} + o\left(x^{\chi_k}\right), \quad a_k \ne 0, && \text{при} \quad x \to 0, \end{aligned} \tag{7}$$

причем в системах целых неотрицательных чисел $\{\varkappa_1, \dots, \varkappa_m\}$ и $\{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ все числа различны и не могут отличаться друг от друга на целое кратное n.

Обозначим $\chi = \sum_{k=1}^m (\varkappa_k + \chi_k)$, s_0 – наименьший из натуральных k таких, что выполняется неравенство (3).

Сформулируем основную теорему статьи (здесь для определенности считаем m нечетным; случай четного m изучается аналогично).

Теорема 2. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям* (6), (7) *и*

$$\begin{aligned} (n-4)/3 \le m < n/2 & \qquad \textit{при четном} \quad n, \\ (n-3)/3 \le m < n/2 & \qquad \textit{при нечетном} \quad n. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда для всякой функции $f = A^l f_1$, где $l = 1 + [(s_0(2m+\chi)+1)/n]$, $f_1 \in L(0,1)$, ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора A суммируется *методом Абеля порядка* $1/n < \alpha < 1/(n-2m)$ *равномерно по* x *на отрезке* $[0,1]$.

Отметим, что ограничение (8) является принципиальным и при его нарушении построен пример, показывающий, что в этом случае, вообще говоря, невозможно суммирование на всем отрезке [0,1] методом Абеля какого бы ни было порядка. Однако в этом случае существует меньший отрезок $[0,b]$, $b<1$, на котором имеет место равномерная суммируемость [6]. Отметим также, что в случае $n-2 \le 2m \le n-1$ теорема остается справедливой, если требовать лишь непрерывность ядра $M(x,\xi)$ [7].

1. Изучим резольвенту оператора (5) в случае $M = I^n$, где

$$(I^n f)(x) = \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi/(n-1)!.$$

Будем в дальнейшем считать $\lambda = -\rho^n$, $\varphi = \arg\rho$.

Введем обозначения $\overline{\varphi}_{k,j} = \varphi_{k,j}\pi/n$, где $\varphi_{k,1} = 2-k$, $\varphi_{k,2} = k-1$ при четном k, $\varphi_{k,1} = k+1$, $\varphi_{k,2} = -k$ при нечетном k. Обозначим через k_0 нечетное число такое, что $n/2-1 \le k_0 < n/2+1$. Будем также обозначать $f_+ = (f+|f|)/2$, $\varepsilon(x,\xi) = 1$ при $x \ge \xi$, $\varepsilon(x,\xi) = 0$ при $x < \xi$.

Лемма 1. *Пусть* $M = I^n$, $2m < n$. *Тогда при достаточно больших* $|\rho|$ *на луче* $\varphi = (-1)^j\pi/n$ *для ядра резольвенты* $G(x,\xi,\rho)$ *имеет место представление*

$$G(x,\xi,\rho) = \varepsilon(x,\xi)\sum\nolimits' D^j_{k_1,\ldots,k_{rm+1}}(x,\xi,\rho) + O(\rho^{2m+\chi+1-n}), \tag{9}$$

где $\sum'$ *означает, что суммирование идет для натуральных* $1 \le r \le s_0$, $1 \le k_i \le k_0$ *таких, что кратность* k_i *в мультииндексе* $\{k_1,\ldots,k_{rm+1}\}$ *не превышает* r.

Здесь $D_{k_1,\ldots,k_{rm+1}}(x,\xi,\rho)$ *– аналитичные вне нуля в секторе* ρ*-плоскости* $-\pi/n + m/n \le \varphi \le \pi/2 - m\pi/n$ *функции, имеющие там оценку при достаточно больших* $|\rho|$

$$\left|D^j_{k_1,\ldots,k_{rm+1}}(x,\xi,\rho)\right| \le C|\rho|^{r(2m+\chi)+1-n}\exp\left(|\rho|F^j_{k_1,\ldots,k_{rm+1}}(\varphi)\right), \tag{10}$$

где

$$F^j_{k_1,\ldots,k_{rm+1}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{rm+1}\cos_+\left(\varphi + \overline{\varphi}_{k_i,j}\right) - r\sum_{i=1}^{m}\cos\left(\varphi + \overline{\varphi}_{i,j}\right). \tag{11}$$

Доказательство леммы проводится подобно рассуждениям [4], [5].

Лемма 2. *Пусть m удовлетворяет ограничениям* (8). *Тогда для всякого мультииндекса* $\{k_1,\dots,k_{rm+1}\}$, *участвующего в представлении* (9), *существуют лучи в секторе* $-\pi/2+m\pi/n\le\varphi\le\pi/2-m\pi/n$, *на которых при достаточно больших* $|\rho|$ *имеет место*

$$\left|D^j_{k_1,\dots,k_{rm+1}}(x,\xi,\rho)\right|\le C|\rho|^{r(2m+\chi)+1-n}. \tag{12}$$

Доказательство. Зафиксируем какой-либо мультииндекс

$$\{k_1,\dots,k_{rm+1}\},$$

участвующий в представлении (9). Разобъем входящие в него индексы на три непересекающиеся множества

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&=\{1\le k_i\le m\},\\ \mathcal{U}&=\{m+1\le k_i\le k_0-1,\ k_i-\text{четные}\},\\ \mathcal{V}&=\{m+2\le k_i\le k_0,\ k_i-\text{нечетные}\}.\end{aligned}$$

Заметим, что множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ не могут быть пусты одновременно.

Обозначим через s количество элементов в $\mathcal{U}$, через d – количество элементов в $\mathcal{V}$, через k^s_u – наименьший элемент $\mathcal{U}$, а через k^d_v – наименьший элемент $\mathcal{V}$.

Введем множество индексов $\mathcal{N}=\mathcal{P}_r\setminus\mathcal{M}$, где $\mathcal{P}_r$ – множество, состоящее из r экземпляров множества $\{1,\dots,m\}$. Множество $\mathcal{N}$ состоит из $s+d-1$ элементов, которые обозначаем через τ_i и нумеруем в порядке невозрастания $\varphi_{\tau_i,j}$.

Тогда формула (11) принимает вид

$$F^j_{k_1,\dots,k_{rm+1}}(\varphi)=\sum_{k\in\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}\cos_+(\varphi+\overline{\varphi}_{k,j})+\sum_{i=1}^{s+p-1}\cos(\varphi+\varphi_{\tau_i,j}).$$

Рассмотрим вначале случай $j=2$. Заметим, что мультииндекс

$$\{k_1,\dots,k_{rm+1}\}$$

принадлежит одному из трех непересекающихся множеств мультииндексов:

$$\begin{gathered}\{sd=0\},\\ \left\{sd\ne0,2k^s_u+k^d_v-\varphi_{\tau_s,j}\ge n+2\right\},\\ \left\{sd\ne0,2k^d_v+k^s_u+\varphi_{\tau_s,j}\ge n+1\right\},\end{gathered}$$

поскольку множество

$$\{sd \neq 0, 2k_v^d + k_u^s + \varphi_{\tau_s,j} < n+1, 2k_u^s + k_v^d + \varphi_{\tau_s,j} < n+2\}$$

пусто в рассматриваемом случае.

Предположим вначале, что в мультииндексе $\{k_1, \dots, k_{rm+1}\}$ имеет место $ds = 0$. Пусть для определенности $d = 0$. Тогда $s \geq 1$ и

$$\begin{aligned} &\cos\left(\pi/2 - (k_u^s - 1 + \varphi_{i,j})\,\pi/n\right) \leq 0 \qquad \text{при} \quad i \in \mathcal{U}, \\ &\cos\left(\pi/2 - (k_u^s - 1 + \varphi_{i,j})\,\pi/n\right) > 0 \qquad \text{при} \quad i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

Поэтому в рассматриваемой ситуации

$$F^2_{k_1,\dots,k_{rm+1}}\left(\pi/2 - (k_u^s - 1)\pi/n\right) \leq 0,$$

и из оценки (10) вытекает оценка (12).

В случае $s = 0$ оценка (12) получается из неравенства

$$F^2_{k_1,\dots,k_{rm+1}}\left(-\pi/2 + k_v^d \pi/n\right) \leq 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в мультииндексе $\{k_1, \dots, k_{rm+1}\}$ выполняется $sd \neq 0, 2k_u^s + k_v^d - \varphi_{\tau_s,j} \geq n+2$. Для любых $k_i \in \mathcal{V}$ и $s \leq j \leq s+d-1$ имеет место цепочка неравенств

$$n > k_u^s + k_i - 1 > k_u^s - \varphi_{\tau_j,2} - 1 \geq k_u^s - \varphi_{\tau_s,2} - 1 \geq n - \left(k_u^s - k_v^d - 1\right) > 0,$$

и, следовательно,

$$\sin(k_u^s - \varphi_{\tau_j,2} - 1)\pi/n \geq \sin\left(k_u^s + k_i - 1\right)\pi/n.$$

Кроме этого, для любых $1 \leq j \leq s+d-1$, $k_i \in \mathcal{U}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \sin(k_u^s - \varphi_{\tau_j,2} - 1)\pi/n > 0, \\ \cos\left(\pi/2 - (k_u^s - 1)\pi/n + (k_i - 1)\pi/n\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\begin{aligned} &F^2_{k_1,\dots,k_{rm+1}}\left(\pi/2 - (k_u^s - 1)\pi/n\right) \\ &\quad = \sum_{k_i \in \mathcal{V}} \sin\left(k_u^s + k_i - 1\right)\pi/n - \sum_{i=1}^{s+p-1} \sin\left(k_u^s - \varphi_{\tau_i,2} - 1\right)\pi/n \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) вытекает оценка (12).

Если в мультииндексе $\{k_1, \dots, k_{rm+1}\}$ выполняется $sd \neq 0, 2k_v^d + k_u^s + \varphi_{\tau_s,2} \geq n+1$, то

$$F^2_{k_1,\dots,k_{rm+1}}\left(-\pi/2 + k_v^d \pi/n\right) \leq 0,$$

и имеет место оценка (12).

В случае $j = 2$ лемма доказана, а случай $j = 1$ изучается аналогично.

2. Доказательство теоремы 2. Докажем вначале теорему в случае, когда $M = I^n$. В статье [5] установлено, что оператор A имеет счетное множество характеристических чисел $\lambda_k = -\rho_k^n$, где $\rho_k = \rho_k^0 + o(1)$, $\rho_k^0 = \alpha + (k+h)/\sin(m\pi/n)$, $\lambda_k \neq 0, \alpha$ и h – известные числа.

Из оценки (2.21) [5] легко следует оценка

$$|G(x,\xi,\rho)| \leq C|\rho|^{2m+1-n+\chi} \exp|\rho| \tag{13}$$

при достаточно больших $|\rho|$ в области ρ-плоскости, получающейся из сектора $-\pi/n \leq \arg\rho \leq \pi/n$ выбрасыванием точек ρ_k^0 вместе с круговыми окрестностями достаточно малого, но одного и того же для всех точек ρ_k^0 радиуса.

Легко видеть, что

$$R_\lambda(A)A^l f_1 = -A^l f_1/\lambda - \ldots - Af_1/\lambda^l + R_\lambda(A)f_1/\lambda^l. \tag{14}$$

Используя оценку (13), тождество (14), леммы 1 и 2 и повторяя рассуждения теоремы 1 статьи [3], завершаем доказательство теоремы 1 в случае $M = I^n$.

Рассмотрим теперь оператор A в случае, когда

$$M = BI^nB^{-1}, \tag{15}$$

где $B = E + N$, E - единичный оператор, N – вольтерров оператор с непрерывным ядром.

Наряду с оператором A рассмотрим оператор

$$A_0 f = I^n f + \sum_{k=1}^{m} B^{-1} g_k \int_0^1 f(\xi)\overline{B^* \overline{v_k(\xi)}}d\xi.$$

Легко видеть, что для оператора A_0 справедлива теорема 1.

Заметим теперь, что $A = BA_0B^{-1}$, $R_\lambda(A) = BR_\lambda(A_0)B^{-1}$ и характеристические значения операторов A и A_0 совпадают. Поэтому утверждения теоремы имеют место и для рассматриваемого оператора.

Осталось заметить, что оператор M с ядром (6) может быть представлен в виде (15) (см. [8]). Теорема доказана.

Покажем теперь, что условие (8) является точным в случае $2m < n$. С этой целью рассматривается интегральный оператор A_1, ядро которого является функцией Грина оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = y^n$ и краевыми условиями

$$y(0) = \cdots = y^{(n-m-1)}(0) = y(1) = \cdots = y^{(m-1)}(1) = 0.$$

ЛЕММА 3. *Пусть $m \le (n-5)/3$ при четном n либо $m \le (n-4)/3$ при нечетном n. Тогда для любых $\alpha > 0$, $l \ge 1$, найдутся такие функции $f = A^l f_1$, $f_1 \in L(0,1)$, что не существует конечного предела* $\lim_{t\to 0} \|u(x,t) - f(x)\|_{C[0,1]}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 3 [3].

3. Доказательство теоремы 1. В случае $n = 2p$ краевые условия регулярны и, следовательно, по известной теореме Биркгофа всякая функция из области определения оператора L разлагается в равномерно сходящийся на всем отрезке [0,1] ряд по с.п.ф. оператора L.

Для доказательства теоремы осталось рассмотреть случай $|n-2p| \ge 1$. В дальнейшем будем предполагать $p < n-p$, поскольку случай $p > n-p$ сводится к рассматриваемому заменой $x = 1-t$.

Легко убедиться, что обратным к L является интегральный оператор (5), (7) при $m = p$, где ядром оператора M является функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1) и начальными условиями $y(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$, причем $\varkappa_i = n-1-s_{n-p+i}$, $i = 1,\dots,p$, $0 \le \chi_i \le n-1$. Осталось заметить (см. [9]), что оператор M может быть представлен в виде (15). Теорема доказана.

В случае $|2p-n| \le 2$, $p_k(x) \in L(0,1)$ теорема 2 устанавливается так же, если вместо теоремы 1 использовать теорему 3 [7].

Отметим также, что лемма 3 показывает, что ограничения (4) в теореме 1 не могут быть ослаблены.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А.П. Хромову за постановку задачи и внимание к работе.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило
23.10.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лидский В.Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 3–35.

[2] Хромов А.П. О суммировании разложений по собственным функциям краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с распадающимися краевыми условиями и об одном аналоге теоремы Вейерштрасса // Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды Фурье. Саратов: СГУ. 1968. С. 29–41.

[3] Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №4. С. 24–40.

[4] Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973.

[5] Мацнев Л.Б., Хромов А.П. Асимптотика резольвентного ядра вольтеррова оператора в недифференцируемом случае и ее применение // Дифференциальные уравнения и теория функций. Т. 1. Саратов: СГУ. 1977. С. 36–65.

[6] Трушин И.Ю. О суммировании разложений по собственным функциям конечномерных возмущений вольтеррова оператора // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. №8826–В88.

[7] Трушин И.Ю. О суммировании разложений по собственным функциям конечномерных возмущений вольтеррова оператора 2 // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. №2618–В90.

[8] Седин О.В. О подобии вольтеррова оператора n-й степени оператора степени оператора интегрирования // Линейные операторы в функциональных пространствах (тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции). Грозный: Изд-во ЧИГУ. 1989. С. 144–145.

[9] Хачатрян И.Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. №3. С. 215–237.